
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01195809 7

# LEÇONS

SUR LA

# GÉOMÉTRIE DE POSITION

275. — PARIS, IMPRIMERIE A. LAHURE
9, rue de Fleurus.

# LEÇONS

SUR LA

# GÉOMÉTRIE DE POSITION

PAR LE D[R] TH. REYE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

TRADUITES DE L'ALLEMAND

PAR O. CHEMIN

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

---

PREMIÈRE PARTIE

---

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES ET TÉLÉGRAPHES

QUAI DES AUGUSTINS, 49

—

1881

# PRÉFACE

L'ouvrage qu'on publie actuellement a pour origine les leçons que l'auteur a faites jadis à l'École polytechnique fédérale de Zurich ; il était tout d'abord destiné aux élèves-ingénieurs qui avaient un besoin impérieux d'être familiarisés avec la géométrie projective pour pouvoir étudier la statique graphique. Les méthodes géométriques dont on y fait usage sont dues pour la plupart à Poncelet, Möbius, Steiner et Von Staudt; c'est surtout à ce dernier que revient l'honneur d'avoir établi la géométrie de position sur des bases indépendantes de la notion de mesure et d'avoir ainsi permis au principe fondamental et si fécond de la Dualité de se développer de la manière la plus heureuse dans toute sa netteté et son étendue.

L'auteur estime que l'objet principal de l'enseignement géométrique est d'exercer et de développer chez les élèves la faculté de se représenter les formes de l'espace, sans être obligé de recourir à une figuration matérielle, afin qu'ils puissent reconnaître les propriétés et les relations réciproques de ces formes par une sorte d'intuition intérieure. Les mathématiciens, les personnes qui s'occupent de sciences naturelles et, d'une manière toute spéciale, les ingénieurs ont constamment à faire appel à cette faculté ; il est donc nécessaire qu'ils l'exercent de bonne heure. Sous ce rapport, la géométrie de position, de même que la géométrie descriptive qui lui tient de près, nous

donnent un des meilleurs moyens de la cultiver ; les formules de la géométrie basée sur le calcul sont au contraire sans utilité pour cet objet, tant qu'elles ne sont pas interprétées géométriquement. L'auteur demande donc qu'on veuille bien se placer à ce point de vue pour juger du choix et du mode d'exposition des matières contenues dans le présent Traité.

La première partie est, à proprement parler, la partie élémentaire de l'ouvrage.

La seconde, qui embrasse un champ bien plus vaste, contient une exposition complète des théories de la collinéation et de la réciprocité, des surfaces du second ordre, des complexes linéaires de rayons et des coniques cubiques. Elle renferme en outre les travaux originaux de l'auteur sur le complexe tétraédral de rayons de second ordre, sur les surfaces du troisième ordre et sur les systèmes linéaires de surfaces de second ordre, dans lesquels les remarquables surfaces du quatrième ordre étudiées par Steiner et Kummer jouent un si grand rôle.

La première édition du présent Traité[1] a été partiellement traduite en italien, à l'insu de l'auteur, par M. Favaro, professeur à l'Université de Padoue, et une traduction française de cette version a paru récemment[2]. La manière dont procède M. Favaro, ses citations dans la préface et ailleurs, et la division en paragraphes adoptée par lui, semblent bien plutôt calculées pour dissimuler le véritable état des choses. Nous constatons qu'en dehors de la Préface, des indications bibliographiques et des remarques historiques de M. Favaro, les neuf dixièmes environ de son ouvrage sont traduits du nôtre, en général théorème par théorème, avec quelques transpositions çà et là ou avec omission de quelques propositions. Il y a seulement cinq passages où l'on trouve des additions plus considérables d'une étendue de deux à cinq pages; et encore sont-elles empruntées à d'autres

---

1. *Die Geometrie der Lage*, Vorträge von Dr Th. Reye. Hanovre 1866-68. La deuxième édition a paru en 1877-80.

2. *Leçons de Statique graphique*, par Antonio Favaro; traduites de l'Italien par Paul Terrier. Première partie: Géométrie de position. Paris (Gauthier-Villars), 1879.

auteurs. Les petites additions personnelles que M. Favaro a introduites dans le texte sont insignifiantes ; parmi les 77 figures de son ouvrage, 65 ont été copiées dans le nôtre. L'auteur aurait volontiers donné à M. Favaro l'autorisation de traduire son livre s'il la lui avait demandée ; mais ce géomètre a préféré s'approprier sans permission ce qui ne lui appartient pas.

Strasbourg, le 28 mai 1881.

TH. REYE.

# AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR

La courte préface qui précède explique mieux que nous ne pourrions le faire les ressemblances qu'on trouvera entre la géométrie de position de M. Favaro et l'ouvrage que nous publions aujourd'hui. Il s'en faut toutefois de beaucoup que le géomètre italien ait textuellement traduit *tout* le texte allemand ; le lecteur se convaincra facilement, à un simple examen, que les théories et les résultats les plus importants et les plus nouveaux ont été laissés de côté par M. Favaro. C'est ainsi que tout ce qui a trait aux complexes de divers ordres, aux surfaces de 3e ordre, etc., en un mot, tout ce qui constitue l'œuvre personnelle de M. Reye ne figure pas dans le Traité de statique graphique traduit par M. Terrier. Il n'est donc pas à craindre que cet ouvrage et celui que nous publions aujourd'hui fassent double emploi dans la science.

Les leçons de M. Reye sont l'introduction indispensable à la lecture du Traité de statique graphique de M. Culmann, et c'est surtout à ce titre que l'éminent professeur de Zurich en recommande la lecture. Cependant elles ont une portée scientifique bien autrement grande si l'on considère la facilité et l'intuitivité avec lesquelles elles permettent de traiter les difficiles questions relatives à la théorie des complexes et des surfaces géométriques d'ordre supérieur. Elles constituent

plutôt, à proprement parler, un traité de géométrie générale, et si l'ingénieur y trouve réunis tous éléments propres à lui faciliter l'étude de la statique graphique, le géomètre verra avec satisfaction que les résultats les plus importants acquis par la géométrie moderne y sont résumés avec autant de clarté que d'élégance.

La première partie contient la théorie complète des formes projectives du premier et du second ordre, et son application aux propriétés des systèmes linéaires de coniques.

La seconde partie renfermera la théorie de la collinéation, celle de la réciprocité, des surfaces du second et du troisième ordre, des complexes de différents ordres, des surfaces de Steiner et de Kummer, etc. Elle paraîtra sous peu.

Paris, le 30 mai 1881.

O. Chemin.

---

# INTRODUCTION

La majeure partie des ingénieurs ne connaissent la géométrie de position que de nom. Car cette importante création des savants de notre époque, qui se distingue d'une manière si particulière par l'ampleur du champ qu'elle embrasse, par la beauté de la forme et la simplicité des développements qu'elle fournit, est malheureusement encore fort peu répandue; et bien que la géométrie moderne doive être comptée parmi celles des parties des sciences mathématiques dont on s'occupe le plus, bien qu'elle se prête à un grand nombre d'applications remarquables dans les sciences techniques et naturelles, elle n'a pas encore réussi à se faire admettre d'une manière générale dans l'enseignement. En raison même de cette situation, il ne sera peut-être pas inutile, avant d'entrer en matière, d'indiquer en quelques mots la place que la géométrie de position occupe par rapport aux autres branches de la géométrie actuellement enseignées, et de donner quelques théorèmes et problèmes de nature à bien faire comprendre l'esprit de cette science aux lecteurs.

La géométrie *pure* de position se distingue essentiellement de la géométrie des anciens et de la géométrie analytique en ce qu'elle ne fait aucun usage de la notion de mesure ou de grandeur. Par opposition, la géométrie ancienne pourrait donc s'appeler la géométrie de la mesure, ou géométrie métrique. Ainsi dans la géométrie de position, il n'est pas question de division de segments de droites en parties égales, d'angles droits, de perpendiculaires, de rapports, de proportions, de mesure de

surfaces. On parle encore bien moins de rapports trigonométriques et on ne dit pas un mot des équations analytiques des lignes courbes. Car tous ces sujets qui font l'objet de la géométrie ancienne supposent des mesures. Cependant, à la fin de chaque grande section, nous donnerons comme suppléments quelques applications de la géométrie de position à des propriétés métriques, en supposant connues la planimétrie et la trigonométrie. Nous ne nous occuperons pas plus des triangles isocèles ou équilatéraux que des triangles rectangles; et en dehors de ce que nous pourrons dire dans les suppléments, le rectangle, les polygones réguliers et le cercle seront exclus de nos considérations. Ainsi, c'est seulement dans ces suppléments que nous parlerons du centre, des axes et des foyers des courbes dites du second degré ou des coniques; par contre, nous ferons connaître des propriétés de ces lignes qui sont bien plus générales et plus importantes que celles auxquelles on se borne dans la plupart des traités de géométrie analytique. Nous aurons même à nous frayer une voie nouvelle pour arriver aux coniques, puisque dans la géométrie de position nous n'aurons pas recours au cône à base circulaire qui a servi aux anciens, ni aux équations que les disciples de Descartes ont employées pour définir ces courbes. Après ce que nous venons de dire, il est à peine nécessaire d'ajouter qu'on ne rencontrera aucun calcul dans les leçons qui suivent. C'est seulement dans les applications à la géométrie métrique que nous ferons quelquefois usage du signe d'égalité.

D'après cela, nous ne nous servirons que d'un très petit nombre des connaissances géométriques qu'on enseigne dans les écoles. Il sera au contraire de la plus grande utilité d'avoir une certaine habitude de se représenter, de concevoir les figures géométriques, sans être obligé de recourir à leur construction effective. Car il n'est pas toujours possible de faciliter la compréhension de chaque théorème par un dessin, notamment quand ce théorème se rapporte à des figures de l'espace. Nous aurons fréquemment à faire appel à la faculté du lecteur de se représenter les objets. Comme cette faculté est souvent mise en jeu dans la géométrie descriptive, la connaissance de cette dernière science sera fort utile; et réciproquement aussi la géométrie de position formera une excellente préparation pour la géométrie descriptive. D'une manière générale, on peut dire que de toutes les branches de la géométrie la descriptive est la plus propre à faciliter l'étude de la géométrie de position, parce qu'elle est en relation très intime avec elle. Car dans la

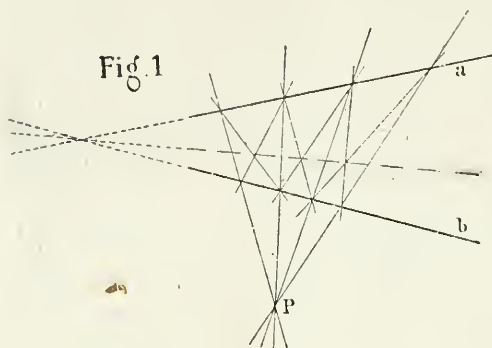
géométrie descriptive aussi, on considère bien moins les relations de grandeur que la position des figures ou des éléments, soit les uns par rapport aux autres, soit par rapport aux plans de projection ; il faut toutefois dire qu'on n'y repousse pas l'emploi du cercle et de l'angle droit. On verra surtout que la perspective, ou projection centrale, joue aussi un grand rôle dans la géométrie de position et qu'un grand nombre d'expressions employées dans celle-ci sont empruntées à la première.

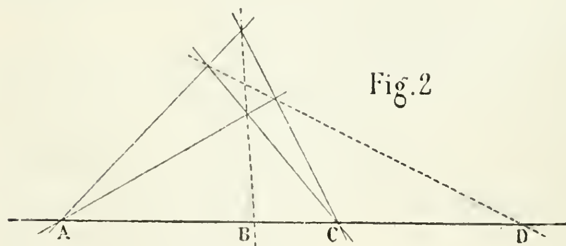
Par sa méthode même, la géométrie nouvelle ou moderne se trouve pour ainsi dire en opposition avec la géométrie analytique ; car elle emploie la synthèse comme dans la géométrie des anciens. Nous partirons d'un petit nombre de formes fondamentales; les relations simples qu'on peut établir entre elles nous conduiront alors aux formes dites du second ordre, auxquelles appartiennent aussi les coniques, et nous permettront en même temps de reconnaître les propriétés principales de ces formes. De la même manière, en partant des formes du second ordre, nous pourrons en suivant la même marche passer successivement à d'autres formes nouvelles d'ordre plus élevé. Dans nos recherches, nous sommes obligés de renoncer à l'analyse, ce puissant instrument des mathématiques modernes, parce que nous n'employons pas de relations métriques ; car pour pouvoir appliquer le calcul aux formes de l'espace, il faut d'abord les exprimer au moyen de nombres, c'est-à-dire les mesurer. En raison de la méthode qu'elle emploie et par opposition à la géométrie analytique, la géométrie moderne est souvent désignée sous le nom de « *géométrie synthétique* ».

Par cela même que dans la géométrie de position nous n'employons pas les rapports métriques, les théorèmes auxquels nous arrivons sont très généraux et très étendus. Ainsi, par exemple, les plus importantes des propriétés des coniques qu'on démontre dans les traités de géométrie analytique ne sont que des cas très particuliers de théorèmes que nous apprendrons à connaître plus tard. A cet égard, quelques exemples pourront servir à mieux caractériser la matière qui fera l'objet des leçons qui suivent.

Dans le tracé des constructions et dans le dessin en général, on a souvent à résoudre le problème suivant : par le point inaccessible d'intersection de deux droites (convergentes), tracer une troisième droite La géométrie ordinaire ou métrique permet de trouver autant de points qu'on veut de cette droite, à l'aide du théorème que trois transversales issues d'un même point déterminent des segments proportionnels sur

des droites parallèles. La géométrie de position nous donne immédiatement une solution plus simple. En effet, prenons un point quelconque P en dehors des deux droites *a* et *b* (fig. 1) et menons par ce point un nombre quelconque de transversales. Maintenant, dans chacun des quadrilatères formés par deux transversales quelconques et les lignes *a* et *b*, cherchons le point d'intersection des diagonales; tous ces points sont sur une même droite qui passe par le point d'intersection de *a* et *b*. La démonstration se déduit facilement du théorème important de la division harmonique dans un quadrilatère, théorème qui peut s'énoncer de la manière suivante : Prenons sur une droite (fig. 2) trois points A,B,C, et construisons un quadrilatère quelconque de telle manière que deux côtés opposés se coupent en A, qu'une diagonale passe par B et que les deux autres côtés opposés se rencontrent en C; la deuxième diagonale coupe la droite ABC en un quatrième point D entièrement déterminé. En construisant différents quadrilatères satisfaisant aux premières conditions, on vérifie aisément que toutes leurs secondes diagonales passent effectivement par ce quatrième point D. Les points A,B,C,D sont appelés quatre points harmoniques conjugés et on dit que D et B sont séparés harmoniquement par les points A et C. Dans l'arpentage, ce théorème peut, dans certains cas, être utilisé pour prolonger une ligne droite au delà d'un obstacle, d'un mur par exemple, autour duquel on peut tourner.

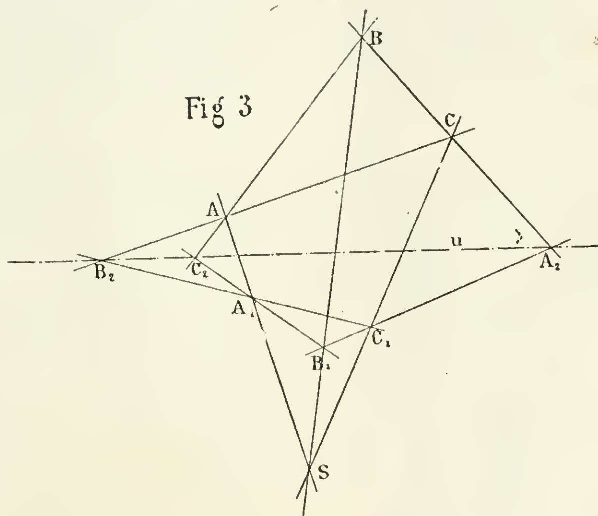



Parmi les théorèmes qui se rapportent au triangle, nous ne donnerons que le suivant : Si deux triangles A, B, C et $A_1$, $B_1$, $C_1$ (fig. 3), sont

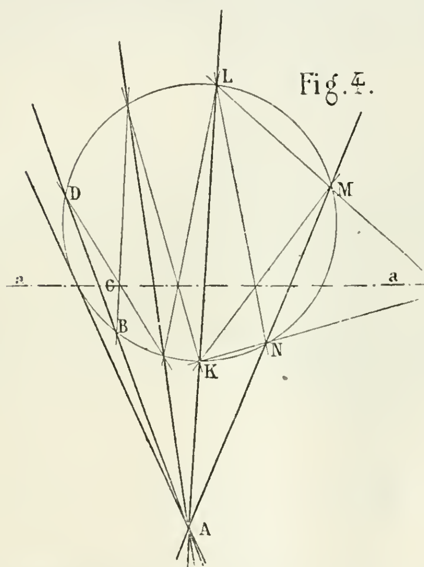
situés de telle manière que les lignes $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ qui joignent les sommets homologues se coupent en un seul et même point S, les côtés homologues AB et $A_1B_1$, BC et $B_1C_1$, CA et $C_1A_1$ se coupent en trois points $C_2$, $A_2$, $B_2$, qui sont sur une même droite U; et réciproquement. La figure qui sert à l'intelligence du théorème mérite de fixer l'attention; c'est un exemple particulier appartenant à une famille de diagrammes importants et remarquables à cause d'une espèce de symétrie qu'ils présentent. Cette figure se compose de dix points et de dix droites: sur chaque droite se trouvent trois des dix points et par chaque point passent trois des dix droites.

Aux courbes du second ordre ou coniques se rattache une autre série de théorèmes. On sait par la géométrie analytique (et nous le




démontrerons plus loin) qu'une courbe du deuxième ordre est complètement déterminée par cinq points ou cinq tangentes. Mais on sait aussi combien il faut de temps pour calculer effectivement et pour construire une conique déterminée de la sorte. La géométrie de position établit deux théorèmes très importants sur les courbes du second ordre qui nous permettent, étant donnés cinq points ou cinq tangentes d'une pareille courbe, de construire facilement autant de points ou de tangentes nouvelles qu'on voudra et par suite de tracer rapidement la courbe elle-même. Ceux des lecteurs qui connaissent ces théorèmes savent aussi à combien de propositions préliminaires il faut avoir recours pour les démontrer par la géométrie analytique. Le premier, qui a été énoncé pour la première fois par Pascal, établit que

dans tout hexagone inscrit dans une courbe du second ordre les trois couples de côtés opposés se coupent en trois points situés en ligne droite. Le second, dû à Brianchon, consiste en ce que dans tout hexagone circonscrit à une conique les trois diagonales obtenues en joignant deux à deux les sommets opposés se coupent en un seul et même point. Ces deux théorèmes se démontrent très aisément pour le cercle. On voit que dans chacun d'eux il n'est pas question des proportions de la conique, de son centre, de ses axes et de ses foyers. Aussi, précisément à cause de cela, ces théorèmes ont-ils la plus grande étendue et la plus grande généralité, et on pourrait en faire la base fondamentale de toute la théorie des coniques. Par exemple, le théorème de Pascal permet de résoudre l'important problème du tracé d'une tangente en un point donné, même quand la conique est définie par cinq points et sans qu'elle soit complètement tracée.




Le problème qui consiste à mener les tangentes à une courbe du second ordre peut dans bien des cas se résoudre au moyen d'un théorème qui constitue une des plus importantes propriétés des coniques, mais qui ne se trouve pas toujours dans les traités de géométrie analytique, parce que sa démonstration analytique est assez compliquée et qu'elle est peu propre à faire ressortir cette propriété sous son véritable jour. Si d'un point A (fig. 4) situé dans le plan d'une courbe du deuxième ordre, mais non sur cette courbe, on lui mène des sécantes, deux quelconques d'entre elles déterminent quatre points sur la courbe, par exemple K, L, M, N. Deux quelconques des lignes qui joignent ces points et qui sont différentes des sécantes, comme LM et KN ou KM et LN se coupent en un point d'une ligne parfaitement déterminée $a$, qu'on nomme la *polaire* du point donné A. Si le point A est en dehors de la courbe, sa polaire $a$ la coupe aux points de contact des deux

tangentes qu'on peut mener de A à la courbe ; si A est dans l'intérieur de la courbe, celle-ci n'est pas rencontrée par *a*. Nous pouvons faire usage de ce théorème pour mener par un point donné une tangente à la conique, en ne nous servant que de la règle. Sur chaque sécante menée par A se trouvent quatre points remarquables et qui sont : A lui-même, puis le premier point d'intersection B avec la courbe, ensuite le point C d'intersection de la droite avec la polaire *a* de A, et enfin le second point de rencontre D avec la courbe. Ces quatre points sont quatre points harmoniques et la polaire *a* contient ainsi tout point qui est harmoniquement séparé de A par les deux points de la courbe. Les théorèmes sur le centre et les diamètres conjugés des coniques sont des cas tout à fait particuliers des théorèmes qu'on vient d'énoncer. Ces derniers s'étendent facilement aux surfaces du second ordre, parce qu'elles ont en général une courbe du second ordre commune avec un plan qui les coupe.

Ces quelques exemples, qu'on pourrait multiplier à l'infini, font bien voir à quel ordre de théorèmes s'attache la géométrie de position ; ils sont différents de ceux que traite par exemple la géométrie analytique, mais ils ne sont pas à coup sûr moins importants. Nous ferons remarquer en passant que cette dernière science cherche à déterminer la position des tangentes au moyen des angles qu'elles font avec les rayons focaux, ou des segments qu'elles déterminent sur les axes, et que par suite elle ramène tout aux propriétés métriques. Bien entendu, il n'est question ici que des éléments de la géométrie analytique auxquels se bornent la plupart des traités et non pas des méthodes nouvelles si fécondes qu'on doit à l'esprit pénétrant de Plucker.

# PREMIERE LEÇON

**Projection de points et de droites.**
**Section par des plans et des droites.**
**Les six formes fondamentales de la géométrie nouvelle.**

On sait que les nombreuses conceptions qui forment la base de la géométrie des anciens, de la trigonométrie et de la géométrie analytique reposent pour la plupart sur la notion de la mesure et par suite ne peuvent trouver leur application dans la géométrie pure de position. On ne devra donc pas s'étonner que la géométrie moderne ait également créé pour son usage un nombre important de notions ou conceptions caractéristiques que nous nous proposons de faire connaître dans cette leçon et les suivantes et que nous aurons constamment à appliquer.

Le *point*, la *droite* et le *plan* sont les *éléments simples* de la géométrie moderne. En règle générale, nous désignerons les points par des majuscules latines, les droites par des minuscules et les plans par des lettres de l'alphabet grec. Les droites (que nous appellerons souvent aussi *rayons*) et les plans devront toujours être considérés comme illimités, quand nous n'aurons pas expressément spécifié le contraire. Nous pouvons combiner ces éléments les uns avec les autres pour en constituer des formes composées, en regardant l'un quelconque d'entre eux comme le lieu (le support) d'un système des autres. Nous arrivons ainsi à ce qu'on appelle les *formes fondamentales* de la géométrie moderne. Mais avant de les définir, nous allons donner ci-après quelques considérations destinées à servir de préparation.

Quand nous considérons un objet, par exemple un bâtiment, chaque point (visible) envoie à notre œil un rayon auquel on donne le nom d'*image*, de *rayon perspectif* ou encore de *rayon de projection* de ce point. L'image ou la projection du bâtiment tout entier se compose donc d'un très grand nombre de rayons dont chacun *projette* de l'œil un ou plusieurs points. Si un certain nombre de points sont situés sur une droite ne passant pas par l'œil, tous leurs rayons de projection se trouvent dans le plan qu'on peut mener par l'œil et la droite; ou autrement, la droite sera projetée de l'œil suivant un plan qu'on appelle aussi l'image ou le *plan projetant* de cette droite. De même, en général, une courbe sera projetée suivant une surface conique. Nous pouvons avoir la configuration ou la représentation du bâtiment sur un plan au moyen d'une *section*, en coupant par ce plan chaque rayon de projection suivant un point et chaque plan projetant suivant une droite. Nous obtenons ainsi dans le plan, comme *section* ou *trace* du cône projectif, une image perspective, une *projection* du bâtiment. Cette projection envoie évidemment à l'œil les mêmes rayons que le bâtiment lui-même et par suite aussi elle est très bien de nature à nous fournir une représentation de ce dernier. On voit journellement de pareilles images perspectives planes d'objets de l'espace aux montres des photographes.

La majeure partie des lecteurs connaissent depuis longtemps ce mode de projection, sous le nom de *projection centrale*. Il sert de base à la science de la perspective et tous les autres systèmes de projection usités dans la *géométrie descriptive* peuvent être considérés comme des cas particuliers de celui-ci. Par exemple, pour que les rayons de projection soient parallèles, comme dans la projection orthogonale, nous n'avons qu'à supposer l'œil éloigné jusqu'à l'infini. De même les ombres que les objets déterminent sur des plans, quand ils sont éclairés par un point situé à distance finie ou infinie, ne sont évidemment que les projections de ces objets, le point lumineux venant seulement occuper la place de l'œil.

Faisant maintenant abstraction de toute considération d'optique, nous continuerons à nous servir encore des expressions que nous venons d'employer, *image*, *rayon*, *projection*, *section*, etc., en prenant à la place de l'œil un point quelconque S et à la place de l'objet déterminé, ou de la construction, un système quelconque Q de points et de droites dans l'espace. Ce système Q est de la sorte projeté du point S par un

système de rayons et de plans, à savoir chaque point par un rayon et chaque droite, ne passant pas S, par un plan. Le point S peut donc être considéré comme le *support* ou le lieu de tous ces rayons et de tous ces plans qui, pris ensemble, donnent l'image ou la projection du système. Supposons au contraire que nous ayons dans l'espace un système quelconque Σ de plans et de droites; un plan nouveau quelconque Σ le *coupera* suivant un système de droites et de points, chaque plan donnant en général une droite et chaque droite un point. Le plan Σ se présente alors à nous comme le *support* de toutes ces droites et de tous ces points qui dans leur ensemble constituent la *section* (la *trace*) du système Σ.

Nous pouvons aussi projeter d'une droite et avoir des sections par des droites. Chaque point situé en dehors d'une droite $g$ détermine avec $g$ un plan, ou bien est *projeté* de $g$ suivant un plan; de même aussi tout plan ne passant pas par $g$ est *coupé* par cette droite suivant un point. D'après cela, la droite se présente ainsi à nous, tantôt comme support de plans qui se coupent suivant elle, tantôt comme support de points situés sur elle.

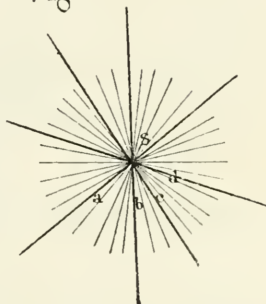
Ces considérations nous conduisent aux formes géométriques suivantes qu'on appelle *formes fondamentales* et qui occupent une place importante dans la géométrie moderne.

L'ensemble de tous les points situés sur une même droite s'appelle une *ponctuelle* (ou bien encore une *forme rectiligne*); les points de la droite considérés isolément sont les *éléments* de la ponctuelle. Nous regardons ces points comme rigidement liés les uns aux autres de telle sorte que leur situation relative demeurera invariable quand on déplacera la droite qui est leur support. Une portion de ponctuelle limitée par deux points constitue un *segment*.

L'ensemble de toutes les droites passant par un même point et situées dans un même plan s'appelle un *faisceau de rayons*, ou simplement un *faisceau*. Le point commun d'intersection des rayons prend le nom de *centre* du faisceau; chaque rayon indéfiniment prolongé de chaque côté du centre est un *élément* du faisceau. Nous supposons aussi qu'ici les éléments sont liés les uns aux autres d'une manière invariable. On peut à volonté considérer comme *support* ou *lieu* du faisceau soit le centre, soit le plan dans lequel se trouvent les rayons. Une portion de faisceau limitée par deux rayons considérés comme *côtés* constitue un *angle plan complet*. Il se compose de *deux angles plans simples* opposés

par le sommet. Si dans un faisceau quelconque S (fig. 5) on prend quatre rayons *a,b,c,d*, ils forment deux couples de rayons séparés les uns des autres. En effet *a* et *c* sont séparés l'un de l'autre par *b* et *d*, de telle sorte que dans le faisceau on ne peut passer de *a* à *c* sans franchir *b* ou *d*.

L'ensemble de tous les plans, illimités dans tous les sens, qui passent par une même droite sera appelé par nous *faisceau de plans* et la droite recevra le nom d'*axe* du faisceau. De même que dans les formes rectilignes, nous supposerons que les *éléments* du faisceau, c'est-à-dire ses plans, sont invariablement liés les uns aux autres de manière que leurs positions relatives ne puissent changer. Une portion du faisceau, limitée par deux plans considérés comme *faces*, s'appellera un *angle dièdre complet;* elle se compose de deux *dièdres simples* opposés par le sommet. Sur quatre éléments d'un faisceau, il y a aussi deux couples de plans séparés les uns des autres.

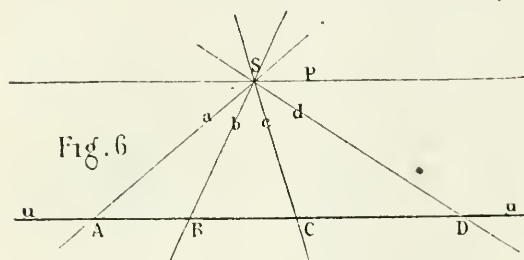



Quelquefois, quand il ne pourra pas y avoir d'équivoque, nous désignerons sous le nom de ponctuelle une forme se composant seulement des points isolés et des segments d'une droite. De même nous appellerons quelquefois faisceau une forme composée seulement d'éléments isolés et d'angles d'un faisceau. Mais il faut toujours bien se rappeler que, nous écartant des définitions ordinaires, nous avons considéré l'angle comme partie d'un faisceau.

*Les ponctuelles, les faisceaux de rayons et les faisceaux de plans prendront le nom de formes fondamentales simples ou de formes fondamentales de première espèce.* Nous aurons toujours à nous représenter les éléments d'une forme fondamentale simple, par exemple les plans d'un faisceau de plans, comme quelque chose de simple en soi-même, en faisant abstraction des formes (figures) dont ils peuvent être les supports ou les lieux. Dans les faisceaux de rayons, la compréhension de cette conception se trouve facilitée par ce fait que nous donnons justement le nom de *rayons* aux droites dont l'ensemble constitue le faisceau. Car sous le nom de *rayon*, on entend généralement une droite considérée pour elle-même et indépendamment des points qu'elle renferme ou des plans dont elle peut être l'intersection. Pour les plans,

il nous manque malheureusement une seconde dénomination qui corresponde à la précédente.

Nous pouvons aussi nous représenter une quelconque des formes de première espèce comme engendrée au moyen de chacune des autres. Ainsi une ponctuelle ABCD (fig. 6) est projetée d'un point quelconque S situé en dehors d'elle suivant un faisceau de rayons *abcd*, dont cette ponctuelle est une section. De même la ponctuelle ADCB est projetée suivant le faisceau *adcb*. Un faisceau quelconque de plans $\alpha\beta\gamma\delta$ est coupé par un plan quelconque ne passant pas par l'axe suivant un faisceau de rayons dont le centre est sur l'axe; et tout faisceau de rayons est projeté d'un point quelconque situé en dehors de son plan suivant un faisceau de plans. Enfin si une droite ne rencontre pas l'axe d'un faisceau de plans, elle coupe ce faisceau suivant une ponctuelle, chaque plan du faisceau donnant un point de la ponctuelle; et toute ponctuelle se projette d'un axe qui ne se trouve pas dans un même plan avec elle suivant un faisceau de plans. Ces considérations nous autorisent ainsi à regarder les ponctuelles, les faisceaux de rayons et de plans comme des formes fondamentales de même espèce, de la première espèce; car nous pouvons d'après cela concevoir qu'une ponctuelle contient autant de points qu'un faisceau renferme de rayons ou de plans.




*Nous avons deux formes fondamentales de seconde espèce; ce sont : le système plan et la gerbe de rayons.* Nous donnons le nom de *système plan* à l'ensemble de tous les points et de toutes les droites contenues dans un même plan; ce plan lui-même est le *support* ou le *lieu* du système. D'après cela, un système plan contient comme élément non seulement des points et des rayons, mais encore une infinité de ponctuelles et de faisceaux de rayons; car tous les points du système qui sont sur une même droite constituent par leur ensemble une ponctuelle; et de même tous les rayons du système qui passent par un même point forment un faisceau. C'est donc avec juste raison que nous considérons le système plan comme une forme fondamentale d'espèce supérieure à

la première. Nous donnons le nom de *gerbe de rayons* à l'ensemble de tous les rayons et de tous les plans qu'on peut imaginer passer par un point de l'espace considéré comme centre. Comme éléments, la gerbe contient non seulement des droites et des plans, mais encore un nombre infini de faisceaux de rayons et de plans. Car tous les plans de la gerbe qui passent par un seul et même axe forment un faisceau de plans; et de même tous les rayons qui sont dans un seul et même plan forment un faisceau de rayons. Ainsi la gerbe est bien réellement une forme fondamentale d'espèce supérieure aux formes élémentaires. Le nom de *gerbe*, qui doit rappeler à l'esprit une multiplicité d'ordre plus élevé que le *faisceau*, est dû à Von Staudt; il est très heureusement choisi. Mais nous avons aussi bien le droit d'appeler la forme en question *gerbe de plans* que *gerbe de rayons*, parce qu'elle renferme comme éléments aussi bien des plans que des rayons.

A peine est-il nécessaire de faire remarquer à nouveau que, dans le système plan et dans la gerbe, les éléments qui les composent doivent être supposés invariablement liés les uns aux autres et d'une manière rigide, de telle sorte que dans la gerbe, par exemple, la position respective des rayons, plans et faisceaux les uns par rapport aux autres ne changera pas quand on déplacera d'une manière quelconque le centre qui est le lieu ou le support de la gerbe.

Nous devons nous représenter que dans une gerbe il y a autant de rayons et de plans que de points et de droites dans un système plan et nous sommes par suite en droit de considérer ces deux formes fondamentales comme étant de la même espèce, la seconde. Car nous pouvons concevoir la gerbe engendrée au moyen du système plan et réciproquement. En effet, projetons un système plan $\Sigma$ d'un point S qui ne fasse pas partie du système, de telle manière que tout point P de $\Sigma$ soit projeté de S suivant un rayon $\overline{SP}$ et que tout rayon de $\Sigma$ le soit suivant un plan; nous obtenons ainsi une gerbe S que nous nommerons une *image* ou *projection* du système plan $\Sigma$ et dont le système plan est une *section*. Pour rendre ces conceptions plus faciles, imaginons que $\Sigma$ soit un terrain plan, illimité, émaillé de couleurs variées, qui s'étend à nos pieds, et supposons que le point S, extérieur au système, soit notre œil. Chaque point du terrain envoie alors à notre œil un rayon lumineux, chaque droite donne naissance à un plan lumineux. Si nous concevons que ces rayons et ces plans soient illimités dans tous les sens, nous obtenons ainsi comme image ou projection du terrain une gerbe de

rayons et de plans. Nous pouvons de plus en conclure que chaque ponctuelle du système plan sera projetée de S suivant un faisceau de rayons, chaque faisceau de rayons suivant un faisceau de plans, chaque courbe suivant une surface conique appartenant à la gerbe, ou en d'autres termes, les images ou les projections d'une ponctuelle, d'un faisceau de rayons ou d'une courbe du système plan seront respectivement un faisceau de rayons, un faisceau de plans ou une surface conique de la gerbe. De même chaque segment se projettera suivant un angle plan, chaque angle plan suivant un dièdre, etc. Inversement, considérons la gerbe comme le système primitif et imaginons que son centre soit un point lumineux qui émette des rayons lumineux colorés dans toutes les directions; le système plan peut alors être regardé comme une section de la gerbe. Car chaque rayon de la gerbe donnera un point du système plan, chaque plan une droite, chaque faisceau de rayons une ponctuelle et chaque faisceau de plans un faisceau de rayons.

Enfin nous avons *une seule forme fondamentale de troisième espèce*, c'est le *système de l'espace* ou l'*espace indéfini* à 3 dimensions avec tous les points, droites et plans qu'il contient. L'espace renferme aussi comme éléments un nombre infini de formes fondamentales de première et de deuxième espèce ; car chaque plan de cet espace est le lieu ou le support d'un système plan, chaque point le centre d'une gerbe, chaque droite le lieu d'une ponctuelle et l'axe d'un faisceau de plans.

A chacune des six formes fondamentales que nous venons ainsi de définir correspond une géométrie particulière. On nous accordera aisément qu'il peut aussi bien y avoir une géométrie de la gerbe qu'une géométrie du système plan. Car pour chaque forme géométrique plane, nous pouvons construire une forme correspondante dans le système de la gerbe, en projetant le système plan d'un point qui lui soit extérieur. Et les théorèmes qu'on aura pu établir pour les formes ou figures planes seront susceptibles d'une certaine manière de s'étendre à leur projection dans la gerbe. Nous aurons occasion de faire un fréquent usage de cette méthode. Il est peut-être plus difficile de concevoir qu'il puisse aussi y avoir une géométrie des formes fondamentales simples, par exemple de la ponctuelle ou des points d'une droite. Il suffira cependant pour s'en convaincre de se rappeler le théorème sur les quatre points harmoniques qu'on a fait connaître dans l'introduction. Ainsi qu'on l'a énoncé comme chose effective, étant donnés trois points sur une droite, la po-

sition du quatrième point harmonique se trouve déterminée à l'avance. Nous rappelons également ce théorème que quatre rayons d'un faisceau déterminent deux couples de rayons séparés, pour montrer qu'on peut dans tous les cas parler d'une géométrie des formes fondamentales élémentaires sans avoir besoin de faire intervenir les propriétés métriques.

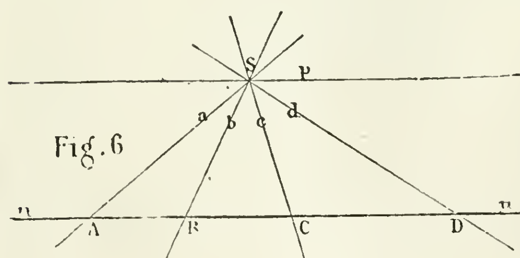
Les développements qui précèdent nous permettent maintenant de préciser en peu de mots l'objet principal de la géométrie de position. Elle traite des six formes géométriques fondamentales et de leurs rapports mutuels.

---

# DEUXIÈME LEÇON

**Éléments à l'infini. — Relations des formes fondamentales entre elles.**

Dans la géométrie des anciens, on dit que deux droites sont parallèles entre elles quand elles sont dans un même plan et n'ont aucun point commun. On dit de même que deux plans ou qu'un plan et une droite sont parallèles quand aucun point de l'un n'est commun avec l'autre. La géométrie moderne envisage le parallélisme d'une autre manière et nous allons nous occuper immédiatement de faire connaître cette conception différente ou définition nouvelle que V. Staudt a nommée définition perspective. Nous y sommes conduits directement en déduisant les formes fondamentales les unes des autres et en considérant l'une comme section ou comme projection de l'autre.




Si une droite $u$ (fig. 6) est située dans le même plan qu'un faisceau de rayons S, mais ne passe pas par son centre, elle le coupe suivant une ponctuelle ; c'est-à-dire que chaque rayon $a$, $b$, $c$,... de S est rencontré par $u$ en un point A, B, C, situé sur cette ligne. Si un rayon, tournant dans un sens déterminé $a$ $b$ $c$ autour de S, décrit le fais-

ceau S, sa trace sur la droite $u$ décrit en même temps la ponctuelle $u$ dans le sens A B C ; le point d'intersection partant de A marche vers B, le dépasse en s'éloignant toujours jusqu'à l'infini, puis revient de l'infini par le côté opposé jusqu'à ce qu'il ait repris sa position primitive. Suivant la manière dont l'entendaient les géomètres anciens, lorsque la droite mobile est dans la position particulière $p$, où elle est parallèle à $u$, elle ne coupe plus cette droite ; de sorte que, par suite de ce cas d'exception, nous ne pouvons plus dire d'une manière générale que toute droite qui est dans un même plan avec $u$ a toujours avec elle un point commun. Dans la géométrie moderne, on se débarrasse de cette exception en assignant encore à deux droites parallèles un point commun, à savoir un *point infiniment éloigné* ou *point à l'infini.*

D'après les notions de la perspective, une droite quelconque $u$ n'a du reste qu'un seul point à l'infini, parce que, conformément à un axiome d'Euclide, par un point donné S en dehors d'une droite $u$ on ne peut lui mener qu'une seule parallèle $p$; et on ne peut attribuer à cette parallèle plus d'un point commun avec $u$, parce qu'un autre rayon quelconque du faisceau S n'a qu'un seul point commun avec $u$. Cette conception nouvelle présente sur la manière de voir des anciens cet avantage essentiel qu'elle permet d'énoncer d'une manière entièrement générale beaucoup de théorèmes dans lesquels il faudrait sans cela introduire des exceptions, et que bien des théorèmes différents en apparence peuvent maintenant être réunis sous un même énoncé. La géométrie analytique nous a du reste familiarisés avec ces considérations ; dans cette science, on a aussi l'habitude de dire que deux droites situées dans un même plan sont parallèles quand les coordonnées de leur point d'intersection sont infiniment grandes et quand par suite ce point lui-même se trouve à distance infinie.

Nous arrivons au point à l'infini d'une droite quand nous imaginons qu'un point se meut toujours dans le même sens sur cette droite, soit dans une direction, soit dans l'autre. Le point à l'infini se trouve donc à la fois de part et d'autre de la droite, aussi bien d'un côté que de l'autre, et la droite se présente à nous comme une ligne fermée dont les deux côtés se réunissent au point à l'infini. Nous sommes forcément conduits à cette conclusion du moment que nous admettons l'idée, justifiée ci-dessus, que toute droite a un point à l'infini, et un seul. Nous verrons plus loin que nous devrons de la même manière considérer les deux branches d'une hyperbole comme réunies à l'infini. L'analyse conduit

aux mêmes résultats en montrant dans de nombreux exemples qu'on peut passer du positif au négatif non seulement par zéro, mais aussi par l'infini.

Comme, d'après ce qui précède, nous pouvons sur une droite aller d'un point à un autre en passant par le point à l'infini, nous avons maintenant ce théorème général : *Sur quatre points d'une ponctuelle, deux couples seulement sont séparés l'un de l'autre;* de même que sur quatre éléments d'un faisceau il n'y a que deux couples séparés l'un de l'autre. Et de même qu'un faisceau est divisé par deux de ses éléments en deux angles complets (angles adjacents), de même une forme rectiligne est divisée par deux de ses points en deux segments dont chacun s'appelle le *complément* de l'autre. L'un de ces deux segments renferme le point à l'infini de la droite quand ce point ne constitue pas lui-même l'un des points limites des segments.

Pour distinguer le point à l'infini d'une droite des points situés à distance finie sur cette droite, on appelle le premier point *impropre* et les autres points *propres*. La nouvelle acception qu'on vient de donner pour le parallélisme devrait aussi mériter l'épithète d'*impropre*. Toutes les parallèles qu'on peut mener dans un plan suivant une direction donnée n'ont en commun qu'un seul point à l'infini ou point impropre ; c'est celui qu'une quelconque d'entre elles a en commun avec les autres. Ces parallèles peuvent donc être regardées comme formant un faisceau dont le centre est un point à l'infini dans le plan et auquel nous donnerons à l'avenir le nom de faisceau de rayons parallèles, quand il y aura intérêt à le distinguer des autres faisceaux de rayons. De même aussi par gerbe de rayons parallèles il faudra entendre l'ensemble de tous les rayons parallèles, de direction déterminée, possibles dans l'espace et de tous les plans qui passent par eux. Nous ferons aussi remarquer que les deux énoncés suivants : *les droites parallèles ont même direction* et *elles contiennent le même point à l'infini*, expriment la même chose. Chaque direction détermine un point à l'infini, et réciproquement tout point impropre détermine une direction dans l'espace, de même que toute droite propre détermine une direction et un point à l'infini, celui qui se trouve sur elle.

Nous admettons que tous les points à l'infini d'un plan sont sur une même ligne à l'infini ou ligne *impropre*. Cette ligne doit être considérée comme une droite, parce que toute ligne propre du plan ne la coupe qu'en un seul point, le point à l'infini sur cette droite, tandis que les

lignes courbes peuvent avoir plus d'un point commun avec une droite. Cette manière de voir a encore une autre raison : c'est ce fait que, d'après les notions de la perspective, deux plans parallèles doivent avoir en commun tous leurs points à l'infini. Si en effet un troisième plan les coupe suivant deux droites propres, ces droites ne peuvent se rencontrer suivant aucun point propre ; et, puisqu'elles sont dans un même plan, elles sont aussi parallèles et par suite elles ont en commun un point infiniment éloigné appartenant aux deux plans. On démontre de cette manière que tout point à l'infini d'un plan se trouve aussi sur l'autre. Mais, comme en général deux plans qui se coupent n'ont en commun qu'une seule ligne droite, on ne peut attribuer aussi à deux plans parallèles qu'une seule droite commune.

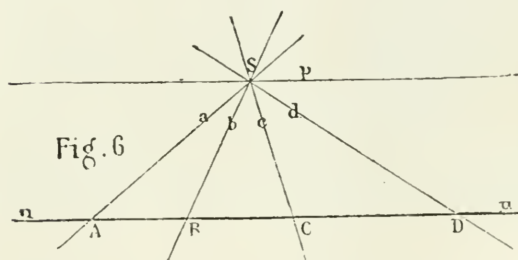
Nous avons dit que les droites parallèles ont même *direction;* de même nous dirons aussi que les plans parallèles ont même *position;* et de même que sur chaque direction il y a un point à l'infini, de même dans chaque position il y a une droite à l'infini. Comme tous les plans parallèles qu'on peut imaginer menés suivant une même position dans l'espace passent par une seule et même droite à l'infini, celle suivant laquelle un quelconque de ces plans est coupé par les autres, on peut regarder des plans parallèles comme formant un faisceau de plans dont l'axe est une droite à l'infini et auquel on donnera le nom de faisceau de plans parallèles.

Nous admettons que tous les points à l'infini et toutes les lignes à l'infini de l'espace se trouvent sur une surface infiniment éloignée ou surface impropre qu'on peut considérer comme un plan, parce qu'elle est coupée par une droite propre quelconque en un point seulement et par un plan propre quelconque suivant une droite. Ce plan à l'infini ou plan *impropre* est commun à toutes les gerbes de rayons parallèles et à tous les faisceaux de plans parallèles, parce qu'il passe par les centres des premiers et par les axes des seconds. De même dans chaque plan la droite à l'infini est un rayon commun à tous les faisceaux de rayons parallèles contenus dans ce plan parce qu'elle passe par leurs centres. On ne peut donc assigner aucune direction déterminée à la droite à l'infini d'un plan, mais elle contient la direction (le point à l'infini) de toute droite du plan.

Les relations qu'on peut établir entre les formes fondamentales mettent encore mieux en lumière les éléments à l'infini ou éléments impropres. On dit que deux formes sont *rapportées* l'une à l'autre quand

à chaque élément de l'une correspond un élément de l'autre et quand à une série d'éléments se suivant d'une manière continue dans l'une correspond une série d'éléments se suivant d'une manière continue dans l'autre. Deux éléments ainsi rapportés l'un à l'autre s'appellent *éléments correspondants* ou *éléments homologues*. *Si deux formes fondamentales sont rapportées à une troisième, elles sont aussi rapportées entre elles*. En effet, à chaque élément de la troisième correspond un élément de chacune des deux autres formes et par conséquent les deux éléments de celles-ci sont aussi rapportés entre eux ou sont correspondants.

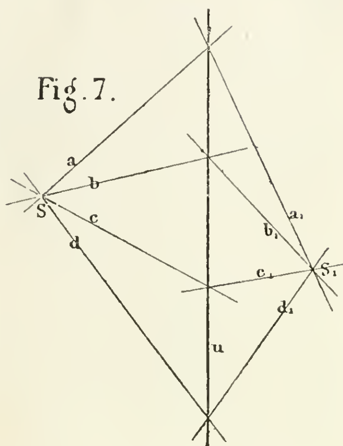
On rapporte deux formes d'espèce différente l'une à l'autre de la manière la plus simple et la plus claire en regardant ou déduisant l'une d'elles comme une section ou une projection de l'autre. Si, par exemple (fig. 6), un faisceau de rayons S et une ponctuelle $u$ ne passant pas par son centre sont dans un même plan, nous pouvons faire correspondre à chaque rayon le point de la ponctuelle qui se trouve sur lui. Au rayon $p$ de S correspond ainsi le point à l'infini de $u$. Si l'on regarde un système plan $\Sigma$ comme une section

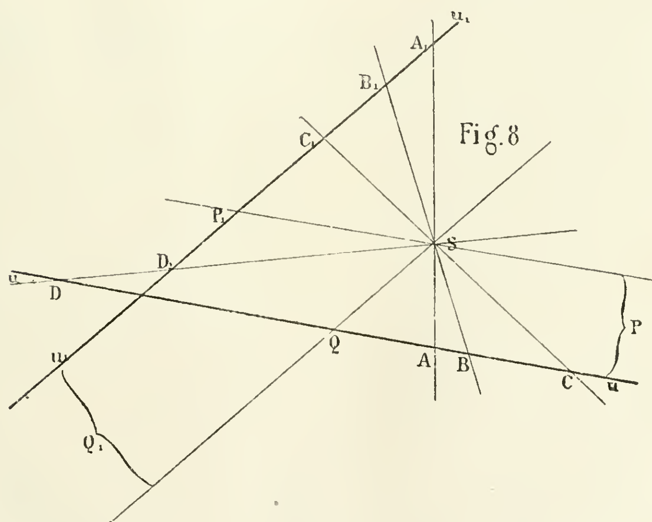



d'une gerbe dont le sommet est en dehors de $\Sigma$, S et $\Sigma$ sont alors rapportés l'un à l'autre de telle manière qu'à chaque point de $\Sigma$ correspond le rayon de S qui passe par lui et à chaque droite de $\Sigma$ le plan de S qui passe par elle. Au plan de S parallèle à $\Sigma$ correspond ainsi la droite à l'infini de $\Sigma$; et chaque rayon de S contenu dans ce plan aura pour correspondant le point de $\Sigma$ situé à l'infini dans cette direction. A chaque faisceau de plans dans S correspond le faisceau de rayons suivant lequel il coupe $\Sigma$; ce dernier faisceau se composera de droites parallèles, si l'axe du faisceau de plans est parallèle à $\Sigma$. Si S est une gerbe de rayons parallèles, dont le centre soit conséquemment à l'infini, à chaque point propre de $\Sigma$ correspondra un rayon propre de S et à chaque élément impropre du premier système correspondra un élément impropre du second. Si $\Sigma$ est le plan à l'infini et S un point propre, à chaque rayon de S correspond son point à l'infini, à chaque plan sa droite à l'infini, à chaque faisceau de rayons une ponc-

tuelle à l'infini et à chaque faisceau de plans un faisceau de rayons à l'infini.

Deux formes fondamentales de même espèce peuvent être rapportées entre elles de la manière la plus simple, en les considérant comme les sections ou les projections d'une seule et même forme fondamentale. Ainsi dans deux faisceaux de rayons ou dans deux ponctuelles, qui sont les sections d'un seul et même faisceau de plans, deux droites ou deux points se correspondent quand ces éléments sont situés dans le même plan du faisceau. D'autre part, on peut rapporter très facilement entre eux deux faisceaux de rayons S et $S_1$ (fig. 7), de manière qu'ils soient les projections d'une seule et même ponctuelle $u$, et qu'ainsi les rayons $a$ et $a_1$, $b$ et $b_1$, $c$ et $c_1$, c, qui passent deux à deux par le même point de la ponctuelle, soient deux éléments correspondants. Quand deux ponctuelles $u$ et $u_1$, situées




dans le même plan, sont considérées comme les sections d'un même faisceau de rayons S (fig. 8), il est digne de remarque qu'au point à l'infini P ou $Q_1$ de l'une correspond en général un point propre $P_1$ ou Q de l'autre.

Deux systèmes plans sont rapportés entre eux quand ils sont les sections d'une seule et même gerbe. Par exemple, une surface étendue de terrain plan et la figure perspective qu'on obtient en coupant son image ou son cône projectif passant par l'œil par un plan quelconque, par exemple, par un plan vertical, sont rapportées entre elles de telle manière que deux points appartenant l'un au terrain, l'autre à la figure perspective, se correspondent quand ils se trouvent sur un même rayon de la gerbe passant par l'œil, quand par suite ils sont avec l'œil sur une même ligne droite. A chaque droite du terrain correspond une droite de la figure perspective, et les deux droites sont dans un même plan avec l'œil. A la droite à l'infini du terrain (à la ligne d'horizon) correspond en général une droite propre, et c'est encore là une raison pour regarder la ligne à l'infini d'un plan comme une droite. Quand deux systèmes plans sont rapportés entre eux de la manière qu'on vient d'indiquer, on dit aussi que l'un est une *projection* de l'autre, et le centre de la gerbe qui est en même temps l'image ou le cône projectif des deux systèmes s'appelle alors le *centre de projection*. Quand le centre est à l'infini, et quand par suite la gerbe est une gerbe de rayons parallèles, ce genre de projection devient le système de projection parallèle ordinaire de la géométrie descriptive.

On peut aussi rapporter deux gerbes l'une à l'autre en les regardant comme les perspectives ou les images d'un seul et même système plan. Chaque rayon d'une des gerbes coupe alors le rayon correspondant de l'autre en un même point du système plan ; de même deux plans homologues des gerbes ont pour ligne d'intersection une droite du système plan. Les perspectives d'une seule et même étendue de terrain prises de deux points différents donnent deux gerbes de cette sorte.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner par lui-même d'une manière plus approfondie la question de la correspondance de deux formes fondamendales ; nous ferons seulement remarquer que les formes fondamentales peuvent être rapportées les unes aux autres d'une infinité de manières. Ainsi, par exemple, deux systèmes plans peuvent être rapportées entre eux, en les rapportant à un seul et même troisième système. Pour nous servir d'un exemple dont nous avons déjà souvent fait usage, nous pouvons imaginer que de deux points différents pris comme centres de projection on ait construit les figures perspectives d'un même terrain. Deux figures ou deux systèmes plans ainsi obtenus sont alors rapportés entre eux, puisque chacun d'eux est rap-

porté au terrain ; et en effet deux quelconques de leurs points sont correspondants, puisqu'ils sont tous deux la projection du même point du terrain. A une droite de l'une des figures correspondra toujours une droite de l'autre. Toutefois deux systèmes plans de ce genre n'ont plus en général l'un par rapport à l'autre la situation particulière qu'on a définie ci-dessus, à savoir que deux lignes correspondantes sont dans un même plan et que les lignes qui joignent deux points correspondants se coupent toutes en un même point bien déterminé. Nous aurons dans la suite à examiner de plus près les relations qui existent entre deux pareils systèmes plans. Deux systèmes peuvent encore être rapportés l'un à l'autre de telle sorte qu'à une droite de l'un corresponde une courbe de l'autre ; ou bien encore qu'à chaque point de l'un corresponde une droite de l'autre et que réciproquement à chaque droite du premier corresponde un point du second. Quant à présent, nous laissons à l'imagination des lecteurs le soin d'inventer ou de se représenter les relations si nombreuses qu'on peut établir entre les formes fondamentales.

---

# TROISIÈME LEÇON.

**Loi de réciprocité ou de dualité. — Polygones, multilatères, polyèdres, etc., simples et complets.**

Avant de faire connaître complètement les relations qu'on peut établir entre les formes fondamentales de la géométrie moderne, nous devons attirer l'attention sur une loi géométrique qui occupera une place importante dans nos leçons, car elle facilite d'une manière extraordinaire l'étude de la géométrie de position en divisant en deux parties le champ si vaste que présente cette science et en mettant ces parties en regard l'une de l'autre, de telle manière que l'une se déduit immédiatement de l'autre. Cette loi s'appelle la *loi de réciprocité* ou *de dualité*. Quoiqu'elle ne puisse pas toujours s'appliquer d'une manière exacte dans la géométrie métrique, les lecteurs ont rencontré déjà bien des théorèmes qui s'y rattachent justement ; et il suffira de les leur rappeler pour leur faire connaître cette loi. Ainsi, dans l'espace, le point et le plan se présentent comme deux éléments *réciproques* l'un à l'autre, de telle sorte que chaque théorème de la géométrie de position trouve son complément dans un autre théorème qu'on déduit du premier en échangeant entre elles les expressions point et plan et conséquemment aussi ponctuelles et faisceaux de plans, segments et dièdres, etc. En général, deux propositions réciproques de ce genre sont placées en regard l'une de l'autre comme les deux faces d'un même théorème, par exemple :

| | |
|---|---|
| Deux points A et B déterminent une droite $\overline{AB}$, qui est la ligne qui les joint. | Deux plans $\alpha$ et $\beta$ déterminent une droite $\overline{\alpha\beta}$, qui est leur ligne d'intersection. |
| Une droite *a* et un point B non situé sur elle déterminent un plan | Une droite *a* et un plan $\beta$ qui ne passe pas par elle déterminent |

$\overline{aB}$ qui passe par la droite et le point.

Trois points A, B, C, non situés sur une même droite, déterminent un plan ABC (leur plan de jonction).

Deux droites *a* et *b* qui ont un point commun sont dans un même plan $\overline{ab}$.

un point *a* β qui est situé sur la droite et le plan.

Trois plans α, β, γ, qui ne passent pas par une même droite, déterminent un point α β γ (leur point d'intersection).

Deux droites *a* et *b* qui sont dans un même plan ont un point *ab* commun.

On remarquera déjà en passant dans ces quelques théorèmes combien est utile dans la géométrie l'introduction des éléments à l'infini, ou éléments impropres. Sans cela nous n'aurions pas pu énoncer toutes ces propositions dans toute leur généralité et nous aurions dû en mettre à part quelques cas particuliers pour en former des exceptions. Par exemple, la première proposition à droite aurait dû s'énoncer comme il suit : « Deux plans α et β déterminent une droite ou sont parallèles ». Dans notre nouvelle manière d'envisager les choses, nous avons encore une droite dans la dernière hypothèse : c'est la droite à l'infini dans les plans. De même, dans la première proposition à gauche, il aurait fallu distinguer plusieurs cas, selon que les deux points donnés sont des points propres ou impropres. Nous aurions dû l'énoncer ainsi : « Une droite est déterminée par deux points (propres) ou par un point et une direction », tandis qu'actuellement, au point de vue perspectif, le second cas se trouve tout simplement ramené au premier parce que, par point donné, on entend un point à distance finie ou infinie. Chacun des autres énoncés donne lieu aux mêmes observations.

Ces propositions conduisent aux problèmes suivants (du premier degré) que dans l'avenir nous considérerons comme toujours susceptibles d'être résolus :

Par deux points mener une droite.

Par une droite et un point situé en dehors d'elle mener un plan.

Par trois points mener un plan.

Trouver la ligne d'intersection de deux plans.

Étant donné une droite et un plan qui ne passe pas par elle, trouver leur point d'intersection.

Trouver le point d'intersection de trois plans.

Mener un plan par deux droites qui se coupent.

Trouver le point d'intersection de deux droites situées dans un même plan.

Comme exercice, nous ajoutons encore quelques propositions doubles très usitées. Nous conseillons aux lecteurs, étant donné la première partie de la proposition double, de rechercher eux-mêmes la seconde partie, qui est réciproque de la première.

Étant donné quatre points A,B, C,D, si les lignes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ se coupent, les points sont dans un seul et même plan et par suite aussi les droites $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$, doivent se couper.

Étant donné quatre plans $\alpha$,$\beta$, $\gamma$,$\delta$, si les lignes d'intersection $\overline{\alpha\beta}$ et $\overline{\gamma\delta}$ se coupent, les plans passent par un seul et même point et par suite les lignes $\overline{\alpha\gamma}$ et $\overline{\beta\delta}$, $\overline{\alpha\delta}$ et $\overline{\beta\gamma}$, se coupent aussi.

Si des droites en nombre quelconque se coupent deux à deux, mais

ne passent pas toutes par un même point, elles se trouvent toutes dans un même plan.

ne se trouvent pas toutes dans un même plan, elles passent toutes par un même point.

Souvent un théorème est son réciproque à lui-même, si le point et le plan y figurent d'une manière symétrique.

Soit, par exemple, à résoudre le problème suivant : « Par un point donné d'un plan, mener dans ce plan une droite rencontrant une droite donnée qui n'est pas située dans le plan et qui ne passe pas par le point. » On a ici deux solutions qui sont réciproques l'une de l'autre.

Ou bien on joint le point donné avec le point d'intersection de la droite et du plan.

Ou bien par la droite et le point donnés on mène un plan et on cherche son intersection avec le plan donné.

A ce problème on peut facilement ramener les suivants :

Par un point donné, mener une

Dans un plan donné, mener une

droite qui coupe deux autres droites non situées dans un même plan avec le point.

On fait passer un plan par le point donné et une des droites données,

droite qui coupe deux droites données n'ayant pas un seul et même point commun avec le plan.

On détermine le point d'intersection d'une des droites avec le plan donné,

et le problème est alors ramené au précédent.

Le problème « mener une droite qui coupe trois droites données » est aussi réciproque à lui-même. On peut, ou bien prendre un point sur une des droites, ou bien mener un plan par elle; en se reportant aux données du problème double qui précède, on peut alors chercher une droite qui passe par ce point ou qui soit dans ce plan et qui coupe les deux autres droites données.

Les formes fondamentales peuvent aussi être placées les unes en face des autres comme formes réciproques : c'est, par exemple, ce qui a lieu pour le système plan et la gerbe, parce que leurs supports ou lieux, qui sont respectivement le plan et le point, sont réciproques l'un de l'autre. D'après cela les éléments ou formes réciproques sont respectivement :

dans le système plan :

Le point; la ponctuelle; le rayon considéré comme ligne de jonction de points; le faisceau de rayons, etc.

et dans la gerbe :

Le plan; le faisceau de plans; le rayon considéré comme intersection de plans; le faisceau de rayons, etc.

Ici comme dans bien des propositions précédentes, on aura dû être frappé de cette remarque que la droite dans l'espace (ou le rayon) est réciproque à elle-même. Elle occupe en réalité une situation intermédiaire entre les éléments points et plans qui sont réciproques. Comme exemple d'une proposition double, où le système plan et la gerbe figurent comme formes réciproques, nous donnerons la suivante :

Si deux systèmes plans sont rapportés l'un à l'autre de telle manière qu'on les considère comme

Si deux gerbes sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'on les considère comme les

des sections d'une seule et même gerbe, les éléments qui se correspondent (points ou droites) dans les deux systèmes sont situés deux à deux sur un seul et même élément (rayon ou plan) de la gerbe. La ligne d'intersection des deux plans coïncide avec sa correspondante ou se correspond à elle-même ; il en est de même pour tout point situé sur cette droite. Les deux systèmes plans ont ainsi une ponctuelle *correspondante commune.*

projections d'un seul et même système plan les éléments correspondants (rayons ou plans) des gerbes passent deux à deux par un seul et même élément (point ou droite) du système plan. Le rayon commun aux deux gerbes qui réunit leurs centres coïncide avec son correspondant ou se correspond à lui-même ; il en est de même pour tout plan qui passe par ce rayon. Les deux gerbes ont ainsi un faisceau de plans *correspondant commun.*

En effet, si deux formes sont rapportées entre elles et si un élément de l'une coïncide avec l'élément qui lui correspond dans l'autre, c'est-à-dire est identique, on dit que « *les deux formes ont cet élément correspondant commun* ».

Dans l'espace le point et le plan sont des éléments réciproques l'un par rapport à l'autre ; il en est de même dans le plan pour le point et la droite, par suite aussi pour les ponctuelles et les faisceaux de droites, les segments et les angles, etc. ; il en est également de même dans les gerbes pour le rayon et le plan, le faisceau de rayons et le faisceau de plans, etc. Exemple :

$\alpha_1$. Deux points d'un plan déterminent une droite.

$\alpha_3$. Deux rayons d'une gerbe déterminent un plan.

$\alpha_2$. Deux droites d'un plan déterminent un point.

$\alpha_4$. Deux plans d'une gerbe déterminent un rayon.

Une courbe plane peut être regardée :

$\beta_1$. comme l'ensemble de tous les points situés sur elle.

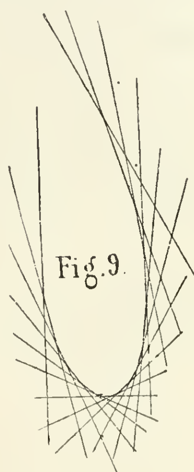
$\beta_2$. comme l'ensemble de toutes les tangentes qui l'enveloppent (fig. 9).

On verra que dans la géométrie moderne cette dernière manière de

concevoir les courbes est aussi souvent usitée que la première. De même (dans la gerbe) une surface conique peut être considérée :

| | |
|---|---|
| $\beta_3$. comme l'ensemble des rayons situés sur elle. | $\beta_4$. comme l'ensemble de tous les plans qui l'enveloppent (plans tangents). |

Sur quatre propositions correspondantes comme les précédentes, les deux qui se rapportent à la gerbe peuvent toujours se déduire des deux autres qui appartiennent à la géométrie du plan, en projetant le système plan par une gerbe issue d'un point quelconque. En règle générale, à l'avenir nous ne donnerons que les deux premières et nous laisserons au lecteur le soin de chercher lui-même les deux autres.


Fig. 9.

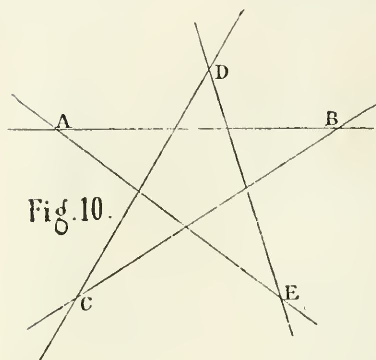
Dans l'espace où le point et le plan sont réciproques l'un de l'autre, la première et la quatrième proposition (comme $\alpha_1$ et $\alpha_4$), la deuxième et la troisième (comme $\alpha_2$ et $\alpha_3$), se présentent comme propositions réciproques.

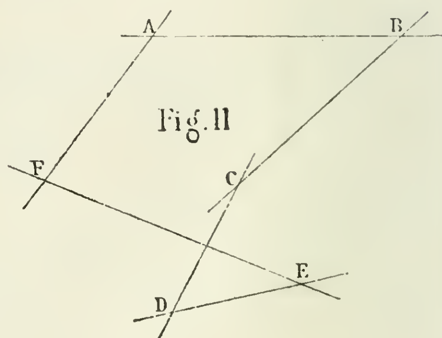
Dans la suite de nos études, la loi de réciprocité deviendra plus claire et plus familière ; toutefois, après une série de développements sur les formes fondamentales élémentaires, nous pourrons démontrer qu'elle a lieu d'une manière générale dans la géométrie de position, ou bien qu'à chacune de ses propositions il correspond effectivement une proposition réciproque. Jusqu'à ce que nous en soyons arrivés là, nous dirigerons nos leçons de telle manière que les propositions réciproques se trouvent en regard les unes des autres, et nous parviendrons ainsi à prouver que le dualisme en ressort clairement. Mais il est nécessaire à cet effet que nous fassions préalablement connaître encore quelques systèmes réciproques et que nous modifiions notamment quelques-unes des formes géométriques qui ont été transportées de la géométrie métrique dans la géométrie moderne.

Nous voulons parler spécialement ici de la notion de polygone (n-gone). En règle générale, dans la géométrie moderne on désigne sous le nom de *n-gone* non pas une portion de plan limitée de toutes parts par $n$ droites qui se coupent, mais bien un *système formé de* n *points*

*d'un plan et des* n *droites* (*ou côtés*) *dont chacune joint deux points* (*ou sommets*) *consécutifs*. Nous imaginons que les sommets sont rangés suivant un ordre de succession déterminé et nous admettons que trois d'entre eux consécutifs ne se trouvent jamais en ligne droite.

Le n-gone simple peut aussi s'appeler *n-latère* (*multilatère*) simple; un n-latère simple est en effet un système plan composé de $n$ droites (côtés) et des $n$ points d'intersection de ces droites prises successivement deux à deux. Le polygone et le multilatère sont deux conceptions réciproques; aux lignes qui joignent deux sommets non consécutifs (c'est-à-dire aux diagonales) dans un polygone simple correspondent les points d'intersection de deux côtés non consécutifs dans le multilatère. Dans la géométrie des anciens, où l'on comprend sous le nom de




polygone une portion limitée du plan, on exclut d'une manière générale les polygones à entre-croisements, comme le pentagone ABCDE (fig. 10) ou l'hexagone ABCDEF (fig. 11).

Dans la géométrie moderne, les polygones et multilatères ne donnent plus lieu à une pareille distinction, parce qu'on y suppose les côtés indéfiniment prolongés. Et au contraire, parmi les $2n$ éléments (sommets et côtés) d'un n-gone ou d'un n-latère simple, on dira que deux éléments sont *opposés l'un à l'autre* quand ils seront séparés l'un de l'autre, et dans un sens comme dans l'autre, par la moitié des éléments restants : ainsi d'une manière générale, le $m^e$ et le $n+m^e$ des éléments consécutifs seront opposés l'un à l'autre. Par exemple, dans le pentagone ABCDE (fig. 10) les éléments opposés sont un sommet et un côté, comme A et $\overline{CD}$, B et $\overline{DE}$, C et $\overline{EA}$, et ainsi de suite. Dans l'hexagone ou sexlatère ABCDEF (fig. 11), ce sont au contraire les

sommets qui sont opposés aux sommets et les côtés aux côtés, comme A et D, $\overline{AB}$ et $\overline{DE}$, B et E, $\overline{BC}$ et $\overline{EF}$, et ainsi de suite.

En outre des polygones et des multilatères simples, la géométrie moderne considère aussi les *polygones et multilatères complets*, et la loi de réciprocité y ressort encore d'une manière aussi évidente que dans les premiers.

Nous appelons en effet :

*Polygone plan complet*, un système formé de $n$ points du plan et de toutes les droites (côtés) qui les unissent deux à deux ; ou, ce qui revient au même, un polygone simple considéré avec toutes ses diagonales.

*Multilatère plan complet*, un système formé de $n$ droites du plan et de tous leurs points d'intersection (sommets) deux à deux; ou, ce qui revient au même, un multilatère simple considéré avec tous les points d'intersection de ses côtés.

Nous admettons dans tout ceci que dans le polygone trois sommets ne sont jamais sur une même ligne droite, et que dans le multilatère trois côtés ne passent jamais par un même point.

En chaque sommet se coupent $(n-1)$ côtés du polygone complet, et ces derniers passent par les $(n-1)$ autres sommets. Le polygone complet a donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ côtés.

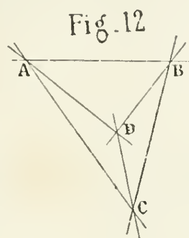
Sur chaque côté se trouvent $(n-1)$ sommets du multilatère complet ; les $(n-1)$ autres côtés passent par ces points. Le multilatère complet a donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ sommets.

On voit facilement que le polygone et le multilatère complet renferment respectivement plusieurs polygones et multilatères simples dès que $n$ est $> 3$. Par exemple :

Un quadrangle complet ABCD (*fig.* 12) a six côtés. Deux quelconques de ces côtés ne passant

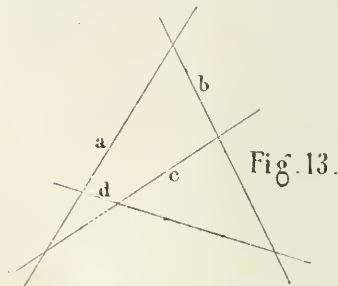
Un quadrilatère complet *abcd* (*fig.* 13) a six sommets. Deux quelconques d'entre eux non situés sur

pas par un seul et même sommet, comme AB et CD, ou AC et BD, ou enfin AD et BC, sont dits *côtés opposés* du quadrilatère ; de sorte




qu'il y a trois couples de côtés opposés. Le quadrangle complet renferme trois quadrangles simples ABCD, ACDB et ADBC, dont les côtés sont formés des couples de côtés opposés pris deux à deux.

un seul et même côté, comme *ab* et *cd*, ou *ac* et *bd*, ou enfin *ad* et *bc*, sont dits *sommets opposés* du quadrilatère ; de sorte qu'il




y a trois couples de sommets opposés. Le quadrilatère complet renferme les trois quadrilatères simples *abcd*, *acdb* et *abdc*, dont les sommets sont formés des couples de sommets opposés pris deux à deux.

Les formes qui correspondent dans la gerbe à ces formes planes se conçoivent de la manière la plus simple en imaginant que ces dernières soient projetées d'un point extérieur au plan qui les contient. Chaque polygone plan donne ainsi *un angle multarête* dans *la gerbe* et chaque multilatère un *angle polyèdre*. Ainsi nous appellerons d'après cela :

*Angle multarête* (*n-arête*) *complet*, un système de *n* rayons dans la gerbe, considéré avec tous les plans (faces qui les joignent entre eux) ; nous supposons que trois quelconques des rayons (ou des arêtes) ne sont jamais dans un même plan.

*Angle polyèdre* (*n-èdre*) *complet* dans la gerbe, un système de *n* plans considéré avec toutes les lignes d'intersection (arêtes) suivant lesquelles ils se coupent ; nous supposons que trois quelconques de ces plans (ou faces) ne passent jamais par une seule et même droite.

Il sera d'après cela très facile pour le lecteur de définir les angles

multarêtes et polyèdres *simples* et de trouver pour les formes de la gerbe les propriétés analogues aux formes planes. Nous terminerons cette longue série de définitions en faisant connaître les formes de l'espace analogues à celles qu'on a indiquées plus haut pour le plan.

*Un multarête* (*n-arête*) *complet* se compose de $n$ points (sommets) qui ne sont jamais quatre à quatre dans un même plan, des droites (arêtes) qui les joignent deux à deux et des plans (faces) qui les réunissent trois à trois.

*Un polyèdre* (*n-èdre*) *complet* se compose de $n$ plans (faces) qui ne passent jamais quatre à quatre par un même point, des droites (arêtes) suivant lesquelles ils se coupent deux à deux et des points (sommets) où ils se rencontrent trois à trois.

Le lecteur cherchera par lui-même le nombre des arêtes et des faces d'un multarête de l'espace et celui des arêtes et des sommets d'un polyèdre. Nous ferons seulement remarquer que dans l'espace le quadrarête et le tetraèdre ne sont pas plus différents entre eux que le triangle et le trilatère dans le plan. La proposition double qui suit montre aussi que la loi de réciprocité s'applique également bien au tétraèdre :

Les quatre sommets et les six arêtes d'un quadrarête (tétraèdre) sont projetés d'un point non situé sur une des faces suivant les quatre sommets et les six côtés d'un quadrangle complet.

Les quatre faces et les six arêtes d'un tétraèdre sont coupées par tout plan ne passant pas par un des sommets suivant les quatre côtés et les six sommets d'un quadrilatère complet.

On remarquera ici que dans l'espace le polygone ($n$-gone) complet se trouve être le réciproque du polyèdre ($n$-èdre) complet et le multilatère ($n$-latère) celui du multarête ($n$-arête), parceque le point, le plan, sont des éléments réciproques.

# QUATRIÈME LEÇON

**Relations entre les polygones, multilatères, multarêtes et polyèdres complets. — Systèmes harmoniques.**

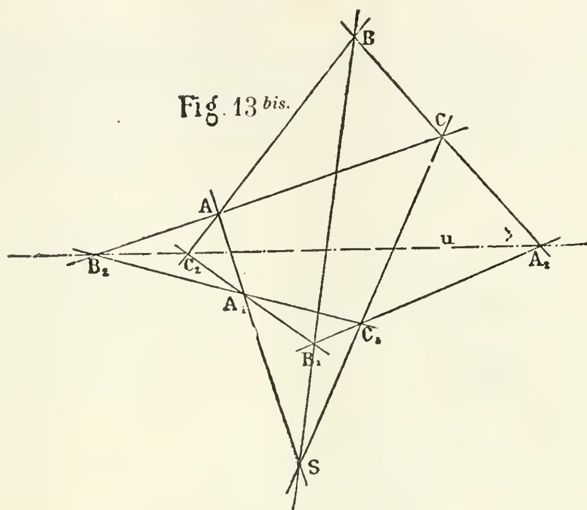
Dans les leçons qui précèdent, nous avons cherché à faire connaître les conceptions les plus importantes, les plus caractéristiques de la géométrie moderne. Ces définitions nombreuses, qui se rattachent les unes aux autres, ont peut-être un peu fatigué le lecteur ; il est cependant indispensable de les lui présenter dans leur ensemble afin de pouvoir aborder sans être arrêté à l'avenir le champ si riche et si vaste que nous ouvre la géométrie de position.

Nous allons maintenant arriver aux premiers théorèmes caractéristiques de la géométrie moderne ; car les propositions simples qu'on a énoncées jusqu'ici ont été données bien plus pour rendre plus claire et et plus complète l'intelligence d'idées nouvelles auxquelles on est peu familiarisé que parce qu'elles étaient absolument nécessaires pour servir de base à la géométrie de position.

Au contraire, nous devons considérer comme *théorèmes fondamentaux* les propositions sur les points, rayons et plans harmoniques, en un mot les propositions sur les formes harmoniques que nous allons faire connaître à l'instant.

Les propriétés des formes harmoniques, dont nous avons déjà fait mention dans l'introduction, peuvent se démontrer de la manière la plus facile à l'aide de quelques théorèmes simples sur les relations qui existent entre les $n$-gones, $n$-latères et $n$-arêtes (polygones, multilatères et multarêtes). De même que nous avons, dans ce qui précède, rapporté les formes fondamentales entre elles, de même nous pouvons dans les formes que nous considérons maintenant faire correspondre chaque

sommet, côté ou arête de l'une à un sommet, un côté ou une arête de l'autre. Par exemple, nous pourrons rapporter un quadrilatère à un autre quadrilatère en rapportant chaque sommet du premier à un



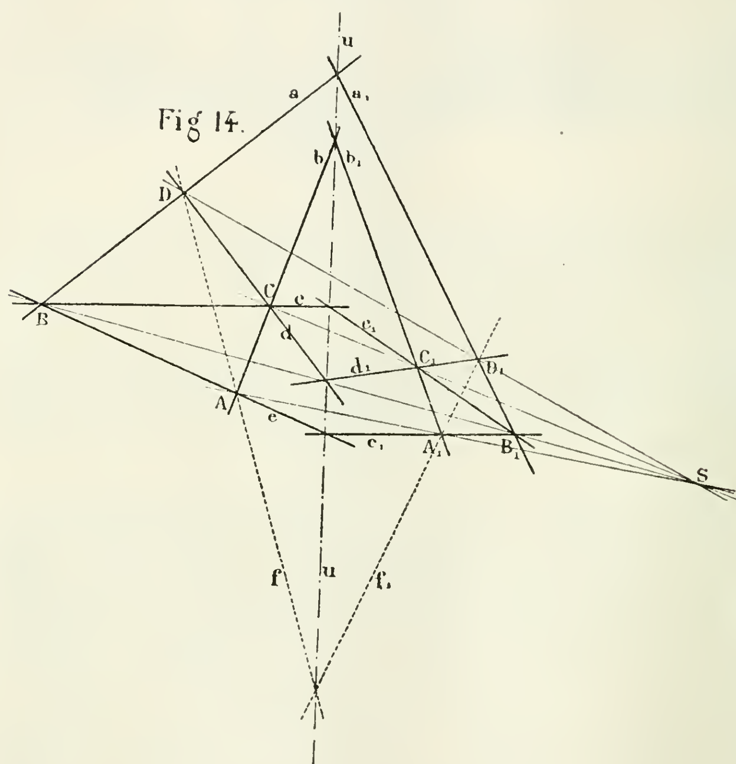

sommet du second; il est facile de voir qu'à chaque côté du premier correspondra alors un côté du second. On arrive de cette manière aux propositions suivantes qui sont évidentes :

Si deux triangles A, B, C et $A_1$, $B_1$, $C_1$ (fig. 13 bis) rapportés l'un à l'autre sont dans deux plans différents et si les côtés homologues, comme $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$, se coupent deux à deux (naturellement sur la ligne d'intersection des plans des deux triangles), les plans qui contiennent les trois couples de côtés correspondants déterminent un triarête dont les deux triangles sont des sections. Les lignes $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC}$, qui joignent les sommets homologues deux à deux se coupent alors en un même point, qui est le centre ou le sommet du triarête.

Si deux angles triarêtes (ou dans la gerbe, deux angles trièdres) rapportés l'un à l'autre appartiennent à des gerbes différentes, et si les arêtes homologues se coupent deux à deux, les trois points d'intersection déterminent un triangle dont les deux triarêtes sont les projections. Les lignes d'intersection des plans homologues (faces) deux à deux sont ainsi dans le plan du triangle, dont elles sont les côtés.

Rien n'est plus facile que de trouver la réciproque de chacune des parties de cette proposition double. Elle nous conduit à la proposition double qui suit :

Si deux quadrangles complets ABCD, et $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ (fig. 14), rapportés l'un à l'autre sont situés




dans des plans différents, dont la ligne d'intersection $u$ ne passe par aucun des huit points, et si cinq côtés $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, de l'un coupent sur $u$ les côtés $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, $e_1$, de l'autre qui leur correspondent, les deux quadrangles sont les sections d'un seul et même quadra-

Si deux angles tétraèdres complets rapportés l'un à l'autre appartiennent à des gerbes différentes dont le rayon commun ne se trouve dans aucune des huit faces et si cinq arêtes d'un des angles tétraèdres coupent les arêtes qui leur correspondent dans l'autre, les deux angles tétraèdres sont les projections d'un seul et même quadrilatère plan complet, et par suite

rête complet; par suite les deux autres côtés $f$ et $f_1$ se rencontrent aussi sur $u$.

En effet, d'après le théorème précédent, les lignes $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, se coupent en un même point, de même que les lignes $\overline{DD_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. Les droites $\overline{AA_1}$ et $\overline{DD_1}$ se rencontrent donc au point $s$ d'intersection de $\overline{BB_1}$ et $\overline{CC_1}$, centre du quadrarête considéré dans la proposition. Et comme les droites $f$ et $f_1$ sont dans le plan déterminé par $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$, elles doivent aussi se couper.

les deux autres arêtes se coupent aussi.

Les cinq arêtes d'un des angles tétraèdres, qui sont coupées par les arêtes correspondantes de l'autre, déterminent en effet deux angles trièdres qui font partie de l'angle tétraèdre, et, d'après le théorème précédent, leurs faces se coupent deux à deux suivant les trois côtés d'un triangle. Mais ces deux triangles ont deux côtés communs; ils sont donc dans un même plan et par suite ils déterminent le quadrilatère plan dont les deux angles tétraèdres sont les projections.

Pour ne pas trop nous attarder, nous allons laisser de côté la recherche des propositions que nous avons mises jusqu'ici dans la colonne de droite; et dans l'établissement de la théorie des formes harmoniques, nous n'indiquerons que les résultats de la colonne de gauche. En suivant cette marche, nous arriverons encore bien vite à des propositions qui sont réciproques les unes des autres comme les précédentes. Nous venons de trouver que :

*Étant donnés deux quadrilatères complets rapportés entre eux, si cinq couples de côtés homologues se coupent en des points d'une droite* u *qui ne passe par aucun des huit sommets, le point d'intersection des côtés appartenant à la sixième paire se trouve aussi sur la même droite.*

Ce théorème n'a pas lieu seulement pour le cas où les quadrilatères sont dans des plans différents. Car s'ils sont dans un même plan, nous pouvons ramener ce cas à celui que nous avons déjà traité en faisant tourner l'un des quadrilatères autour de la droite $u$ de manière à lui faire quitter le plan où il se trouvait tout d'abord, ou bien en le projetant d'un autre centre quelconque sur un second plan mené par $u$. Dans l'un et l'autre cas, on voit immédiatement que le sixième

côté du premier quadrilatère rencontre le sixième côté du second sur la droite $u$. Remarquons en passant que si la droite $u$ est la droite de l'infini, notre théorème peut s'énoncer comme il suit : Étant donnés deux quadrilatères rapportés l'un à l'autre, si cinq couples de côtés homologues sont parallèles, les deux côtés qui forment le sixième couple sont aussi parallèles.

Nous pouvons maintenant donner la définition suivante :

*On dit que quatre points, A, B, C, D, sont quatre points harmoniques ou forment une ponctuelle harmonique, s'ils sont par rapport à un quadrilatère dans une position telle que deux côtés opposés du quadrilatère se coupent au premier et au troisième point et que les deux diagonales passent par le second et le quatrième.*

Des propositions qui précèdent on déduit alors immédiatement ce théorème important :

*Étant donnés trois points A, B, C, d'une droite et leur ordre de succession, le quatrième harmonique D est complètement déterminé.*

En effet, on trouve D en construisant un quadrilatère quelconque KL$\overline{MN}$ (fig. 15) dont une diagonale $\overline{LN}$ passe par le second point B, dont deux côtés opposés $\overline{KL}$ et $\overline{MN}$ se coupent au premier point A et les deux autres côtés opposés $\overline{LM}$ et $\overline{KN}$ au point C; la seconde diagonale

$\overline{KM}$ passe par D. Si l'on construit un second quadrilatère $K_1$, $L_1$, $M_1$, $N_1$, qui soit par rapport à A, B, C dans la même situation que KLMN, d'après un théorème démontré plus haut (page 36), sa deuxième diagonale $K_1M_1$ (considérée comme sixième côté du quadrilatère complet $K_1$ $L_1$ $M_1$ $N_1$) doit aussi passer par le point d'intersection D de $\overline{KM}$ et de $\overline{ABC}$.

*Les points B et D, situés sur les diagonales, sont séparés l'un de l'autre par les points d'intersection A et C des deux couples de côtés opposés.*

En effet projetons les points A, B, C, D d'un centre quelconque sur une droite, les droites projetantes et par suite aussi les projections d'un couple de points séparés sont aussi séparées de celles de l'autre decouple. Soit maintenant Q (fig 15) le point d'intersection des diagonales $\overline{KM}$ et $\overline{LN}$ du quadrilatère KLMN ; KQMD est une projection de ABCD faite du point L et MQKD une autre projection faite du point N. Si donc A n'était pas séparé de C par les autres points, mais l'était de B par exemple, il faudrait que K fût séparé de Q d'une part et M de Q d'autre part, ce qui est impossible parce que Q ne peut être séparé que d'un seul des trois points K, M, D, par les deux autres. Si au contraire A était séparé de D, il faudrait que K fut séparé de D et en même temps M séparé de D, ce qui est également impossible. En conséquence A doit être séparé de C par les points B et D.

Si d'un point non situé dans le plan du quadrilatère complet (de notre œil, par exemple) nous projetons le quadrilatère suivant un angle quadrarête complet, les quatre points harmoniques seront projetés suivant quatre rayons qu'on désignera sous le nom de *rayons harmoniques, ou de faisceau harmonique de rayons*. Ces rayons jouissent de la propriété qu'un plan quelconque ne passant pas par leur centre les coupe suivant quatre points harmoniques $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Car un pareil plan coupe le quadrarête complet suivant un quadrangle dont deux côtés opposés se rencontrent en $A_1$, les deux autres en $C_1$, et dont les deux autres côtés passent respectivement par $B_1$ et $D_1$.

Si nous projetons quatre points harmoniques d'un axe non situé dans un même plan avec eux, nous obtenons *quatre plans harmoniques ou un faisceau harmonique de plans*. D'après ce qu'on a démontré ci-dessus, un cinquième plan quelconque qui contient les quatre points harmoniques coupe les quatre plans harmoniques suivant des rayons harmoniques ; il en est par suite de même de tout plan sécant quelcon-

que qui ne passe pas par l'axe du faisceau de plans harmoniques. Car un pareil plan coupe les quatre rayons harmoniques, résultant de la section par un quelconque des premiers plans, suivant quatre points harmoniques par lesquels passent ses propres intersections avec les plans harmoniques. Il résulte aussi de là que toute droite oblique par rapport à l'axe coupe les quatres plans suivant quatre points harmoniques. De même un faisceau harmonique de rayons sera projeté d'un point situé hors de son plan suivant un faisceau harmonique de plans. Nous pouvons énoncer d'une manière générale les propositions suivantes :

Quatre points harmoniques sont projetés d'une droite quelconque par quatre plans harmoniques et d'un point quelconque par quatre rayons harmoniques.

Quatre plans harmoniques sont coupés par une droite quelconque suivant quatre points harmoniques et par un plan quelconque suivant quatre rayons harmoniques.

Quatre rayons harmoniques sont

projetés d'un point quelconque par quatre plans harmoniques.

coupés par un plan quelconque en quatre points harmoniques.

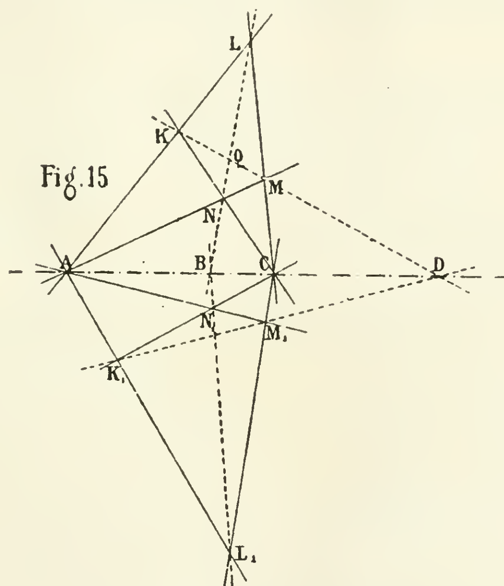
Ces différentes propositions peuvent se résumer dans l'important théorème suivant : *D'une forme fondamentale harmonique, on ne déduit toujours par projection ou section que des formes fondamentales harmoniques.* Nous voyons en même temps qu'étant donnés trois éléments d'une forme fondamentale élémentaire, le quatrième est complètement déterminé, si on désigne de plus quel est celui des premiers dont il est séparé par les deux autres. Car si les éléments donnés sont trois points d'une droite, le quadrilatère complet nous fournit le quatrième point harmonique. Si au contraire ce sont des rayons ou des plans d'un faisceau, nous les couperons par une droite et nous chercherons le quatrième harmonique aux trois points d'intersection. Et en même temps, nous résolvons par là même ce problème : étant donnés trois éléments d'une forme fondamentale élémentaire, construire le quatrième harmonique.

Les lecteurs reconnaîtront immédiatement l'exactitude des propositions suivantes :

Trois plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ d'un faisceau de plans sont coupés par une infinité de transversales quelconques; sur chaque transversale on cherche le quatrième harmonique aux trois points d'intersection qui est séparé par les deux autres du point de rencontre de cette droite avec C ; tous ces quatrièmes points sont dans un même plan $\delta$ harmonique aux trois autres et qui est séparé de $\beta$ par $\alpha$ et $\gamma$.

Trois points A, B, C d'une ponctuelle sont projetés d'une infinité d'axes quelconques ; pour chaque axe on construit le quatrième plan harmonique qui est séparé par les deux autres de celui qui passe B ; tous ces quatrièmes plans passent par un seul et même point D, qui est le quatrième harmonique à A, B, C et qui est séparé de B par A et C.

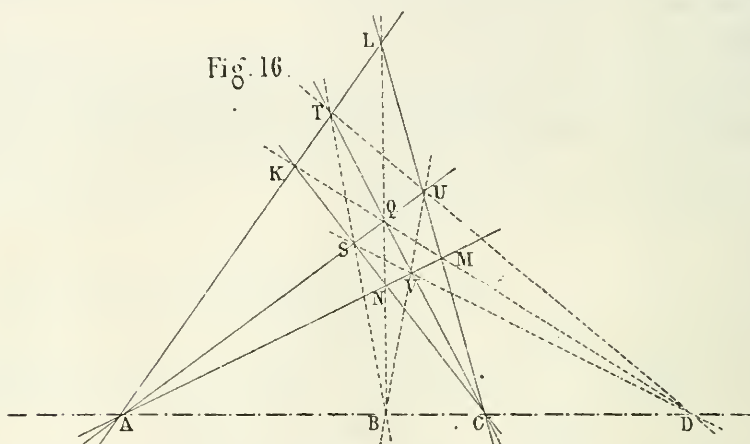
A la place de ces deux propositions qui sont réciproques l'une de l'autre pour les formes de l'espace, nous aurions pu facilement énoncer




deux théorèmes correspondants dans lesquels des faisceaux de rayons auraient remplacé les faisceaux de plans. On obtient de même deux propositions analogues pour la gerbe.

En indiquant comment on détermine quatre points harmoniques A, B, C, D ( fig 15 ) au moyen du quadrilatère KLMN, nous avons fait une distinction entre les deux points A et C où se coupent les côtés opposés du quadrilatère et les deux autres B et D par lesquels passent les dia-

gonales. On peut cependant faire voir que les deux couples de points jouent entièrement le même rôle dans la ponctuelle harmonique. On voit d'abord que sur quatre points harmoniques on peut échanger entre eux deux points séparés l'un de l'autre sans que les quatre points cessent d'être harmoniques. Ou autrement : si ABCD est une ponctuelle harmonique, il en est de même de ADCB, CBAD et CDAB. Car dans chacune de ces ponctuelles, les côtés opposés du quadrilatère passent deux à deux par le premier et le troisième point et les diagonales par le deuxième et le quatrième. Si maintenant par le point Q d'intersection des diagonales (fig. 16) nous menons les droites $\overline{AQ}$ et $\overline{CQ}$, elles déterminent respec-




tivement sur les côtés $\overline{NK}$, $\overline{KL}$ $\overline{LM}$ et $\overline{MN}$ quatre nouveaux points S, T, U et V. Les lignes $\overline{ST}$, $\overline{TU}$, $\overline{UV}$ et $\overline{VS}$ qui les joignent peuvent être considérées comme les secondes diagonales des quadrilatères KSQT, LTQU, MUQV, et NVQS ; mais deux de ces lignes qui sont opposées passent par B et les deux autres par D. Nous avons alors un quadrangle STUV dont tous les côtés opposés passent respectivement deux à deux par B et D et les diagonales par A et C. Il en résulte que dans une ponctuelle harmonique deux *couples* de points séparés peuvent aussi être échangés entre eux sans que les quatre points cessent d'être harmoniques. D'où ce théorème : *Si ABCD est une forme harmonique, il en est de même non seulement pour ADCB, CBAD et CDBA, mais encore pour DCBA, DABC, BCDA et BADC.*

Ce théorème a tout naturellement lieu aussi pour les rayons et les plans harmoniques, puisque nous les avons définis par le moyen des points harmoniques.

Nous dirons souvent que deux éléments séparés d'une forme harmonique sont *harmoniquement séparés* par les deux autres éléments, ou bien qu'ils sont *conjugés harmoniques*. En outre, pour pouvoir énoncer une proposition d'une manière plus concise et plus simple, nous nous servirons souvent des expressions suivantes : « deux éléments d'une forme sont harmoniquement séparés par deux autres éléments qui n'appartiennent pas à la forme » ; cela voudra dire que les derniers éléments déterminent dans la forme deux éléments par lesquels les premiers éléments sont séparés harmoniquement. Par exemple, nous dirons que deux points A et C sont harmoniquement séparés par deux plans $\beta$ et $\delta$, si ces derniers coupent la droite AC en deux points B et D tels que ABCD soient quatre points harmoniques. De même $\beta$ et $\delta$ seront dits harmoniquement séparés par A et C, s'ils sont harmoniquement séparés par les plans qui projettent les points A et C de leur ligne d'intersection $\overline{\beta\delta}$. Par exemple, pour les formes contenues dans ce plan, nous avons la proposition double :

Deux droites et un point situé en dehors d'elles déterminent une troisième droite ; elle passe par le point d'intersection des deux premières et elle contient tous les points qui sont harmoniquement séparés du point donné par les deux droites données.

Une droite et deux points situés en dehors d'elle déterminent un troisième point ; il est sur la ligne qui joint les deux premiers, et toutes les droites qui sont harmoniquement séparées de la première par les deux points donnés passent par ce point.

Par le fait, cette double proposition n'est qu'une répétition de la précédente étendue aux formes dans le plan. La proposition de gauche et la suivante servent de base à la solution du problème indiqué dans l'introduction ( page 4, fig. 1 ). Par le point inaccessible où se coupent deux droites, mener une troisième droite.

D'après tout ce qu'on a dit jusqu'ici, le lecteur démontrera très facilement les propriétés suivantes du quadrangle et du quadrilatère complet ( voir fig. 15 ).

Dans un quadrangle plan complet, les côtés opposés ( comme $\overline{KM}$ et $\overline{LN}$ ) sont deux à deux séparés harmoniquement par les deux points ( A et C ) où les autres cou-

Dans un quadrilatère plan complet les sommets opposés ( comme A et C ) sont deux à deux harmoniquement séparés par les deux droites ( $\overline{KM}$ et $\overline{LN}$ ) qui joignent

ples de côtés opposés se coupent deux à deux.

deux à deux les autres sommets opposés.

Remarquons ici que, dans la figure 15, il faut non seulement considérer K, L, M, N comme les sommets d'un quadrangle complet, mais qu'il faut aussi regarder $\overline{AL}$, $\overline{AN}$, $\overline{CL}$ et $\overline{CN}$ comme les côtés d'un quadrilatère complet, dans lequel A et C, K et M, L et N sont trois couples de sommets opposés.

---

# APPENDICE

### Relations métriques dans les formes harmoniquos.

Nous ne pouvons clore le chapitre qui traite des formes harmoniques sans indiquer les plus importantes des relations métriques qui s'y rattachent, ainsi que nous l'avions promis dans l'introduction. Nous y arrivons de la manière la plus simple au moyen du théorème suivant :

Fig. 17.

*Si, sur une droite, deux points A et C sont à égale distance d'une troisième C, ils sont harmoniquement séparés par ce troisième et par le point D à l'infini sur la droite ; ou, autrement dit, les quatre points ABCD sont quatre points harmoniques.*

En effet prenons dans un plan mené par ABC deux points à l'infini K et M (fig. 17) et joignons les à A et C (par deux couples de parallèles) ; les lignes de jonction se coupent en deux nouveaux points L et N. La ligne $\overline{LN}$, étant la deuxième diagonale du parallélogramme ALCN, passe par le point B qui bissecte le segment AC. Dans le quadrilatère KLMN,

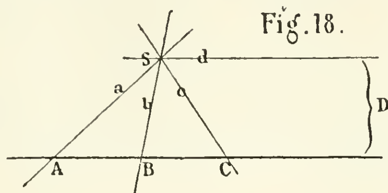
deux côtés opposés $\overline{KL}$ et $\overline{MN}$ se coupent alors en A, deux autres $\overline{LM}$ et $\overline{NK}$ en C, la diagonale $\overline{LN}$ passe par B et la deuxième diagonale qui est la droite $\overline{KM}$ à l'infini passe par D ; il en résulte que ABCD sont bien réellement quatre points harmoniques.

Comme quatre points harmoniques sont projetés d'un cinquième S suivant quatre rayons harmoniques, il en résulte (fig. 18) que :

*Si par le sommet S d'un triangle ASC, on mène deux droites, l'une d parallèle à $\overline{AC}$, l'autre b qui passe par le milieu du segment $\overline{AC}$, ces deux droites sont harmoniquement séparées par les deux côtés adjacents A et C du triangle.*

Si ASC est isocèle, $b$ est perpendiculaire à $\overline{AC}$ et par suite aussi à $d$; et les angles supplémentaires adjacents formés par $a$ et $c$ sont aussi bissectés par $b$ et $d$. Donc :

*Les bissectrices de deux angles adjacents sont harmoniquement séparées par les côtés de ces angles.*




Le réciproque de ce théorème peut s'énoncer ainsi :

*Si dans un faisceau de quatre rayons harmoniques, deux rayons séparés (ou conjugés) sont perpendiculaires l'un sur l'autre, ils bissectent les angles formés par les deux autres rayons.*

La démonstration se déduit immédiatement de la proposition suivante qui admet elle-même une réciproque (fig. 18).

*Si l'on coupe un faisceau harmonique* abcd *par une droite* u *parallèle à l'un de ses rayons, l'un des points d'intersection de cette droite avec les trois autres rayons bissecte le segment déterminé par les deux autres points.*

En effet les points d'intersection de $u$ avec $abcd$ sont quatre points harmoniques et l'un d'eux se trouve à l'infini.

Ces propositions, auxquelles on peut en ajouter d'autres semblables pour les plans harmoniques, peuvent s'employer dans la solution de toute une série de problèmes. Par exemple, le problème :

*Construire le quatrième harmonique à trois points ou trois rayons* est susceptible d'une solution bien plus simple que celle que donne le quadrilatère complet, pourvu qu'on admette l'emploi de droites, parallèles et de segments égaux. Car étant donnés les rayons $a,b,c,d$ (fig. 18),

s'il faut construire le quatrième rayon *a*, harmoniquement séparé de *c*, coupons *b* et *c* par une parallèle *u* à *d* aux points B et C et prenons sur celle-ci AB = BC; le rayon *a* du faisceau mené par A est le rayon cherché. Si, étant donnés trois points A,B,C. on demande (fig. 20) de chercher le quatrième point D harmoniquement séparé de B ; sur une droite quelconque menée par B nous porterons à partir de B deux segments égaux $A_1B$ et $BC_1$ ; nous déterminerons le point S d'intersection des droites $\overline{AA_1}$, ou *a* et $\overline{CC_1}$, ou *c* ; en menant par ce point une parallèle *d* à $A_1BC_1$, cette droite coupera la droite $\overline{A_1BC_1}$ au point D cherché. Car puisque $A_1$,B,$C_1$ et le point à l'infini de $\overline{A_1BC_1}$ sont quatre points harmoniques, S ($A_1BC_1D$) ou *abcd* doit être un faisceau harmonique, et par suite ABCD, qui en est une section, est une ponctuelle harmonique.

Fig. 19.

Si l'on donne un segment AC et son point milieu B, on peut au moyen d'une construction purement linéaire tracer une parallèle à $\overline{ABC}$ par un point quelconque K (fig. 19). Nous menons les lignes $\overline{KA}$ et $\overline{KC}$ et nous les coupons respectivement en L et N au moyen d'une droite quelconque passant par B. Déterminons maintenant le point d'intersection M de $\overline{CL}$ et $\overline{AN}$; la droite cherchée passe par ce point. Car $\overline{KM}$, qui est la seconde diagonale du quadrangle KLMN, coupe la droite $\overline{ABC}$ en un quatrième point, conjugé harmonique de B, mais qui est à l'infini, puisque B bissecte le segment AC. Réciproquement, si l'on donne deux parallèles, un segment quelconque situé sur l'une d'elles peut être divisé en deux parties égales au moyen de constructions linéaires. On voit immédiatement comment ces constructions peuvent s'appliquer dans l'arpentage.

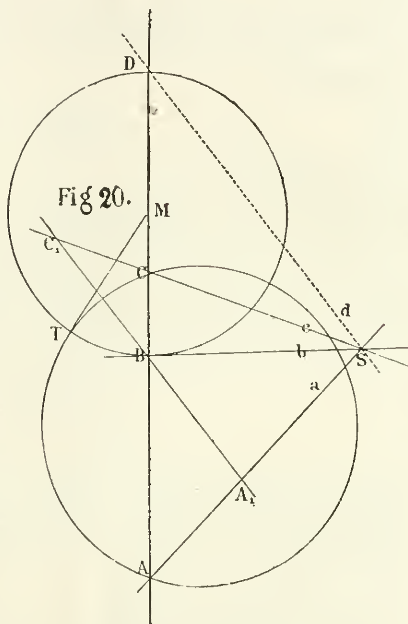
Il existe un rapport remarquable entre les segments que quatre points

harmoniques ABCD déterminent sur une droite. Pour le trouver, projetons ces points harmoniques par un faisceau harmonique quelconque *abcd* (fig. 20) et menons en même temps par B une parallèle au rayon *d*. Cette droite rencontre les rayons *a* et *c* en deux points $A_1$ et $C_1$ qui sont équidistants de B ; on a en même temps deux couples de triangles semblables, à savoir $AA_1B \backsim ASD$ et $BC_1C \backsim DSC$. On en déduit alors les rapports :

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{AD}{SD} \text{ et } \frac{BC}{BC_1} = \frac{CD}{SD}.$$

En divisant le premier par le second en remarquant que $A_1B = BC_1$ il en résulte que :

$$(1) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$




Ce qui donne ce théorème :

*Le segment AC est divisé par le point B situé sur lui dans le même rapport que par le point D qui lui est extérieur et qui est le conjugé harmonique de B par rapport à A et C (ou qui est harmoniquement séparé de B par A et C).*

On donne généralement ce théorème comme définition des points harmoniques et on le prend comme point de départ de la théorie de ces points harmoniques. Il en résulte, entre autres conséquences, que le point D est en dehors de AC et du côté de C si $AB > BC$ et que par suite $AD > CD$ ; il se trouve au contraire du côté de A si $AB < BC$; et par conséquent aussi B et D sont toujours en même temps plus près d'un des points A et C que de l'autre.

Comme les segments égaux CD et DC sont décrits en sens contraire, on écrit ordinairement DC au lieu de CD dans la proportion précédente et elle prend alors la forme symétrique suivante :

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$$

Si M est le point milieu du segment BD, l'équation (I) peut aussi s'écrire :

$$\frac{AM - BM}{BM - CM} = \frac{AM + MD}{CM + MD}$$

ou bien en remplaçant MD par BM,

$$\frac{AM - BM}{BM - CM} = \frac{AM + BM}{CM + BM}$$

En effectuant les multiplications, il vient après quelques réductions très simples :

(II) $$(\overline{BM})^2 = AM.\ CM$$

d'où ce théorème remarquable :

*BM (et par suite aussi DM) est moyen proportionnel entre AM et CM.*

Par A et C (fig. 20) faisons passer un cercle quelconque et par le point M menons-lui la tangente MT, le théorème connu sur les segments qu'un cercle intercepte sur des sécantes donne

$$AM.\ CM = (\overline{TM})^2$$

et par suite $\overline{TM}^2 = \overline{BM}^2 = \overline{DM}^2$. Le point de contact T de la tangente se trouve donc sur un cercle décrit du point M comme centre avec BM = MD comme rayon ; ce cercle coupe orthogonalement le premier en T, puisque son rayon MT est normal à sa tangente en T. Donc :

*Tous les cercles du plan, passant par deux points donnés A et C, sont coupés orthogonalement par tous les cercles tels que les extrémités B et D de leur diamètre BD soient conjugées harmoniques par rapport à A et C.*

La théorie des points harmoniques nous conduit ainsi avec la plus grande facilité aux systèmes de cercles qui se coupent orthogonalement et on peut la prendre pour point de départ de l'étude des systèmes de sphères orthogonales.

L'équation inverse de (I), c'est-à-dire l'équation

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$

peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{AC - AB}{AB} = \frac{AD - AC}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{AB - AC}{AB} = \frac{AC - AD}{AD}$$

et c'est précisément à cette dernière équation que les points A, B, C, D, doivent leur nom de *points harmoniques*. On sait en effet que trois nombres $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont dits en *proportion harmonique continue*, ou *harmoniques* quand le rapport de la différence des deux premiers au premier est égal au rapport de la différence des deux derniers au dernier ; ou quand

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$$

L'équation ci-dessus entre les segments AB, AC et AD a justement la même forme que la dernière équation.

Enfin en effectuant la division, on obtient l'équation :

$$1 - \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD} - 1$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$$\text{(III)} \qquad \frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$$

Cette formule remarquable peut très facilement s'exprimer en langage ordinaire ; elle est souvent employée pour définir les points harmoniques.

Nous pourrions donner des équations semblables pour les angles que font entre eux quatre rayons ou quatre plans harmoniques. Nous préférons cependant les réserver pour l'appendice à la leçon suivante, parce que sans cela elles n'auraient pas grande importance pour nous.

Nous ferons remarquer enfin que, dans les relations *métriques* des formes, la loi de réciprocité ne s'applique plus ou n'a lieu que dans quelques cas isolés. La raison de ce fait, c'est que dans le faisceau il n'existe aucun élément qui occupe par rapport aux rapports métriques une situation analogue à celle du point à l'infini dans les formes rectilignes ; et réciproquement dans ces dernières, il n'existe aucun segment qui puisse se définir et se distinguer d'une manière spéciale, par rapport aux relations métriques, comme l'angle droit dans le faisceau.

# LEÇON V

## Projectivité des formes fondamentales élémentaires

Dans la présente leçon nous allons revenir sur une idée que nous avons déjà énoncée antérieurement et la développer plus complètement ; il s'agit par le fait de *rapporter* l'une à l'autre deux formes fondamentales de telle manière qu'à un élément de l'une corresponde un élément de l'autre et qu'à chaque série d'éléments se succédant d'une manière continue dans l'une il corresponde une série d'éléments se succédant d'une manière continue dans l'autre. Parmi les manières très simples de rapporter entre elles les formes fondamentales de première espèce, nous avons rencontré les suivantes. Sont rapportés l'un à l'autre :

1° Un faisceau et une ponctuelle (fig. 6, page 20) ou un faisceau de plans et un faisceau de rayons, quand chaque élément de la seconde forme se trouve placé sur l'élément correspondant de la première ;

2° Deux ponctuelles, quand elles sont les sections d'un seul et même faisceau de rayons (fig. 8, page 21) ;

3° Deux faisceaux de rayons, quand ils projettent une seule et même ponctuelle (fig. 7, page 21) ou quand ils sont les sections d'un seul et même faisceau de plans ;

4° Deux faisceaux de plans, quand ils sont les projections d'un seul et même faisceau de rayons.

Deux formes fondamentales élémentaires étant ainsi rapportées l'une à l'autre, nous dirons qu'elles sont en *position perspective*, ou plus brièvement qu'elles sont *perspectives ;* il s'en suit que, de deux formes fondamentales perspectives d'espèces différentes, l'une est une section de l'autre et qu'au contraire deux formes fondamentales perspectives de

même espèce sont des sections ou des projections d'une troisième forme fondamentale.

Si deux formes fondamentales élémentaires sont perspectivement rapportées à une troisième (par exemple, deux ponctuelles à une troisième) elles sont aussi rapportées l'une à l'autre, sans cependant être en général en position perspective. Nous arrivons ainsi à une seconde position de deux formes fondamentales rapportées l'une à l'autre à laquelle on donne le nom de *position oblique;* elle se déduit de la position perspective de la manière suivante. On déplace l'une par rapport à l'autre les deux formes fondamentales projectives; chaque élément de l'une continue à rester rapporté à l'élément correspondant de l'autre, mais en général elles perdent leur situation perspective.

Nous pouvons d'un nombre infini de manières rapporter l'une à l'autre deux formes fondamentales, par exemple deux faisceaux de rayons, en les considérant comme les projections d'une seule et même courbe. Mais la manière qu'on a donnée plus haut pour établir cette correspon dance, aussi bien pour les formes en position perspective que pour celles en position oblique, diffère de toutes les autres par un point important. En effet, si l'on considère quatre éléments harmoniques dans l'une des formes, il leur correspond évidemment dans l'autre quatre éléments qui sont aussi harmoniques, puisque les projections et les sections d'éléments harmoniques sont encore des éléments harmoniques. Cette propriété caractéristique n'existe pas en général dans les autres modes d'établir la correspondance, et nous conduit, ainsi, à formuler la définition suivante :

*Deux formes fondamentales sont dites projectivement liées l'une à l'autre, ou plus brièvement projectives, quand elles sont rapportées l'une à l'autre de telle manière que quatre éléments harmoniques de l'une correspondent toujours à quatre éléments harmoniques de l'autre.*

Deux formes fondamentales élémentaires perspectives sont donc aussi projectives; elles n'ont de remarquable que leur position particulière l'une par rapport à l'autre. Les expressions *conformes* et *homographiques* qu'ont respectivement employées Paulus et M. Chasles ont la même signification que *projectives.*

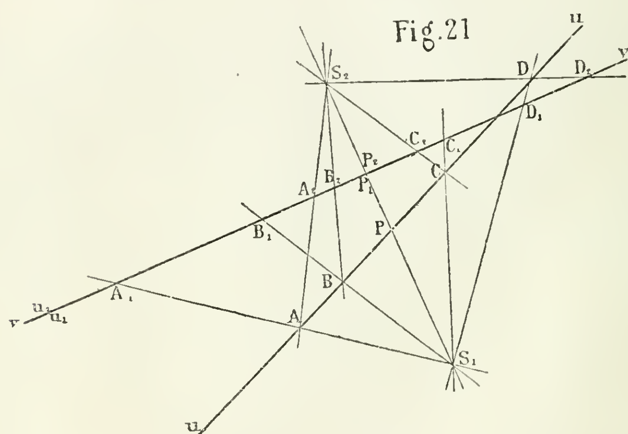
Von Staudt a introduit le signe $\barwedge$ pour remplacer le mot *projectif.*

De la définition de la corrélation ou liaison projective, il découle immédiatement que :

*Si deux formes sont projectives à une troisième, elles sont aussi projectives entre elles.*

Par exemple, si deux ponctuelles sont perspectives avec une troisième, elles sont projectives entre elles ; mais elles ne sont en situation perspective que dans des cas particuliers. Il en est de même pour des formes fondamentales quelconques de première espèce.

Deux formes fondamentales projectives et de même espèce peuvent aussi être placées l'une sur l'autre, c'est-à-dire avoir le même support ou le même lieu. Par exemple deux faisceaux projectifs de plans peuvent être placés de manière à avoir le même axe ; de même deux ponctuelles projectives peuvent se trouver sur la même droite de telle sorte que chaque point de cette droite doit être considéré comme double. Il est




de la plus haute importance pour ce qui suit de rechercher combien deux formes fondamentales élémentaires, qui sont projectives et placées l'une sur l'autre, ont d'*éléments correspondants communs*, c'est-à-dire combien de fois un élément d'une des formes se confond ou coïncide avec l'élément qui lui correspond dans l'autre. La proposition double qui suit montre d'abord qu'il peut réellement se présenter le cas où deux formes ont un ou deux éléments correspondants communs.

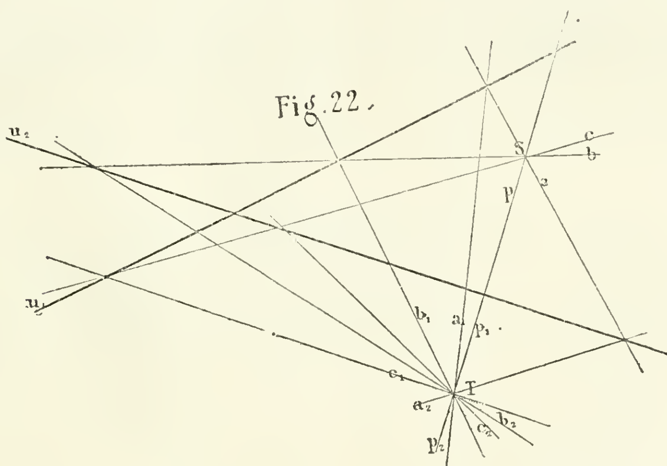
Soient donnés dans un plan deux faisceaux de rayons $S_1$ et $S_2$ (fig. 21) qui soient les projections d'une seule et même ponctuelle $u$ et par suite projectifs ; si nous les cou-

Soient données dans un plan deux ponctuelles $u_1$ et $u_2$ (fig. 22) qui soient les sections d'un seul et même faisceau S de rayons et par suite perspectives ; si nous les pro-

pons par une droite $v$, nous obtenons sur celle-ci deux ponctuelles projectives $u_1$ et $u_2$ qui ont les deux points d'intersection de $v$ avec $u$ et $\overline{S_1 S_2}$ comme points correspondants communs. Ces deux points coïncident quand $\overline{S_1 S_2}$ passe par $uv$.

jetons d'un point T du plan, ce point sera le centre de deux faisceaux projectifs de rayons qui ont pour rayons correspondants communs les deux lignes, qui joignent T avec S et avec $u_1 u_2$. Ces deux rayons coïncident quand $u_1 u_2$ est situé sur $\overline{ST}$.

Pour plus de clarté nous ajouterons que, dans la proposition de gauche, deux points $A_1$ et $A_2$ appartenant respectivement à $u_1$ et $u_2$ se

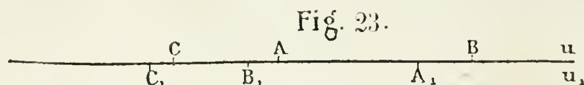



correspondent si les rayons $S_1 A_1$ et $S_2 A_2$ se coupent en un point A de $u$. Les trois ponctuelles $u$, $u_1$ et $u_2$ ont donc le point $uv$ comme élément correspondant commun, tandis que $u_1$ et $u_2$ ont comme point correspondant commun l'intersection de $v$ avec le rayon $\overline{S_1 S_2}$ qui est commun aux faisceaux $S_1$ et $S_2$.

Étant données deux ponctuelles projectives $u$ et $u_1$, si l'une d'elles $u$ est décrite d'un mouvement continu par un point P, le point correspondant $P_1$ de $u_1$ décrit en même temps cette autre ponctuelle, si P et $P_1$ restent constamment homologues l'une de l'autre. Mais si $u$ et $u_1$ sont situés sur une même ligne droite, les points P et $P_1$ peuvent se mouvoir dans le même sens ou dans des directions opposées (fig. 23 et 24). Dans le premier cas (fig. 24), nous dirons que les ponctuelles sont *projectives concordantes;* dans le second (fig. 23), nous les appellerons *projectives*

*opposées*. De même si deux faisceaux projectifs de rayons S et $S_1$ sont concentriques et situés dans le même plan (fig. 25 et 26), ou bien si deux faisceaux projectifs de plans ont le même axe, nous dirons qu'ils sont *projectifs concordants* (fig. 26) ou projectifs opposés (fig. 25) suivant que les deux éléments qui les décrivent tournent dans le même sens ou dans des sens opposés. Dans les formes fondamentales de pre-

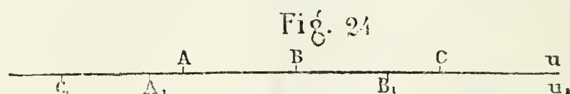
Fig. 23.




mière espèce projectivement opposées, les éléments mobiles qui se correspondent doivent nécessairement coïncider deux fois ; ce qui nous donne ce théorème :

*Les formes fondamentales de première espèce projectivement oppo-*

Fig. 24




*sées ont toujours deux éléments correspondants communs ; ces éléments séparent l'un de l'autre deux autres éléments homologues quelconques.*

Au contraire deux formes projectives concordantes n'ont deux éléments correspondants communs que si un segment (ou un angle) AB

Fig. 25.

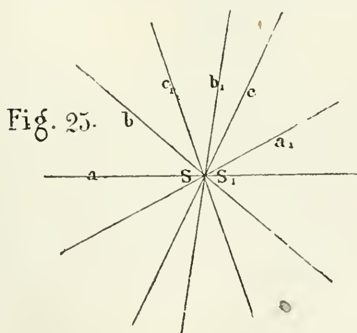
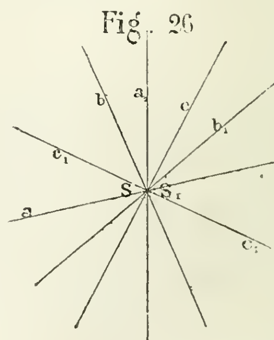



Fig. 26



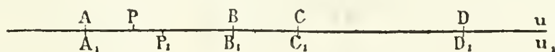

de l'une est compris tout entier dans le segment (ou l'angle) correspondant de l'autre (fig. 24) ; dans des cas particuliers elles n'ont qu'un élément commun et souvent (fig. 26) elles n'en ont aucun. Deux ponctuelles projectives $u$ et $u_1$, qui ont trois points correspondants communs A,B,C doivent, d'après le théorème précédent, être projectives concordantes.

Nous pouvons maintenant démontrer le *théorème* suivant qui est *fondamental pour la géométrie de position.*

*Si deux formes fondamentales élémentaires sont projectives et ont trois éléments correspondants* A, B, C, *communs, elles ont tous leurs éléments correspondants communs, et par suite sont identiques.*

Supposons d'abord que les deux formes fondamentales projectives soient deux ponctuelles $u$ et $u_1$ (fig. 27) ; tout point qui est harmoniquement séparé d'un des trois points correspondants communs A,B,C par les deux autres doit coïncider avec son correspondant parce que celui-ci est complètement déterminé et parce que quatre points harmoniques de $u_1$ doivent toujours correspondre à quatre points harmoniques de $u$ (par définition). Supposons que, sur le segment AB qui ne renferme pas le point C, il y ait un point P de $u$ qui ne coïncide pas avec le point correspondant $P_1$ de $u_1$. Faisons alors décrire à P la ponctuelle $u$ dans le sens ABC, $P_1$ décrira la ponctuelle $u_1$ dans le même sens et il se confondra ou coïncidera avec P soit en B, soit en avant de B, en un point

Fig. 27




B′. Si P se meut dans le sens opposé CBA, $P_1$ se mouvra aussi dans le sens CBA et coïncidra avec P soit en A soit en avant de A en un point A′. Nous obtenons de la sorte un segment A′B′ qui est égal à AB, ou est une portion de AB, et dont aucun point, excepté les points extrêmes A′ et B′, ne coïncide avec son correspondant. Mais ceci est impossible puisque, d'après ce qui précède, le point harmoniquement conjugué de C par rapport à A′ et B′ doit coïncider avec son correspondant ; il en résulte que les ponctuelles $u$ et $u_1$ doivent avoir en commun tous les points du segment AB ; par suite il en sera de même de tout autre point Q de la droite, parce que Q est harmoniquement séparé par A et B d'un point du segment AB.

Nous pouvons démontrer le théorème d'une manière entièrement analogue pour deux faisceaux projectifs de rayons ou de plans ; ou plus simplement, nous pouvons ramener ces cas au précédent en coupant les faisceaux par une seule et même droite suivant deux ponctuelles. Ces dernières sont projectives ; elles ont trois éléments correspondants communs et il en est de même pour les deux faisceaux.

Deux formes élémentaires projectives peuvent donc avoir tout au

plus deux éléments correspondants communs si chaque élément de l'une ne doit pas coïncider avec l'élément correspondant de l'autre. Une autre conséquence importante de notre théorème fondamental est la suivante : *Si une ponctuelle est projective à un faisceau, ou un faisceau de rayons à un faisceau de plans, et si trois éléments de la première forme sont situés sur les trois éléments correspondants de la seconde, la première forme est une section de la seconde.*

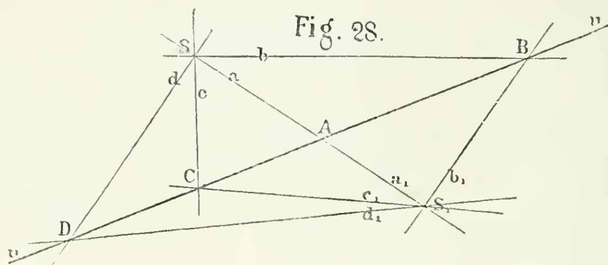


Fig. 28.

Et en effet la première forme a en commun avec la section de la seconde qui est le lieu de la première trois éléments, et par suite aussi tous ses éléments ; elle est donc identique avec elle.

Si deux faisceaux projectifs de rayons S et $S_1$ ( fig. 28 ) situés dans un même plan, mais non concentriques, ont comme élément correspondant commun le rayon A ou $A_1$ qui joint leurs centres, ils sont les projections d'une seule et même ponctuelle $u$ et par suite sont perspectifs. Car joignons par une droite $\overline{BC}$, ou $u$, les points B et C

Si deux ponctuelles projectives ( fig. 29 ) $u$ et $u_1$ qui se coupent ont comme élément commun leur point d'intersection A ou $A_1$ elles sont les sections d'un seul et même faisceau et par suite sont perspectives. Car joignons deux points quelconques B et C de $u_1$ avec les points $B_1$ et $C_1$ qui leur correspondent respectivement dans

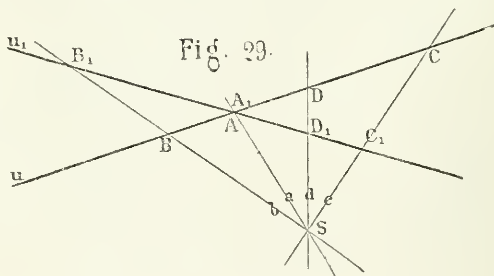


Fig. 29.

où deux rayons $b$ et $c$ du faisceau S rencontrent les rayons $b_1$ et $c_1$ qui leur correspondent respectivement dans $S_1$, les deux ponctuelles suivant lesquelles $u$ coupe les faisceaux S et $S_1$ sont identiques parce qu'elles sont projectives et ont comme points correspondants communs les trois points $\overline{ua}$, $\overline{ub}$ $\overline{uc}$ ou A, B et C.

$u_1$ au moyen de deux droites $b$ et $c$ et appelons S le point d'intersection de ces dernières ; les deux faisceaux par lesquels les ponctuelles $u$ et $u_1$ sont projetées de S sont identiques parce qu'ils sont projectifs et qu'ils ont les rayons $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ et $\overline{SC}$ ou $a$ $b$ $c$ comme rayons correspondants communs.

Cette proposition double a pour analogue dans la géométrie du faisceau la proposition double qui suit.

Si deux faisceaux projectifs de plans dont les axes se rencontrent ont comme élément correspondant commun le plan qui réunit ces axes, ils sont les projections d'un seul et même faisceau de rayons et par suite sont perspectifs. Joignons en effet les lignes suivant lesquelles se rencontrent deux couples quelconques de plans homologues et coupons les deux faisceaux par le plan ainsi obtenu ; nous avons deux faisceaux projectifs de rayons qui ont trois rayons correspondants communs et par suite sont identiques.

Si deux faisceaux projectifs de rayons qui sont concentriques, mais situés dans des plans différents, ont comme élément commun la droite d'intersection de ces plans, ils sont les sections d'un seul et même faisceau de plans et par suite sont perspectifs. Projetons en effet les deux faisceaux de la ligne d'intersection des plans qui joignent deux couples quelconques de rayons homologues ; nous obtenons deux faisceaux projectifs de plans, qui ont trois plans correspondants communs et par suite sont identiques.

Les démonstrations de cette proposition double et de la précédente sont entièrement analogues, comme on a pu le remarquer. La proposition suivante se démontrera exactement de la même manière.

Deux faisceaux de rayons $S_1$ et $S_1$ (fig 28) projectifs, mais non concentriques, sont en position perspective, si trois des points d'inter-

Deux ponctuelles $u$ et $u_1$ (fig. 29) projectives, mais non situées l'une sur l'autre, sont en position perspective, si les lignes qui joignent

section de leurs rayons homologues se trouvent sur une même droite $u$. Car les ponctuelles projectives suivant lesquelles les deux faisceaux de rayons sont coupés par la droite $u$ ont en commun ces trois points B, C, D et par suite aussi tous leurs points correspondants sont communs ; tous les points d'intersection des rayons homologues des deux faisceaux se trouvent donc sur la droite $u$.

deux à deux trois couples quelconques de points homologues passent par un même point S. Car les faisceaux projectifs qui projettent les deux ponctuelles du point S ont en commun ces trois rayons $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$, et par suite tous leurs rayons correspondants sont aussi communs ; toutes les lignes qui réunissent les points correspondants de $u$ et $u_1$ passent donc par S.

Le lecteur trouvera et démontrera facilement les propositions analogues pour les faisceaux de rayons et de plans dans la géométrie de la gerbe.

Si deux faisceaux de rayons rapportés l'un à l'autre sont dans un même plan, mais ne sont pas concentriques, les points d'intersection de leurs rayons homologues se succèdent les uns aux autres d'une manière continue ; car si un rayon décrit un des faisceaux en tournant d'une manière continue autour de son centre, le rayon correspondant se meut lui-même en tournant d'une manière continue et décrit l'autre faisceau ; par suite le point d'intersection de ces deux rayons décrit une ligne. Si les deux faisceaux sont projectifs, sans être cependant en situation perspective, tous les points d'intersection de leurs rayons homologues sont situés sur une courbe qui, d'après le théorème précédent, ne peut avoir plus de deux points communs avec une droite. A cause de cette propriété caractéristique, nous lui donnerons le nom de *courbe* ou *ponctuelle du second ordre ;* partout où cela sera nécessaire, on désignera la forme rectiligne sous le nom de *ponctuelle du premier ordre* pour la distinguer de la précédente.

Si deux ponctuelles projectives sont situées dans un même plan, mais en position oblique, toutes les lignes qui joignent deux à deux leurs points correspondants forment une série continue de rayons, et par un point quelconque du plan il n'en peut passer plus de deux. Nous donnerons à l'ensemble de toutes ces lignes le nom de *faisceau de rayons du second ordre* et pour faire disparaître toute ambiguïté, nous désignerons le faisceau ordinaire de rayons sous le nom de *faisceau de rayons du premier ordre*.

Les courbes et faisceaux du second ordre seront donc définis de la manière suivante, d'après leur mode de génération :

Deux faisceaux projectifs de rayons (du premier ordre) situés dans un même plan, mais en position oblique, engendrent une courbe ou ponctuelle du second ordre, chaque rayon d'un faisceau coupant le rayon correspondant de l'autre en un point de cette courbe.

Une droite quelconque ne contient pas plus de deux points d'une courbe du second ordre.

Deux ponctuelles projectives (du premier ordre) situées dans un même plan, mais en position oblique, engendrent un faisceau de rayons du second ordre, chaque point d'une des ponctuelles projetant le point correspondant de l'autre par un rayon appartenant à ce faisceau.

Par un point quelconque, il ne passe pas plus de deux rayons d'un faisceau du second ordre.

Les faisceaux projectifs de rayons ou de plans en position oblique donnent naissance dans la gerbe à des formes du second ordre entièrement analogues aux précédentes. Nous étudierons de plus près toutes ces nouvelles formes dans les prochaines leçons.

Nous parvenons à la construction des courbes et faisceaux du second ordre en démontrant le théorème important qui suit :

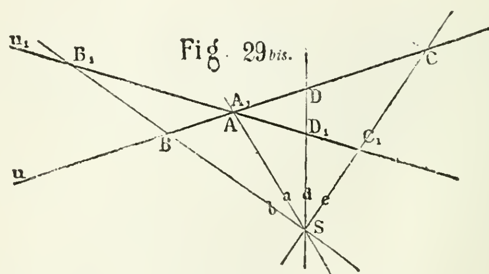
*Deux formes fondamentales élémentaires peuvent toujours être projectivement rapportées l'une à l'autre de telle sorte qu'à trois éléments quelconques de l'une on fasse correspondre trois éléments choisis arbitrairement dans l'autre ; on peut alors construire sans ambiguïté l'élément de l'une de ces formes qui correspond à un élément arbitrairement choisi dans l'autre.*

La démonstration de ce théorème peut se déduire directement de la définition de la projectivité et de ce théorème que trois éléments d'une forme fondamentale élémentaire déterminent un quatrième élément unique qui est harmoniquement séparé d'un des trois premiers par les deux autres. Des considérations analogues à celles qu'on a données plus haut (page 55) montrent qu'à l'aide de trois couples d'éléments homologues on peut rapporter entre eux une infinité de couples d'éléments du même genre et conséquemment qu'il n'existe dans une des formes aucun élément qui n'ait son homologue dans l'autre.

Nous allons cependant en donner une autre démonstration, mais seulement pour le cas de deux ponctuelles, puisque toutes les autres

peuvent facilement s'y ramener. En effet si l'une seulement ou si chacune des deux formes fondamentales est un faisceau, nous pourrons toujours lui substituer sa section par une droite, par conséquent une ponctuelle.

Supposons d'abord que deux ponctuelles $u$ et $u_1$ (fig. 29 *bis*) (¹) situées dans un même plan doivent être projectivement rapportées l'une à l'autre de manière qu'elles aient pour point correspondant commun le point d'intersection A ou $A_1$ de leurs lieux ou supports; et que de plus aux points B et C de $u$ doivent respectivement correspondre les points $B_1$ et $C_1$ de $u_1$ ; l'une des ponctuelles devra alors être une projection de l'autre faite du point d'intersection S de $\overline{BB_1}$ et $\overline{CC_1}$. A un quatrième point quelconque D de $u$ correspond donc sa projection $D_1$ sur $u_1$, faite sur un rayon passant par S.

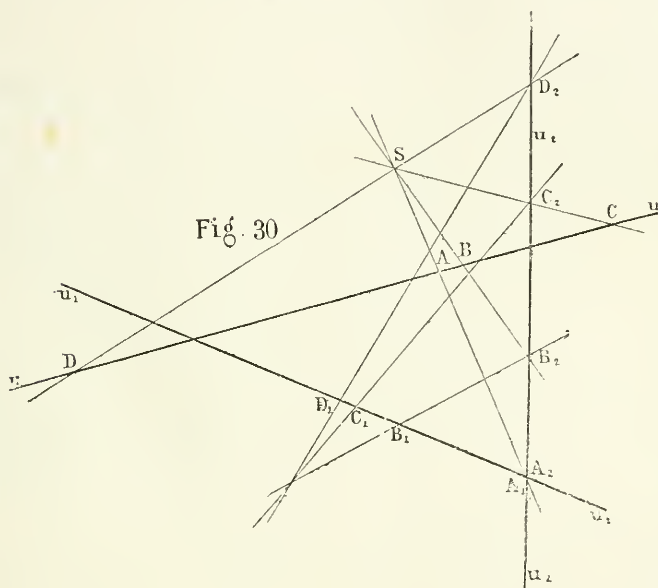



Supposons maintenant que deux ponctuelles $u$ et $u_1$ (fig. 30) non situées sur la même droite doivent être projectivement rapportées entre elles de telle sorte qu'aux points A, B et C de $u$ correspondent respectivement les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ de $u_1$. Sur une des lignes qui joignent les points correspondants, sur $\overline{AA_1}$ par exemple, prenons un point S différent de A et $A_1$ et menons par $A_1$ une droite de $u_2$ différente de $u_1$ et de $AA_1$ et qui coupe la droite de $u$. Du centre S projetons la ponctuelle $u$ sur $u_2$ et soient $A_2$, $B_2$, $C_2$ les projections de A,B,C, notre problème se trouve évidemment ramené au précédent. Car nous avons maintenant à rapporter projectivement $u_1$ et $u_2$ entre elles de manière qu'elles aient le point $A_2$ ou $A_1$ correspondant commun et qu'aux points $B_1$ et $C_1$ correspondent respectivement les points $B_2$ et $C_2$. Les ponc-

(1) Nous reproduisons ici cette figure pour la plus grande commodité du lecteur.

tuelles $u$ et $u_1$ peuvent donc être regardées comme les projections d'une seule et même troisième ponctuelle $u_2$. Pour déterminer le point $D_1$ de $u_1$ qui correspond à un point quelconque D de $u$, cherchons d'abord la projection $D_2$ de D sur $u_2$. La règle établie pour le cas précédent nous donne alors $D_1$.

S'il s'agit enfin de rapporter projectivement l'une à l'autre deux ponctuelles $u$ et $u_1$ (fig. 23 et 24 page 54) situées sur une seule et même droite de manière que les points A,B,C de $u$ correspondent respectivement aux points $A_1$, $B_1$,$C_1$ de $u_1$, nous ramènerons ce cas au précédent




en projetant $u_1$ sur une autre droite $u_2$. Si par exemple deux points correspondants A et $A_1$ coïncident, il sera avantageux de mener $u_2$ par un pareil point double, parce que nous ramènerons immédiatement le dernier cas que nous avons considéré au premier.

De cette recherche ressort le théorème suivant : *Deux formes fondamentales projectives peuvent toujours être considérées comme la première et la dernière d'une série de formes dont chacune est perspective à celle qui la précède et à celle qui la suit.* Par exemple, deux ponctuelles projectives peuvent être regardées comme la première et la dernière de trois ou de plus de trois ponctuelles dont chacune est la projection de celle qui la touche immédiatement. Ce théorème donne aussi l'explication bien nette et la justification du mot « *projectif* »

De ce qui précède, on déduit d'une manière très simple toute une série de théorèmes compliqués en apparence. Nous indiquerons seulement les suivants :

Si les côtés $a_1$, $a_2$, $a_n$ d'un $n$ — latère simple variable tournent respectivement autour de $n$ points fixes $S_1$, $S_2 \ldots S_n$ tandis que $(n-1)$ de ses sommets $a_1a_2, a_2a_3, \ldots a_{n-1}a_n$ se meuvent respectivement sur $(n-1)$ droites fixes, $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, le dernier sommet $a_na_1$, de même que tout autre point d'intersection des côtés du $n$-latère, décrit une courbe du second ordre ou une droite ; ce sera en particulier une droite si les centres de rotation $S_1, S_2 \ldots S_n$ sont tous sur une droite $g$. — En effet les côtés $a_1, a_2, \ldots a_n$ décrivent tous autour de $S_1, S_2, \ldots S_n$ respectivement des faisceaux de rayons dont chacun est perspectif au suivant puisque les ponctuelles $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ sont des sections qui leur sont respectivement perspectives. Donc, deux quelconques de ces faisceaux sont projectifs et en particulier le premier et le dernier; ils engendreront donc une courbe du second ordre, s'ils ne sont pas perspectifs. Ce dernier cas se produira en particulier si les centres des faisceaux sont sur une même droite $g$ ; car cette dernière est alors un rayon correspondant commun à tous les faisceaux, parce que dans le mouvement du $n$-gone tous les côtés coïncident une fois avec $g$.

Si les sommets $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ d'un $n$, gone simple variable parcourent respectivement $n$ droites fixes $u_1, u_2 \ldots u_n$ tandis que $(n-1)$ côtés $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$ tournent respectivement autour des points fixes $S_1, S_2 \ldots S_{n-1}$, le dernier côté $\overline{A_nA_1}$, de même que toute autre diagonale du $n$-gone, décrit un faisceau de rayons du second ordre, ou bien tourne autour d'un point fixe ; ce dernier cas se produira notamment si les droites $u_1, u_2 \ldots u_n$ se coupent toutes en un même point. En effet les sommets $A_1, A_2$, $A_n$ dérivent sur $u_1, u_2, u_n$ des ponctuelles dont chacune est perspective à la précédente, puisque $S_1, S_2, \ldots S_n$ sont les centres de perspective. Donc ces ponctuelles sont projectives deux à deux, entre autres la première et la dernière, et celles-ci engendreront un faisceau du second ordre si elles ne sont pas perspectives l'une à l'autre. Ce dernier cas se produira en particulier si les droites $u_1, u_2, \ldots u_n$ se coupent en un même point P ; car elles ont toutes ce point comme correspondant commun, parce que dans le mouvement du $n$-gone, tous les sommets coïncident une fois avec P.

Ces propositions, dont l'une (celle de gauche) est la généralisation d'un théoréme de Mac-Laurin et de Braikenridge et dont l'autre (celle de droite) est due à Poncelet, nous donnent le moyen de trouver autant de points d'une courbe du second ordre ou autant de rayons d'un faisceau du second ordre que nous le voulons, à l'aide de constructions linéaires. Ces constructions seront tout naturellement les plus simples pour $n = 3$.

---

# APPENDICE

**Relations métriques des formes fondamentales projectives de première espèce.**

Entre les angles et les segments qui sont limités par quatre éléments homologues de deux formes fondamentales projectives, il existe une proportion importante que nous allons indiquer en finissant. Nous partons d'un faisceau S (fig. 28 et 29, page 56) et d'une ponctuelle qui lui est perspective. Quatre rayons quelconques $a$, $b$, $c$, $d$ de S passent par les points A, B, C, D de $u$ qui leur correspondent. Les triangles limités par $u$ et par ces rayons et dont le sommet commun est S ont même hauteur. Leurs surfaces sont donc entre elles comme leurs bases situées sur $u$ ; de sorte qu'on a par exemple :

$$\frac{\Delta.\ \mathrm{ASB}}{\Delta.\ \mathrm{ASD}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} \text{ et } \frac{\Delta.\ \mathrm{CSB}}{\Delta.\ \mathrm{CSD}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}}$$

Mais la surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de ses côtés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent. Représentons d'une manière générale par $(pq)$ l'angle compris entre deux rayons $p$ et $q$, nous obtenons alors pour les surfaces des trois triangles :

$$\Delta.\ \mathrm{ASB} = \frac{1}{2}\mathrm{AS.SB.\ Sin}\ (ab)\,; \quad \Delta.\ \mathrm{ASD} = \frac{1}{2}\mathrm{AS.SD.\ Sin}\ (ad)\,;$$

$$\Delta.\ \mathrm{CSB} = \frac{1}{2}\mathrm{CS.SB.\ Sin}\ (cb)\,; \quad \Delta.\ \mathrm{CSD} = \frac{1}{2}\mathrm{CS.SD.\ Sin}\ (cd)\,.$$

Si nous introduisons maintenant ces valeurs dans les proportions

ci-dessus et si nous supprimons les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, nous avons :

$$\frac{SB.\ \mathrm{Sin}\,(ab)}{SD.\ \mathrm{Sin}\,(ad)}=\frac{AB}{AD};\ \text{et}\ \frac{SB.\ \mathrm{Sin}\,(cb)}{SD.\ \mathrm{Sin}\,(cd)}=\frac{CB}{CD}$$

Divisons la première de ces équations par la seconde et supprimons le facteur commun $\frac{SB}{SD}$, nous obtenons la proportion cherchée sous la forme suivante :

$$\text{(I)}\qquad \frac{\mathrm{Sin}\,(ab)}{\mathrm{Sin}\,(ad)}:\frac{\mathrm{Sin}\,(cb)}{\mathrm{Sin}\,(cd)}=\frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD}$$

Chaque terme de cette proportion, est un rapport ; par exemple, $\frac{CB}{CD}$ est le rapport des deux segments suivant lesquels le segment BD est divisé par le point C qui peut lui être intérieur ou extérieur. (Dans la fig. 29, le point C est en dehors de BD) : et $\frac{\mathrm{Sin}\,(cb)}{\mathrm{Sin}\,(cd)}$ est le rapport des sinus deux angles suivant lesquels l'angle $(bd)$ est divisé par le rayon $c$. Le premier et le second membre de l'équation (I) sont donc les rapports de deux rapports ; ils constituent ce qu'on appelle un *double rapport* ou un *rapport anharmonique* (cette dernière expression est le plus généralement usitée en France). On reconnaît facilement la manière particulière dont est formé le rapport anharmonique précédent. On obtient le rapport anharmonique de droite entre les segments limités par A, B, C et D en cherchant d'abord les rapports suivants lesquels le segment BD est divisé par les deux autres points A et C et en divisant ces deux rapports l'un par l'autre ; l'autre rapport anharmonique entre les sinus s'établit d'une manière entièrement analogue. De la façon même dont nous avons déduit notre équation, il résulte aussi qu'il est indifférent de considérer tel segment ou tel angle comme étant celui qu'on divise, pourvu qu'on établisse les deux rapports anharmoniques de la même manière ; car un autre choix de nos quatre triangles nous aurait conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(ad)}{\mathrm{Sin}\,(ac)}:\frac{\mathrm{Sin}\,(bd)}{\mathrm{Sin}\,(bc)}=\frac{AD}{AC}:\frac{BD}{BC}$$

et l'on peut sans difficulté établir encore plusieurs autres équations semblables pour ces points et ces rayons.

Il est digne de remarque que ces équations continuent à subsister si nous amenons la ponctuelle $u$ dans une autre position quelconque oblique par rapport au faisceau de rayons. Ainsi, sur une autre droite quelconque $u_1$ (fig. 29, page 56), qui coupe respectivement les rayons $a,b,c,d$ en $A_1,B_1,C_1,D_1$, nous aurons des segments pour lesquels a lieu l'équation suivante analogue à (I) :

$$\text{(II)} \qquad \frac{\operatorname{Sin}(ab)}{\operatorname{Sin}(ad)} : \frac{\operatorname{Sin}(cb)}{\operatorname{Sin}(cd)} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}$$

et de même A.B,C et D seront projetés d'un point quelconque $S_1$ différent de S (fig. 28, page 56) par quatre rayons $a_1,b_1,c_1,d_1$ tels que

$$\text{(III)} \qquad \frac{\operatorname{Sin}(a_1b_1)}{\operatorname{Sin}(a_1d_1)} : \frac{\operatorname{Sin}(c_1b_1)}{\operatorname{Sin}(c_1d_1)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$$

*Donc un rapport anharmonique du genre de ceux qu'on vient de définir, entre quatre éléments d'une forme rectiligne ou d'un faisceau de rayons, ne change pas de valeur si l'on remplace ces éléments par les éléments correspondants d'une forme rectiligne ou d'un faisceau projectif.*

Comme deux formes fondamentales élémentaires projectives peuvent toujours être considérées comme la première et la dernière d'une série de formes fondamentales, dont chacune est perspective avec celle qui la suit, il en résulte que :

*Si deux formes fondamentales sont projectives, tout rapport anharmonique entre quatre éléments quelconques de l'une est égal au rapport anharmonique analogue des quatre éléments correspondants de l'autre forme.*

Par exemple, si $u$ et $u_1$ sont deux ponctuelles projectives et si aux points A,B,C,D de $u$ correspondent les points $A_1,B_1,C_1,D_1$ de $u_1$, il existe entre les segments déterminés par ces points, la proportion

$$\text{(IV)} \qquad \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}$$

Steiner a fait usage du théorème ci-dessus pour définir la projectivité et, partant de là, il a pris le calcul des rapports anharmoniques pour base de son ouvrage « *Systematische entwickelung, etc.* ». Le théorème a lieu aussi pour les faisceaux de plans ; car les angles que font entre eux les plans d'un faisceau sont mesurés par les angles d'un faisceau de rayons dont le plan est perpendiculaire à l'axe du faisceau de plans et qui lui est perspectif.

Enfin, c'est encore ici le lieu d'indiquer les relations métriques qui existent entre les angles d'un faisceau harmonique de rayons ou de plans. Soient $a,b,c,d$ les éléments d'un pareil faisceau, et A,B,C,D, (fig. 20, page 47) les quatre points harmoniques où ils sont coupés par une droite quelconque. On a pour ces derniers la relation $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ (page 47) et par suite, à cause de (I), on obtient pour la relation cherchée :

(V) $$\frac{\text{Sin}\,(ab)}{\text{Sin}\,(bc)} = \frac{\text{Sin}\,(ad)}{\text{Sin}\,(cd)}$$

# SIXIÈME LEÇON.

## Courbes, faisceaux et surfaces coniques du second ordre.

Dans la dernière leçon nous sommes arrivés aux deux importantes propriétés qui suivent :

Si deux faisceaux projectifs de rayons sont situés dans le même plan, mais ne sont ni concentriques, ni perspectifs, l'ensemble des points d'intersection de leurs rayons homologues constitue une *courbe* ou *ponctuelle du second ordre* qui n'a jamais plus de deux points communs avec une droite.

Si deux ponctuelles projectives sont dans un même plan, mais ne sont ni sur la même droite, ni perspectives, l'ensemble de toutes les droites qui joignent leurs points homologues constitue un *faisceau de rayons du second ordre* qui n'a jamais plus de deux rayons communs avec un faisceau de premier ordre.

Pour donner de suite une idée bien déterminée de ces formes du second ordre, nous ajouterons que les courbes du second ordre sont identiques avec les coniques et que, par suite, on les obtient aussi en coupant par un plan un cône ordinaire à base circulaire. Un faisceau du second ordre se compose au contraire de toutes les tangentes d'une conique. Nous démontrerons plus loin ces deux assertions.

Aux deux théorèmes précédents de la géométrie du plan correspondent les suivants dans la géométrie de la gerbe :

Si deux faisceaux projectifs de plans, dont les axes se coupent, ne

Si deux faisceaux projectifs de rayons, dont les plans se coupent,

sont pas perspectifs, l'ensemble des droites d'intersection de leurs plans homologues constitue une *surface conique du second ordre*, qui n'a jamais plus de deux de ces droites d'intersection communes avec un plan. Le point d'intersection des axes, par lequel passent tous les rayons de la surface conique, s'appelle le *centre* de cette surface.

sont concentriques sans être perspectifs, tous les plans qui réunissent les rayons homologues deux à deux constituent un *faisceau de plans du second ordre*, qui n'a jamais plus de deux plans communs avec un faisceau de plans du premier ordre. Le centre des faisceaux, par lequel passent tous les plans du faisceau du second ordre, s'appelle le *centre* de ce dernier faisceau.

Nous pouvons engendrer les surfaces coniques et les faisceaux de plans du second ordre au moyen des courbes et des faisceaux de rayons du second ordre, en projetant ces dernières formes d'un point non situé dans leur plan. Car les deux faisceaux projectifs S et $S_1$ (fig. 51 et 53 ci-après), qui engendrent une courbe du second ordre, sont projetés d'un point O (notre œil, par exemple) suivant deux faisceaux projectifs de plans qui donnent naissance à une surface conique du second ordre, passant par la courbe et ayant son centre en O. De même, les deux ponctuelles $u$ et $u_1$ (fig. 52 ci-après), qui engendrent un faisceau de rayons du second ordre, sont projetées de O suivant deux faisceaux projectifs de rayons, et ces derniers à leur tour donnent naissance à un faisceau de plans du second ordre, qui passe par le faisceau de rayons et qui a son centre en O. Réciproquement, tout plan qui ne passe pas par le sommet d'une surface conique du second ordre, la coupe suivant une courbe du second ordre ; en effet, les deux faisceaux projectifs de plans, qui engendrent la surface conique sont coupés par le plan sécant suivant deux faisceaux projectifs de rayons qui engendrent la courbe d'intersection. Si donc, il se trouvait plus de deux rayons de la surface conique dans un plan, il y aurait aussi plus de deux points de la courbe d'intersection sur une droite; ce qui est impossible, d'après le théorème qu'on a énoncé à nouveau en commençant. Le même raisonnement s'appliquerait aisément au faisceau de plans du second ordre. Nous reconnaissons en même temps l'exactitude du théorème suivant :

Une courbe ou un faisceau de rayons du second ordre est projeté d'un point, non situé dans son plan, suivant une surface conique ou suivant un faisceau de plans du second ordre.

Une surface conique ou un faisceau de plans du second ordre est coupé par un plan, ne passant pas par son centre, suivant une courbe ou suivant un faisceau de rayons du second ordre.

On voit de la sorte que tous les résultats qu'on obtient pour les formes planes du second ordre s'appliquent immédiatement par projection aux formes analogues dans la gerbe. C'est pour cette raison que nous nous bornerons à étudier les courbes et les faisceaux de rayons du second ordre : et nous énoncerons tout d'abord les propriétés suivantes :

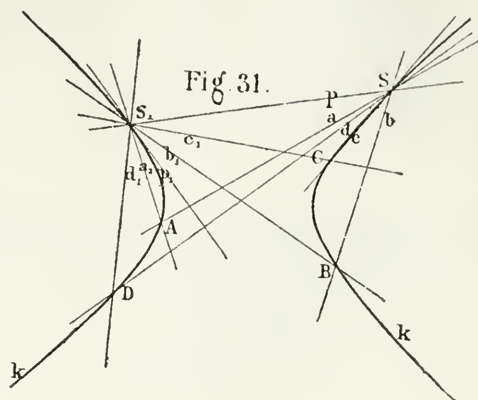
La courbe $k$ du second ordre, engendrée par les intersections de deux faisceaux projectifs de rayons S et $S_1$ (fig. 51) passe par les centres de ces faisceaux. En effet, les faisceaux n'étant pas perspectifs, au rayon $\overline{SS_1}$, ou $p$ du faisceau S, c'est-à-dire à la droite qui joint les deux centres, il correspond dans le faisceau $S_1$ un rayon $p_1$ différent de $\overline{SS_1}$. Le point $S_1$ d'intersection des rayons $p$ et $p_1$ appartient donc à la courbe $k$; et il en est de même pour le point S.

Le faisceau de rayons du second ordre K, qui est engendré par les deux ponctuelles projectives $u$ et $u_1$ (fig. 52), contient aussi les droites $u$ et $u_1$, lieux des ponctuelles. En effet, les ponctuelles n'étant pas perspectives, au point $u\ u_1$ ou P de la ponctuelle $u$, il correspond dans $u_1$ un point $P_1$ différent de P. La droite $u_1$, que joint P et $P_1$, fait donc partie du faisceau K ; et il en est de même pour $u$.

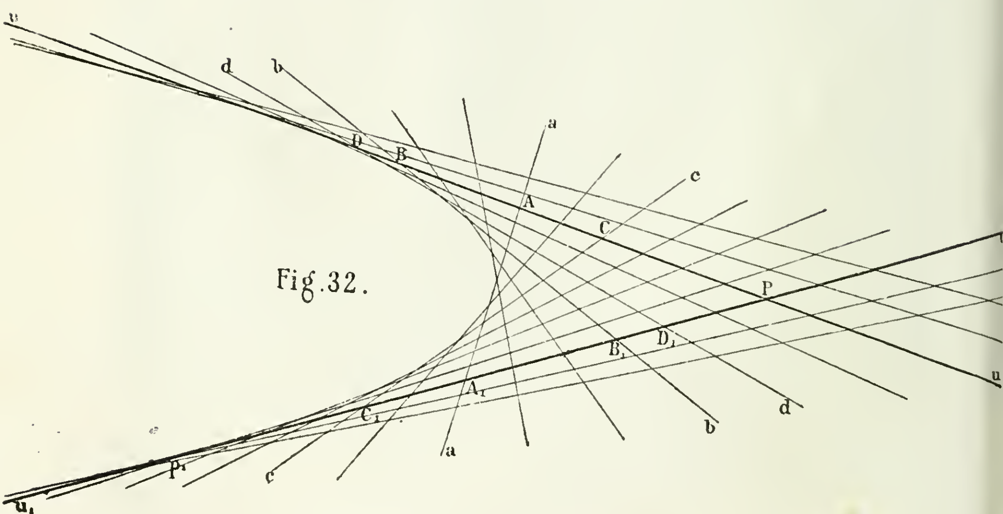
Dans la figure 51, $p_1$ est le seul rayon de $S_1$ qui n'ait avec la courbe $k$ qu'un seul point commun, le point $S_1$. Tout rayon $a_1$ du faisceau $S_1$, différent de $p_1$, sera coupé par le rayon $a$ différent de $p$, en un autre point de la courbe $k$ différent de $S_1$. Pour cette raison, nous dirons que le rayon $p_1$ *touche* la courbe $k$ en $S_1$, ou qu'il est *tangent* à cette courbe en ce point.

De même, dans la figure 52, $P_1$ est le seul point de $u_1$ par lequel il ne passe qu'un seul rayon $u$ du faisceau K. En effet, par tout autre point

$A_1$ de $u_1$, il passe encore un second rayon $AA_1$ de $K$; et comme A ne se




confond pas avec P, $\overline{AA_1}$ ne peut pas coïncider avec $u_1$. Nous dirons




pour cette raison que $P_1$ est un *point de contact* du faisceau K sur le rayon $u_1$. Nous pourrons alors énoncer les propriétés suivantes :

Au rayon commun de deux faisceaux projectifs de rayons correspond dans chacun d'eux une tangente à la courbe du second ordre engendrée par ces faisceaux.

Au point commun de deux ponctuelles projectives correspond sur chacune d'elles un point de contact du faisceau du second ordre engendré par ces ponctuelles.

On se rappelle qu'étant données deux formes fondamentales de première espèce, il n'y a qu'une seule manière de les rapporter projectivement l'une à l'autre, de telle sorte qu'à trois éléments arbitrairement choisis dans l'une correspondent trois éléments déterminés de l'autre. Supposons que nous voulions construire une courbe du second ordre, au moyen de deux faisceaux projectifs de rayons. Dans le plan qui contient $SS_1$, nous pouvons prendre arbitrairement non seulement les sommets S et $S_1$ (fig. 51) des faisceaux, mais encore trois autres points de la courbe, qui sont les points d'intersection de trois couples de rayons correspondants. Si l'un de ces trois points se confond avec S, nous connaîtrons par là même la tangente en ce point; il peut en être de même pour $S_1$.

Supposons que nous voulions engendrer un faisceau de rayons du second ordre, au moyen de deux ponctuelles projectives. Dans le plan qui passe par les droites $u$ et $u_1$, lieux des ponctuelles (fig. 52), nous pouvons prendre à volonté non seulement les droites $u$ et $u_1$, mais encore trois autres rayons du faisceau qui joignent deux à deux les points appartenant à trois couples de points correspondants. Si l'une de ces droites se confond avec $u$, nous connaîtrons le point de contact du faisceau du second ordre sur le rayon $u$; il peut en être de même pour $u_1$.

Il est donc possible de résoudre les problèmes :

Construire une courbe du second ordre, connaissant cinq de ses points, ou quatre points et la tangente à l'un d'eux S, ou enfin trois points et les tangentes à deux d'entre eux, S et $S_1$.

Construire un faisceau du second ordre, connaissant cinq de ses rayons, ou quatre rayons et le point de contact de l'un d'eux $u$, ou enfin trois rayons et les points de contact de deux d'entre eux, $u$ et $u_1$.

On les ramène aux problèmes suivants :

Deux faisceaux projectifs de rayons S et $S_1$ sont donnés par trois couples de rayons correspondants $a$ et $a_1$, $b$ et $b_1$, $c$ et $c_1$. Construire autant de points qu'on

Deux ponctuelles projectives sont données par trois couples de points correspondants A et $A_1$, B et $B_1$, C et $C_1$. Construire autant de rayons qu'on voudra du fais-

voudra de la courbe $k$ du second ordre qu'ils engendrent par leurs intersections.

ceau K de rayons du second ordre, qu'elles engendrent.

La question consiste en ceci : un élément quelconque étant pris comme quatrième élément d'une des formes fondamentales, trouver celui qui lui correspond dans l'autre forme; en effet, on obtiendra de la sorte un nouvel élément de la forme du second ordre engendrée par les deux précédentes. Nous pourrions renvoyer à la construction que nous avons fait connaître dans la leçon précédente (page 60). Nous allons néanmoins traiter le problème actuel encore une fois et d'une manière

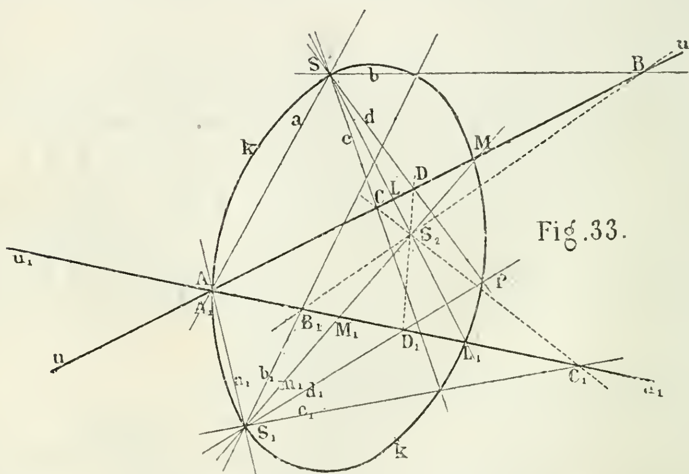


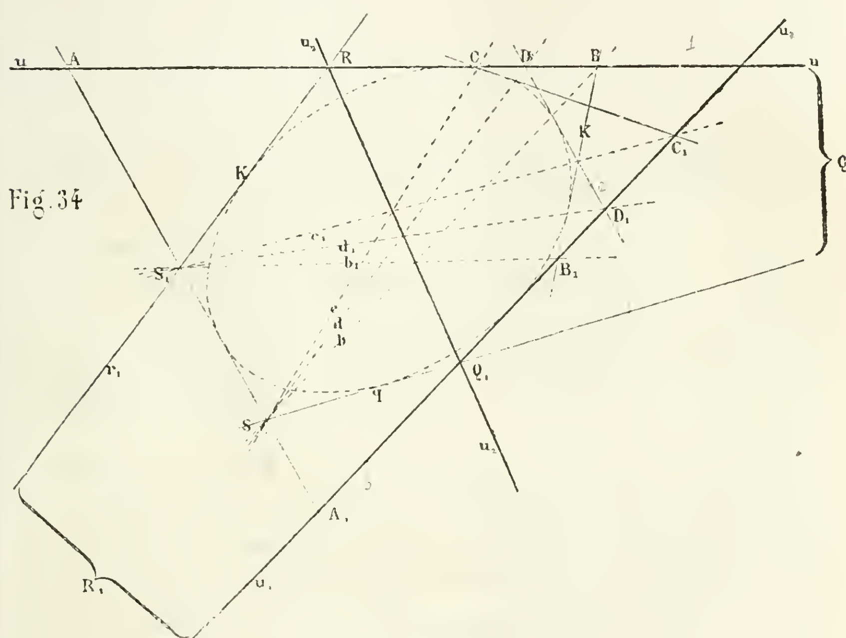
Fig. 33.

plus symétrique; sa solution nous conduira du reste à plusieurs théorèmes importants. Elle consiste à chercher une troisième forme qui soit perspective à chacune des formes données.

Par le point d'intersection $aa_1$ de deux rayons correspondants quelconques $a$ et $a_1$ appartenant aux faisceaux projectifs S et $S_1$ (fig. 33), menons deux droites $u$ et $u_1$. La première coupe le faisceau S ($abc$) suivant une ponctuelle $u$ (ABC) et la seconde rencontre le faisceau $S_1$ ($a_1b_1c_1$) suivant une

Sur la droite $\overline{AA_1}$ qui joint deux points correspondants A et $A_1$ des ponctuelles projectives $u$ et $u_1$, prenons deux points S et $S_1$ comme sommets de deux faisceaux de rayons. Le premier S ($abc$) projette la ponctuelle $u$ (ABC) et le second $S_1$ ($a_1b_1c_1$) projette la ponctuelle $u_1$ ($A_1B_1C_1$). Ces faisceaux

ponctuelle $u_1$ ($A_1B_1C_1$). Ces deux ponctuelles $u$ et $u_1$ sont projectives entre elles, parce qu'elles sont les sections de deux faisceaux projectifs. De plus, elles sont perspectives, parce que deux points homologues A et $A_1$ sont confondus avec leur point d'intersection (page 56). Elles sont donc les sec- sont projectifs entre eux, parce qu'ils sont les projections de deux ponctuelles projectives. De plus, ils sont perspectifs, parce que deux rayons homologues $a$ et $a_1$ se confondent avec la droite $SS_1$ qui joint leurs sommets (page 56). Ils sont donc les projections d'une même ponctuelle à laquelle appartiennent




tions d'un même faisceau $S_2$, au sommet duquel se coupent les rayons $\overline{BB_1}$ et $\overline{CC_1}$.

Pour avoir maintenant le rayon $d_1$ de $S_1$ qui correspond à un rayon quelconque $d$ du faisceau S, projetons le point $du$ ou D du sommet $S_2$ sur $u_1$ en $D_1$; $\overline{D_1S_1}$ est alors le rayon cherché $d_1$. Le point $dd_1$, les points d'intersection de $bb_1$ et et $cc_1$.

Pour avoir maintenant le point $D_1$ de $u_1$ qui correspond à un point quelconque D de $u$, coupons la droite $\overline{DS}$ ou $d$ par $u_2$ et de $S_1$ projetons le point d'intersection sur la droite $u_1$ à l'aide du rayon $d_1$. La projection $d_1u_1$ est le point cher-

ou P, est sur la courbe $k$ du second ordre.

ché $D_1$. Le rayon $DD_1$ appartient au faisceau K du second ordre[1].

Les constructions que nous venons d'effectuer donnent du même coup la solution des problèmes suivants :

Sur un rayon quelconque de S (ou de $S_1$), trouver le second point d'intersection [différent de S (ou $S_1$)] de ce rayon avec la courbe du second ordre.

Par un point quelconque de $u$ (ou de $u_1$), mener le second rayon [différent de $u$ (ou $u_1$)], qui fait partie du faisceau de rayons du second ordre.

Cherchons, d'après la manière qui vient d'être indiquée, les deux rayons qui correspondent au rayon commun des deux faisceaux, ou les deux points qui correspondent au point commun des deux ponctuelles. Nous aurons ainsi la solution des problèmes ci-après :

Construire au centre de deux faisceaux projectifs de rayons les tangentes à la courbe du second ordre qu'ils engendrent.

Étant données deux ponctuelles projectives qui engendrent un faisceau de rayons du second ordre, trouver les points de contact de ce faisceau situés sur les ponctuelles.

La construction que nous avons indiquée nous conduit de la manière suivante à un autre résultat important. D'une part (théorème de gauche) (fig. 33), menons le rayon $\overline{S_1S_2}$ ou $m_1$ qui est coupé par $u_1$ au point $M_1$ et par $u$ au point M. Son correspondant dans le faisceau S est le rayon $\overline{SM}$ ; en effet, si l'on amène $D_1$ à coïncider avec $M_1$, D et P coïncident en même temps avec M. Le point M est donc le second point d'intersection de la courbe $k$ par la droite $u$. De même le point $L_1$, où $u_1$ coupe la courbe $k$ pour la seconde fois, se trouve sur la droite $\overline{SS_2}$. Nous rappellerons ici que les droites $u$ et $u_1$ choisies arbitrairement ne sont assujetties qu'à une seule condition, celle de se couper en un point de la courbe $k$.

D'autre part (théorème de droite) (fig. 34), joignons le point d'intersection $u_1u_2$ ou $Q_1$ avec S. Le point Q de $u$ qui correspond au point $Q_1$ de $u_1$ est

---

1. Dans la figure 34, le faisceau K du second ordre est indiqué par le moyen de la courbe qu'il enveloppe.

situé sur cette droite, ou, autrement dit, $\overline{SQ_1}$ est un rayon du faisceau K du second ordre; de même le rayon $\overline{S_1R}$ qui projette le point d'intersection de $u$ et $u_2$ à partir du sommet $S_1$ est aussi un rayon de K. Or les points S et $S_1$ ont été arbitrairement choisis sur un rayon $a$ du faisceau K. Nous avons donc résolu de cette manière le double problème suivant :

Étant donnée une droite $u$, qui coupe une courbe du second ordre $k$ en un point donné A, trouver son second point d'intersection avec $k$.

Étant donné un point S, situé sur un rayon donné d'un faisceau K du second ordre, tracer le second rayon du faisceau qui passe par ce point.

Notre construction nous conduit pour ainsi dire d'elle-même aux deux importants théorèmes de Pascal et de Brianchon, dont nous avons parlé dans l'introduction. En outre des cinq points S, $S_1$, A, M et $L_1$, déterminons encore un sixième point P quelconque sur la courbe $k$ (fig. 33). Par suite de la construction même de P, le point d'intersection D de $\overline{SP}$ et de $u$, et le point d'intersection $D_1$ de $\overline{S_1P}$ et $u_1$ sont situés sur une même droite passant par $S_2$. Mais D, $D_1$ et $S_1$ sont précisément les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone $SPS_1MAL_1$.

En outre des cinq rayons $u$, $u_1$, $\overline{SS_1}$, $\overline{SQ_1}$ et $\overline{SR_1}$ du faisceau K du second ordre, construisons encore un sixième rayon $\overline{DD_1}$ (fig. 34). Par suite de la construction même, les droites $\overline{SD}$ et $\overline{S_1D_1}$ doivent se couper sur la droite $\overline{Q_1R}$ ou $u_2$. Mais ces trois droites, qui passent par un seul et même point, sont les diagonales principales de l'hexagone $SS_1RDD_1Q_1$, c'est-à-dire les droites qui joignent ses sommets opposés.

Nous avons ainsi démontré les propositions suivantes:

*Théorème de Pascal.*

Dans tout hexagone simple, inscrit dans une courbe du second degré, les trois couples de côtés opposés se coupent en trois points situés sur une même droite.

*Théorème de Brianchon.*

Dans tout hexagone, formé par six rayons d'un faisceau du second ordre, les droites qui joignent les trois couples de sommets opposés se coupent en un même point.

Rigoureusement parlant, il nous reste encore à faire disparaître les doutes qui pourraient subsister sur l'exactitude absolue de ces théorèmes.

Les deux hexagones que nous avons considérés sont composés d'éléments qui n'ont pas été choisis arbitrairement ; par exemple, pour le théorème de gauche, les sommets A, M, $L_1$ et P sont bien quelconques, mais S et $S_1$ ne sont pas des points pris arbitrairement sur la courbe. Toutefois, il n'est pas présumable que les sommets S et $S_1$ des faisceaux projectifs, qui engendrent la courbe, se distinguent des autres points par des propriétés telles que le théorème de Pascal, par exemple, n'ait lieu que pour les hexagones inscrits qui comptent S et $S_1$ au nombre de leurs sommets. Nous allons dissiper tous les doutes en montrant que deux autres points quelconques de la courbe peuvent, tout aussi bien que S et $S_1$, être les sommets de faisceaux projectifs, qui engendreront cette même courbe ; et que, par conséquent, nous pouvons remplacer S et $S_1$ par deux autres points pris arbitrairement sur la courbe. Il en sera de même pour les droites $u$ et $u_1$ (théorème de droite), qui figurent au nombre des côtés de l'hexagone de Brianchon.

Imaginons que, dans l'hexagone de Pascal $SPS_1MAL_1$ (fig. 53), tous les sommets restent fixes à l'exception de A et que ce dernier seul se déplace sur la courbe. La droite $\overline{L_1A}$ ou $u_1$ pivote autour de $L_1$ et la droite $\overline{MA}$ ou $u$ autour de M ; les points $D_1$ et D se meuvent sur les droites fixes $d_1$ et $d$, mais de telle sorte que la droite $\overline{DD_1}$ passe toujours par le point fixe $S_2$. Le théorème de Pascal sera encore vrai pour tout hexagone ainsi constitué. Les points $D_1$ et D décrivent en conséquence deux ponctuelles perspectives $d_1$ et $d$ qui sont les sections du faisceau de rayons $S_2$. Mais $u_1$ et $u_2$ décrivent en même temps autour de $L_1$ et M respectivement deux faisceaux projectifs de rayons, qui sont les projections des deux ponctuelles perspectives $d_1$ et $d$. Nous pouvons donc regarder la courbe $k$ comme engendrée par deux faisceaux projectifs de rayons $L_1$ et M, dont les sommets sont deux points arbitrairement choisis sur la courbe.

Imaginons de même que, dans l'hexagone de Brianchon $SS_1RDD_1Q_1$ (fig. 54) tous les côtés restent fixes à l'exception du côté $SS_1$ et que ce dernier se déplace, mais sans jamais cesser d'être un rayon du faisceau du second ordre K. Le point $S_1$ décrit alors une ponctuelle $\overline{S_1R}$ ou $r_1$ et le point S une ponctuelle $\overline{SQ_1}$, ou $q$, projective à la précédente. En

effet, le point d'intersection des diagonales $\overline{S_1D_1}$ et $\overline{SD}$ se meut sur la droite fixe $Q_1R$ et y décrit une ponctuelle $u_2$, à laquelle $q$ et $r_1$ sont perspectives. Nous pouvons donc regarder aussi le faisceau du second ordre comme engendré par les ponctuelles projectives $q$ et $r_1$. Nous avons démontré de la sorte que les théorèmes de Pascal et de Brianchon sont vrais d'une manière générale et nous arrivons en même temps aux théorèmes suivants, qui sont fondamentaux pour les courbes et les faisceaux de rayons du second ordre :

Une courbe du second ordre est projetée de deux quelconques de ses points suivant deux faisceaux projectifs de rayons; les rayons correspondants dans ces deux faisceaux sont ceux qui joignent leurs centres à un même point de la courbe.

Un faisceau de rayons du second ordre est coupé par deux quelconques de ses rayons suivant deux ponctuelles projectives; les points correspondants de ces ponctuelles sont ceux qui sont situés sur un même rayon du faisceau.

Nous nous servirons de ces théorèmes dans la suite pour rapporter projectivement les formes du second ordre les unes aux autres et aux formes fondamentales uniformes (ou du premier ordre), de la même manière que nous l'avons fait précédemment pour ces dernières. A cet effet, nous nous appuierons sur les deux derniers théorèmes pour établir les définitions suivantes :

Quatre points d'une courbe du second ordre sont dits *points harmoniques*, quand les rayons qui les projettent d'un point quelconque, et par conséquent d'un cinquième point quelconque de la courbe, sont quatre rayons harmoniques.

Quatre rayons d'un faisceau du second ordre sont dits *rayons harmoniques*, quand un rayon quelconque, et par conséquent un cinquième rayon quelconque du faisceau, les coupe en quatre points harmoniques.

Donc, étant donnés trois points d'une courbe, ou trois rayons d'un faisceau de second ordre, on peut déterminer sans ambiguïté et construire immédiatement le quatrième harmonique, à la condition qu'on sache quel est celui des trois points ou rayons donnés dont l'élément cherché doit être séparé.

En ayant égard à un théorème énoncé précédemment sur les tan-

gentes aux courbes du second ordre et les points de contact des faisceaux du second ordre (page 70), nous déduisons des théorèmes fondamentaux que :

Par tout point d'une courbe du second ordre passe une tangente à cette courbe.

Sur tout rayon d'un faisceau du second ordre est situé un point de contact de ce faisceau.

Toute courbe du second ordre est donc enveloppée par un système de tangentes et tout faisceau de rayons du second ordre enveloppe un système de points de contact. Nous démontrerons dans la prochaine leçon que ce système de tangentes et ce système de points de contact constituent respectivement un faisceau de rayons et une ponctuelle du second ordre.

Les théorèmes suivants expriment d'autres propriétés très importantes des courbes et faisceaux du second ordre que nous emploierons souvent :

Deux courbes du second ordre coïncident lorsqu'elles ont en commun cinq points, ou quatre points et la tangente en l'un d'eux S, ou trois points et les tangentes en deux de ces points, S et S′.

En effet, projetons tous les points de ces deux courbes du point commun S au moyen d'un faisceau de rayons. Ce faisceau est projectif aux deux faisceaux qui projettent les deux courbes du point commun $S_1$. Mais ces deux derniers sont identiques, puisqu'ils ont trois rayons correspondants communs; ce sont : dans le premier cas, les trois rayons qui vont aux points communs autres que S et $S_1$ ; dans le second, ce sont les rayons qui vont aux deux autres points com-

Deux faisceaux de rayons du second ordre coïncident lorsqu'ils ont en commun cinq rayons, ou quatre rayons et le point de contact de l'un d'eux $u$, ou trois rayons et les points de contact de deux d'entre eux, $u$ et $u_1$.

En effet, coupons les rayons des deux faisceaux suivant une ponctuelle, au moyen du rayon commun $u$. Cette ponctuelle est projective aux deux ponctuelles suivant lesquelles les deux faisceaux sont coupés par le rayon commun $u_1$. Mais ces deux dernières sont identiques, parce qu'elles ont trois points correspondants communs; ce sont : ou les trois points situés sur chacun des rayons différents de $u$ et $u_1$ ; ou les points situés sur deux rayons différents de $u$ et $u_1$

muns et le rayon $\overline{S_1S}$, quand les deux courbes ont une tangente commune en S; enfin dans le troisième cas, ce sont le rayon qui va au troisième point commun, la droite $\overline{S_1S}$ et la tangente commune en $S_1$. Tout rayon de S projette donc un point commun aux deux courbes.

et le point $uu_1$ quand les faisceaux ont un point de contact commun situé sur $u$; ou enfin les points situés sur le rayon différent de $u$ et $u_1$, le point $uu_1$ et le point de contact commun situé sur $u_1$. Donc, par tout point de $u$, il passe un rayon commun aux deux faisceaux.

---

# SEPTIÈME LEÇON.

## Conséquences des théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Les propriétés importantes que nous avons établies pour l'hexagone, dans les courbes et les faisceaux de rayons du second ordre, nous conduisent à d'autres théorèmes non moins importants sur les pentagones, les quadrilatères et les triangles. Mais il convient auparavant de faire quelques remarques sur les tangentes des courbes et les points de contact des faisceaux du second ordre.

Nous avons appelé tangente à la courbe en un point $S_1$ (fig. 51) une droite $p_1$ située dans le plan de la courbe et qui n'a que le point $S_1$ commun avec cette courbe ; et nous avons trouvé qu'il ne peut exister qu'une seule tangente pour chaque point de la courbe. Tout autre rayon $a_1$ du plan, qui passe par $S_1$, coupe la courbe en un second point A. Faisons pivoter le rayon $a_1$ autour de $S_1$ : le point d'intersection A parcourt la courbe et s'approche indéfiniment du point $S_1$ quand $a_1$ s'approche indéfiniment de la tangente $p_1$. *La tangente se présente donc à nous comme la position limite de la droite qui joint deux points de la courbe se rapprochant indéfiniment l'un de l'autre ;* et cette définition s'applique non seulement aux tangentes des courbes du second ordre, mais à celles de courbes quelconques.

D'une manière analogue, nous avons appelé point de contact d'un rayon $u_1$ d'un faisceau K du second degré le point $P_1$ (fig. 52) par lequel il ne passe qu'un seul rayon $u_1$ de ce faisceau, et nous avons trouvé que, sur chaque rayon du faisceau K, il n'y a qu'un seul point de contact. Par tout autre point $A_1$ de $u_1$ il passe donc encore un second rayon

$a$ du faisceau. Faisons mouvoir $A_1$ sur $u_1$, $a$ parcourt le faisceau K et s'approche indéfiniment du rayon $u_1$ quand $A_1$ s'approche indéfiniment du point P. *Le point de contact se présente ainsi comme la limite du point d'intersection de deux rayons du faisceau qui vont en se rapprochant indéfiniment.*

D'après cela, si dans un hexagone inscrit dans une courbe du second ordre, deux sommets consécutifs se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, le côté qui les joint se trouve remplacé par une tangente à la courbe. Et si dans un hexagone, dont les côtés appartiennent à un faisceau du second ordre, deux côtés consécutifs se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, le sommet suivant lequel ils se coupent sera remplacé par un point de contact du faisceau. Suivant que un, deux ou trois couples d'éléments voisins coïncident, l'hexagone se transforme en un pentagone, un quadrangle ou un triangle.

En conséquence, pour le pentagone, les théorèmes de Pascal et de Brianchon s'énonceront ainsi qu'il suit :

Dans tout pentagone inscrit dans une courbe du second ordre, les points d'intersection de deux couples de côtés non consécutifs déterminent une droite, et le point d'intersection du cinquième côté et de la tangente au sommet opposé se trouve sur cette droite (fig. 35).

Dans tout pentagone formé de rayons d'un faisceau du second ordre, les diagonales qui joignent deux couples de sommets opposés se coupent en un point, et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé passe par ce point (fig. 36).

Fig. 35.

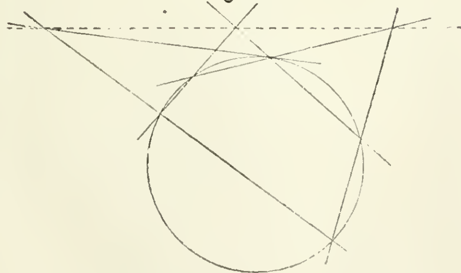
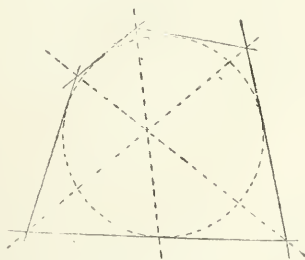


Fig. 36

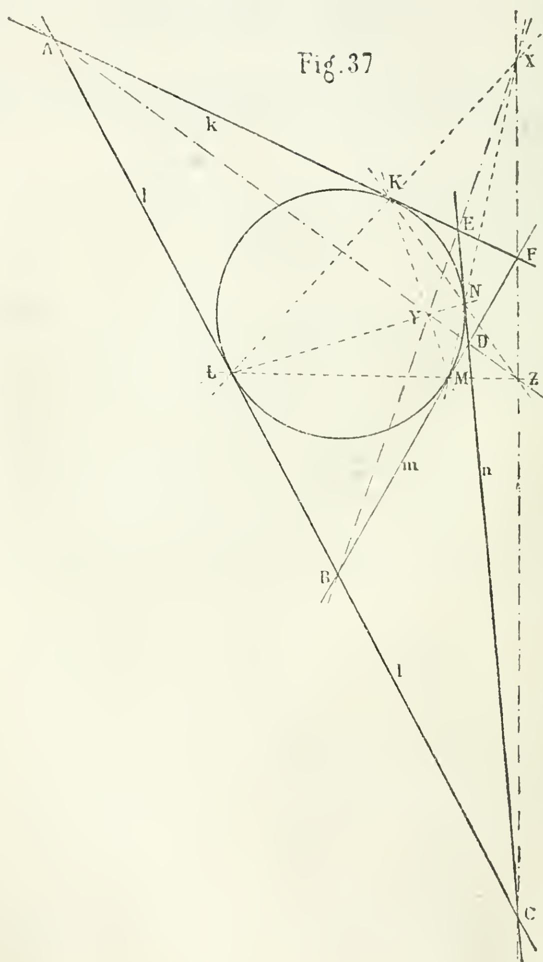


Cette double proposition renferme la solution des problèmes suivants :

Étant donnés cinq points quelconques d'une courbe du second ordre, construire les tangentes en ces points en ne se servant que de la règle (fig. 35).

Étant donnés cinq rayons quelconques d'un faisceau du second ordre, construire les points de contact situés sur ces rayons, en ne se servant que de la règle (fig. 36).

Pour le quadrangle, nous obtenons les propositions suivantes (fig. 37).




Dans tout quadrangle inscrit dans une courbe du second ordre,

Dans tout quadrilatère formé de rayons d'un faisceau du second

les points d'intersection des côtés opposés et ceux des tangentes en deux sommets opposées quelconques sont tous situés sur une même droite.

ordre, les diagonales et les droites qui joignent les points de contact des deux côtés opposés quelconques se coupent en un même point.

Enfin le triangle nous fournit les énoncés qui suivent :

Étant donné un triangle inscrit dans une courbe du second ordre, les trois points où les côtés de ce triangle sont rencontrés par les tangentes aux sommets opposés sont situés sur une même droite.

Étant donné un triangle formé de rayons d'un faisceau du second ordre, les droites qui joignent chacun des sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent en un seul et même point.

Tous ces théorèmes, qu'on peut employer pour résoudre une série de problèmes simples (par exemple, ceux de la page 71), peuvent aussi s'établir directement, sans recourir à l'hexagone. Comme exemple, nous donnerons la démonstration directe du théorème relatif au quadrangle, parce qu'elle nous fera découvrir en même temps des propriétés nouvelles et fort remarquables des formes fondamentales projectives, et que de plus nous nous servirons des théorèmes relatifs au quadrilatère dans des recherches ultérieures.

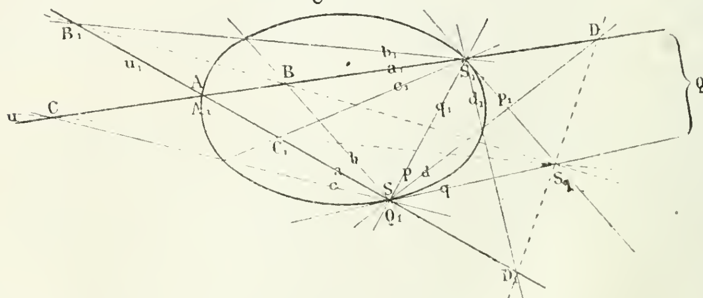
Étant donnés deux faisceaux projectifs de rayons, $s$ et $s_1$ (fig. 55), pour trouver dans l'un d'eux le rayon qui correspond à un rayon de l'autre, nous avons fait usage d'un troisième faisceau de rayons $s_2$, perspectif aux deux premiers. A cet effet, nous avons coupé $s$ et $s_1$ respectivement suivant les ponctuelles $u$ et $u_1$ au moyen de deux droites menées par le point d'intersection A de deux rayons homologues $a$ et $a_1$. Comme ces ponctuelles sont perspectives, le faisceau $s_2$, dont elles sont des sections, est le faisceau cherché.

Ces conclusions subsistent encore lorsque $u$ coïncide avec $a_1$ et $u_1$ avec $a$; de sorte que (fig. 58) les points $ba_1$ et $b_1a$ (ou B et $B_1$), ou $ca_1$ et $c_1a$ (ou C et $C_1$) etc. suivant lesquels deux rayons correspondants $a$ et $a_1$ sont mutuellement coupés par deux autres rayons $b$ et $b_1$, ou $c$ et $c_1$, sont sur une même ligne droite avec un point fixe $s_2$.

Si nous menons par ce point $s_2$ une droite quelconque $\overline{DD_1}$ qui coupe respectivement en D et $D_1$ les rayons $a_1$ et $a$, $\overline{SD}$ et $\overline{S_1D_1}$ sont des

rayons correspondants des faisceaux S et $S_1$. Faisons maintenant coïncider $D_1$ avec S; $\overline{SD}$ devient alors $\overline{SS_2}$ ou $q$, de sorte que ce rayon de S a pour correspondant dans $S_1$ le rayon $\overline{S_1S}$ ou $q_1$ qui joint les centres S et $S_1$ des faisceaux. La droite $SS_2$ ou $q$ est donc une tangente à la courbe du second ordre engendrée par S et $S_1$ et il en est de même pour $\overline{S_1S_2}$ ou $p_1$. En d'autres termes, le point fixe $S_2$ est alors le point d'intersection des deux tangentes $q$ et $p_1$ qui appartiennent respectivement à S et $S_1$, c'est-à-dire des deux rayons qui correspondent au rayon commun $\overline{SS_1}$ dans chacun des deux faisceaux S et $S_1$. Nous parviendrions donc toujours à ce même point $S_2$, en faisant coïncider avec les droites $u$ et $u_1$, soit $a$ et $a_1$, soit tout autre couple de rayons correspon-

Fig 38.

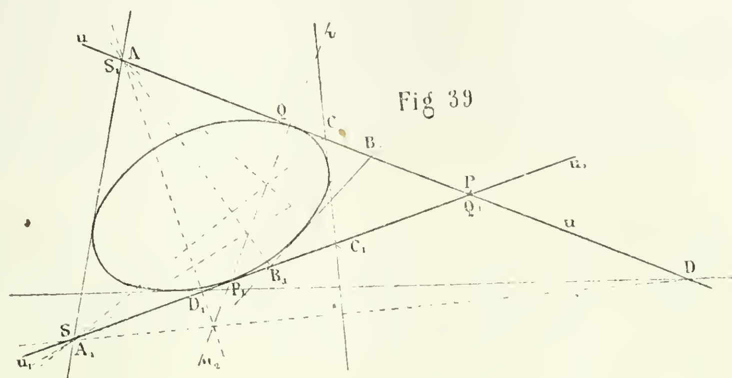



dants, comme $b$ et $b_1$, ou $c$ et $c_1$. Donc *toute droite* qui joint deux points (comme $bc_1$ et $b_1c$), où deux couples ($b_1b_1$ et $c_1c_1$) de rayons correspondants se coupent *mutuellement*, passe par le point $S_2$.

Étant données deux ponctuelles projectives $u$ et $u_1$ (fig. 34), pour trouver facilement le point de l'une qui correspond à un point quelconque de l'autre, nous avons déterminé de la manière suivante une troisième ponctuelle $u_2$, perspective à chacune des deux ponctuelles données. Nous avons projeté $u$ et $u_1$ par deux faisceaux de rayons S et $S_1$, dont nous avons pris arbitrairement les centres sur un rayon quelconque $a$ joignant deux points correspondants A et $A_1$ des ponctuelles. Ces faisceaux étant perspectifs, la ponctuelle $u_2$, dont ils sont les projections, était la ponctuelle cherchée.

Faisons maintenant coïncider S avec $A_1$ et $S_1$ avec A (fig. 39); $u_2$ passe alors par les deux points de $u$ et $u_1$ qui correspondent respectivement au point d'intersection $uu_1$. Deux points correspondants quelconques D et $D_1$ se projetteront respectivement de $A_1$ et A, suivant deux rayons $\overline{A_1D}$ et $\overline{AD_1}$ qui se coupent sur la droite $u_2$. Il est bien évident que si

l'on amène D à coïncider avec $uu_1$ ou P, le point d'intersection des deux rayons précédents, et par conséquent aussi $D_1$, coïncidera avec le point $u_1u_2$ ou $P_1$ ; de sorte que $u_2$ passe effectivement par l'un (et aussi par l'autre) des deux points $P_1$ et Q qui correspondent respectivement dans $u_1$ et $u$ au point d'intersection $PQ_1$ de $u$ et $u_1$. En d'autres termes, $u_2$ joint les points de contact, situés sur $u$ et $u_1$, du faisceau de rayons du second ordre engendré par ces deux ponctuelles. Nous obtiendrons




donc toujours la même droite $u_2$ en faisant coïncider respectivement les sommets $S_1$ et S, soit avec A et $A_1$ soit avec tout autre couple de points homologues (comme B et $B_1$, C et $C_1$). Donc *tout point* d'intersection de deux rayons ($\overline{BC_1}$ et $\overline{B_1C}$) à l'aide desquels deux couples quelconques de points correspondants ($B, B_1$ et $C, C_1$) sont *mutuellement* projetés, est situé sur la droite $u_2$.

Les résultats auxquels nous venons ainsi d'arriver peuvent être exprimés sous la forme des deux propositions suivantes :

Les deux points $ab_1$ et $a_1b$, où se coupent mutuellement deux couples quelconques $a, a_1$ et $b, b_1$ de rayons homologues de deux faisceaux projectifs S et $S_1$, sont toujours sur une même droite avec le point d'intersection $S_2$ des deux rayons qui correspondent au rayon commun $\overline{SS_1}$ des faisceaux.

Les deux droites $\overline{AB_1}$ et $\overline{A_1B}$, par lesquelles deux couples quelconques de points correspondants $A, A_1$ et $B, B_1$ des ponctuelles projectives $u$ et $u_1$ sont mutuellement projetés, se coupent sur la droite $u_2$ qui joint les deux points qui correspondent dans chaque ponctuelle au point commun $uu_1$ de ces ponctuelles.

Quand nous aurons encore ajouté les quelques remarques qui suivent, on reconnaîtra immédiatement dans ces propositions les théorèmes relatifs au quadrilatère dans les courbes et les faisceaux de rayons du second ordre.

Dans la courbe du second ordre, engendrée par les faisceaux S et $S_1$, les points S, $aa_1$, $S_1$ et $bb_1$ forment un quadrilatère inscrit dont les côtés opposés sont $a$ et $b_1$, $a_1$ et $b$; et $S_2$ est le point d'intersection des deux tangentes qui touchent la courbe en S et $S_1$.

Dans le faisceau de rayons du second ordre, engendré par les ponctuelles $u$ et $u_1$, les rayons $u$, $AA_1$, $u_1$ et $BB_1$ forment un quadrilatère dont A et $B_1$, $A_1$ et B sont les côtés opposés; et les deux points de contact du faisceau sur les côtés opposés $u$ et $u_1$ sont situés sur $u_2$

On voit aisément que les théorèmes précédents sont tout particulièrement propres à déterminer l'élément qui, dans l'une des deux formes fondamentales projectives simples, correspond à un élément quelconque de l'autre forme. Si, par exemple, on donne trois couples d'éléments homologues de deux ponctuelles projectives $u$ et $u_1$, on peut en déduire immédiatement la ponctuelle $u_2$ qui fournit très simplement le point de $u_1$ correspondant à un point quelconque de $u$.

Les théorèmes relatifs au quadrilatère dans les courbes et les faisceaux de rayons du second ordre, théorèmes que nous venons de démontrer ainsi de plusieurs manières différentes, peuvent être énoncés sous une forme plus générale ainsi qu'il suit (fig. 57) :

Quatre points K, L, M, N d'une courbe du second ordre formant un quadrangle complet, et les tangentes $k$, $l$, $m$, $n$ en ces points formant un quadrilatère complet, les sommets opposés du quadrangle sont situés deux à deux sur les droites qui joignent les points X, Y, Z, où les côtés opposés du quadrilatère se coupent entre eux.

Quatre rayons $k$, $l$, $m$, $n$ d'un faisceau du second ordre formant un quadrilatère complet, et leurs points de contact K, L, M, N constituant un quadrangle complet, les côtés opposés du quadrilatère passent deux à deux par les trois points X, Y, Z où se coupent les trois droites qui joignent les sommets opposés du quadrangle.

En effet, les théorèmes démontrés précédemment ont lieu : à gauche,

pour chacun des trois quadrangles simples, dont se compose le quadrangle complet KLMN, et à droite, pour chacun des trois quadrilatères simples qui composent le quadrilatère complet *klmn*.

Envisagé ainsi, le théorème de gauche énonce la même propriété que celui de droite; tous deux expriment que le triangle, dont les côtés joignent deux à deux les sommets opposés du quadrangle complet est identique avec le triangle qui a pour sommets X, Y, Z, points où les côtés opposés du quadrilatère se coupent deux à deux. Réciproquement, étant donnés un quadrangle inscrit KLMN et un quadrilatère circonscrit *klmn* situés l'un par rapport à l'autre ainsi qu'on vient de l'indiquer, on peut construire à volonté une courbe du second ordre, qui soit tangente aux droites *k*, *l*, *m*, *n* aux points K, L, M, N et un faisceau du second ordre dont les points de contact sur les rayons *k*, *l*, *m*, *n* soient respectivement les points K, L, M, N. En effet, d'après notre théorème, une courbe du second ordre, qui passe par les points K, L, M, N et qui est tangente à la droite *k* en K, a aussi les droites *l*, *m*, *n* pour tangentes. Et le faisceau du second ordre, qui contient les rayons *k*, *l*, *m*. *n* et qui a le point K pour point de contact sur *k*, a aussi les points L, M, N pour points de contact. Donc quatre tangentes d'une courbe du second ordre, avec leurs quatre points de contact, peuvent toujours être considérées comme quatre rayons d'un faisceau du second ordre, avec leurs quatre points de contact.

Une courbe du second ordre, qui passe par trois points de contact K, L, M d'un faisceau du second ordre et qui a pour tangentes en deux de ces points K et L les rayons correspondants *k* et *l* du faisceau, passe donc aussi par tout quatrième point de contact N du faisceau et a pour tangente en ce point le rayon correspondant *n* du faisceau.

Réciproquement, un faisceau du second ordre contient toutes les tangentes d'une courbe du second ordre du moment qu'il en contient trois et que les points de contact de deux d'entre elles sont situés sur la courbe. On a ainsi les belles relations suivantes entre les courbes et les faisceaux du second ordre :

| | |
|---|---|
| Toutes les tangentes d'une courbe du second ordre forment un faisceau de rayons du second ordre. | Tous les points de contact d'un faisceau de rayons du second ordre forment une courbe du second ordre. |

En raison de son importance, nous allons encore démontrer cette

double proposition d'une autre manière, qui nous conduira en même temps à une propriété nouvelle et intéressante des courbes du second ordre.

Étant donnés les quatre sommets K, L, M, N (fig. 57) d'un quadrangle inscrit dans une courbe du second ordre, supposons que l'un d'eux K se déplace sur la courbe, tandis que les trois autres et leurs tangentes *l*, *m*, *n* ne changent pas de position. La tangente *k* du point K se meut aussi en glissant le long de la courbe et ses points d'intersection E et A avec les tangentes *n* et *l* se déplacent en même temps.

Mais on reconnaît aisément que, dans ce mouvement, E et A décrivent respectivement deux ponctuelles projectives sur *n* et *l* et que, par suite, la tangente *k* parcourt un faisceau du second ordre. En effet, les deux diagonales $\overline{EB}$ et $\overline{AD}$ du quadrilatère *klmn* se coupent toujours en un point Y de la droite fixe $\overline{LN}$; elles décrivent par conséquent deux faisceaux perspectifs de rayons autour des sommets fixes B et D et les ponctuelles *n* et *l*, que décrivent les points E et A, sont des sections de ces faisceaux. Le théorème de gauche se trouve donc démontré de la sorte et on prouverait le théorème de droite d'une manière analogue.

La droite $\overline{MK}$ passe également par le point Y; dans le mouvement du point K, elle décrit donc aussi autour du point fixe M un faisceau de rayons, qui est perspectif au faisceau B décrit par $\overline{BE}$, et qui par conséquent est aussi projectif à la ponctuelle *n* décrite par le point E. Supposons que le point K passe successivement par tous les points de la courbe, il s'ensuit que :

*Étant donnés un point fixe quelconque* M *d'une courbe du second ordre et une tangente fixe quelconque* n *de cette courbe, si nous prenons comme correspondant à tout rayon, qui projette à partir de* M *un point quelconque* K *de la courbe, le point de* n *par lequel passe la tangente* k *du point* K, *le faisceau de rayons* M *et la ponctuelle* n *seront projectifs l'un à l'autre.*

Cette proposition, que M. Chasles a prise pour point de départ dans son Traité des Sections Coniques, est réciproque à elle-même; en effet, on a démontré plus haut, et il découle de cette proposition elle-même, que les tangentes d'une courbe du second ordre forment toujours un faisceau du second ordre. Nous n'en tirerons maintenant qu'une seule conclusion : c'est la suivante :

*Les tangentes en quatre points harmoniques d'une courbe du second ordre sont quatre tangentes harmoniques.*

En effet, une cinquième tangente quelconque les coupe en quatre points harmoniques, puisque leurs quatre points de contact sont projetés d'un cinquième point quelconque de la courbe suivant quatre rayons harmoniques.

Le théorème qui établit qu'un faisceau du second ordre est coupé par deux quelconques de ses rayons suivant des ponctuelles projectives, peut maintenant s'énoncer de la manière suivante :

*Toutes les tangentes d'une courbe du second ordre sont coupées par deux quelconques d'entre elles suivant des ponctuelles projectives.*

Le théorème de Brianchon peut aussi être envisagé de la manière suivante, qui le met en parallèle avec celui de Pascal.

*Dans tout hexagone circonscrit à une courbe du second ordre* (*ou dont les côtés sont tangents à la courbe*), *les trois diagonales principales se coupent en un même point.*

Nous l'exprimerons généralement sous cette forme et nous énoncerons d'une manière analogue les théorèmes concernant le pentagone, le quadrilatère et le triangle dans le faisceau de rayons.

Nous nous contenterons maintenant de présenter sous cette nouvelle forme les théorèmes démontrés précédemment, ainsi que leurs réciproques, en les appliquant aux formes du second ordre dans la gerbe. D'après une proposition établie antérieurement (page 69), toute courbe et tout faisceau de rayons du second ordre seront projetés d'un point, non situé dans leur plan, suivant une surface conique ou un faisceau de plans du second ordre. Chaque tangente de la courbe se projettera suivant un plan, qui n'aura qu'un seul rayon commun avec la surface conique et que pour cette raison l'on appelle *plan de contact*. De même, chaque point de contact du faisceau de rayons du second ordre sera projeté suivant un rayon, dit *rayon de contact* du faisceau de plans, et par lequel il ne passe qu'un seul des plans de ce faisceau. Mais comme réciproquement toute surface conique et tout faisceau de plans du second ordre sont respectivement coupés par un plan, ne passant pas par leur sommet, suivant une courbe ou un faisceau de rayons du second ordre, il s'ensuit que :

| | |
|---|---|
| Tous les plans de contact d'une surface conique du second ordre forment un faisceau de plans du second ordre. | Tous les rayons de contact d'un faisceau de plans du second ordre forment une surface conique du second ordre. |

Tous les rayons d'une surface conique du second ordre sont projetés de deux quelconques d'entre eux suivant deux faisceaux projectifs de plans (comp. page 77).

Tous les plans de contact d'une surface conique du second ordre sont coupés par deux quelconques d'entre eux suivant deux faisceaux projectifs de rayons (page 77).

Par analogie avec ce que nous avons dit plus haut (page 77), nous pouvons poser les définitions suivantes :

Quatre rayons d'une surface conique du second ordre sont dits *rayons harmoniques*, quand on peut les projeter d'un rayon quelconque, et par suite d'un cinquième rayon quelconque de la surface, suivant quatre plans harmoniques.

Quatre plans tangents d'une surface conique du second ordre sont dits *plans de contact harmoniques*, quand ils sont coupés par un plan quelconque, et par conséquent par un cinquième plan de contact quelconque, suivant quatre rayons harmoniques.

Les théorèmes de Pascal et de Brianchon s'énoncent comme il suit pour les surfaces coniques du second ordre :

Dans tout sexarète inscrit dans une surface conique du second ordre, les trois couples de faces opposées se coupent suivant trois rayons situés dans un seul et même plan.

Dans tout hexaèdre circonscrit à une surface conique du second ordre, les plans diagonaux principaux se coupent suivant une seule et même droite.

Le lecteur fera bien, comme exercice, de transporter et d'appliquer aux formes géométriques dans la gerbe les plus importants des théorèmes que nous avons établis pour les formes planes.

Revenons maintenant aux courbes du second ordre. Du théorème qui exprime qu'une droite ne peut avoir plus de deux points communs avec une courbe de ce genre, nous allons déduire d'importantes conséquences sur leur manière d'être dans le plan. En effet, d'après ce théorème, la courbe n'aura aucun point commun avec la droite à l'infini dans le plan, ou bien elle n'en aura qu'un seul, et elle sera tangente en ce point à la droite à l'infini, ou enfin elle aura deux points d'intersection com-

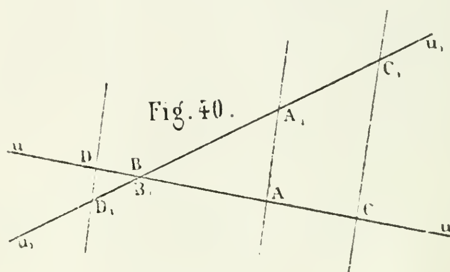
muns avec cette droite. Dans le premier cas, tous les points de la courbe sont des points propres et toutes les tangentes sont des rayons propres du plan ; la courbe prend alors le nom d'*ellipse* (voir fig. 55 à 59). Dans le second cas, la courbe s'étend à l'infini suivant deux branches qui se dirigent vers le point où elle est tangente à la droite de l'infini ; elle prend alors le nom de *parabole* (fig. 52). Enfin, dans le troisième cas, la courbe se compose de deux parties courbes, dont chacune s'étend, par deux branches, vers les deux points à l'infini où se rejoignent les deux parties courbes ; on donne à cette courbe le nom d'*hyperbole* (fig. 51). Comme la droite de l'infini du plan coupe l'hyperbole, toutes les tangentes de cette courbe sont des rayons propres du plan ; il en est de même, en particulier, pour les tangentes aux points de la courbe situés à l'infini. Il existe donc deux tangentes, auxquelles l'hyperbole est tangente à l'infini, et auxquelles on a donné le nom d'*asymptotes*.

Nous pouvons aussi obtenir ces trois espèces de courbes du second ordre, en faisant des sections dans un cône dont le sommet n'est pas situé à l'infini. En effet, un plan $\Sigma$, mené par le sommet de la surface conique du second ordre, n'a que ce point commun avec elle, ou lui est tangent suivant un rayon $s$, ou enfin la coupe suivant deux rayons $p$ et $q$. Dans le premier cas, tout plan $\Sigma_1$ parallèle à $\Sigma$, coupera tous les rayons de la surface conique en des points propres et cette surface elle-même suivant une ellipse. Dans le second cas, la courbe d'intersection est une parabole, parce que le plan $\Sigma_1$ coupera le rayon $s$, qui lui est parallèle, en un point infiniment éloigné ; et la droite d'intersection de $\Sigma_1$ avec le plan de contact $\Sigma$ sera la tangente de la parabole, qui est située à l'infini. Enfin, dans le troisième cas, la courbe d'intersection est une hyperbole, parce que les deux rayons $p$ et $q$ sont coupés par $\Sigma_1$ en leurs points situés à l'infini ; et l'hyperbole se compose de deux parties courbes séparées, puisque le plan $\Sigma_1$ coupe les deux nappes de la surface conique. Nous pouvons regarder l'hyperbole, de même que toute autre courbe du second ordre, comme une courbe fermée, rentrant en elle-même, puisque toute surface conique propre, au moyen de laquelle une courbe de ce genre se projette, est une surface fermée, rentrant en elle-même.

Deux faisceaux projectifs de rayons, en position oblique l'un par rapport à l'autre dans un plan, engendrent une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant qu'ils n'ont aucun couple de rayons parallèles, qu'ils en ont un ou qu'ils en ont deux. Déplaçons l'un des faisceaux

dans son plan de manière à l'amener à être concentrique avec l'autre, mais toutefois sans changer la direction de ses rayons; ces deux faisceaux concentriques n'auront aucun élément correspondant commun dans le premier cas; ils en auront un dans le second cas et deux dans le troisième. Ce dernier cas se réalisera, si les deux faisceaux sont projectifs opposés. D'après cela, on pourra, dans bien des circonstances, reconnaître immédiatement si une courbe du second ordre, déterminée par un nombre suffisant de conditions, par exemple par cinq de ses points, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Cette recherche est plus difficile, quand la courbe est définie par des tangentes ou par deux ponctuelles projectives qui engendrent le faisceau du second ordre circonscrit à la courbe. Cependant, on reconnaît immé-




diatement que deux ponctuelles projectives engendrent toutes les tangentes d'une parabole à la condition que leurs points à l'infini se correspondent, et rien qu'à cette condition ; en effet, c'est seulement dans ce cas que la droite à l'infini du plan est l'une des tangentes à la courbe.

Quand deux ponctuelles projectives ont leurs points à l'infini qui se correspondent, on dit qu'elles sont *projectivement semblables* (ou *projectives semblables*). Mettons-les en position perspective (fig. 40), en plaçant l'un sur l'autre deux de leurs points propres qui se correspondent ; elles se présentent alors comme des sections d'un faisceau de rayons parallèles, car le centre de projection est situé sur le rayon à l'infini et se trouve en même temps à l'infini. Il en résulte, en passant, pour les tangentes de la parabole la relation métrique suivante : *Deux tangentes quelconques* U *et* $U_1$ *d'une parabole sont divisées en parties proportionnelles par les autres tangentes* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, etc. (fig. 52). Cet exemple fait bien comprendre le sens de l'expression *projectif semblable.*

Nous profitons de cette occasion pour donner les théorèmes suivants : *Si les sommets d'un triangle se meuvent sur trois droites données, situées dans un même plan, de telle sorte que deux des côtés ne changent pas de direction, le troisième côté décrit, ou bien un faisceau de rayons parallèles, ou bien un faisceau de rayons du second ordre, qui enveloppe une parabole.*

En effet, les faisceaux de rayons parallèles, décrits par les deux premiers côtés du triangle, engendrent sur deux des droites données deux ponctuelles projectives semblables à celle décrite sur la troisième droite et, par conséquent, projectives semblables entre elles.

*On donne dans un même plan une ponctuelle* u *et un faisceau de rayons S, rapportés projectivement l'un à l'autre, et par chaque point de* u *on mène une parallèle au rayon correspondant de S. Toutes ces parallèles se coupent en un même point, ou enveloppent une parabole.*

En effet, coupons le faisceau S par la droite à l'infini du plan, nous obtenons une ponctuelle à l'infini, qui est projective à $u$. Si elle n'est pas perspective à $u$, elle engendre avec $u$ un faisceau de rayons du second ordre qui contient la droite de l'infini et qui, par conséquent, enveloppe une parabole.

Projetons une courbe du second ordre d'un point à l'infini et non situé dans son plan ; nous obtenons une surface conique dont le sommet est à l'infini et dont les rayons sont par conséquent parallèles. On donne à cette surface le nom de *surface cylindrique* du second ordre. Deux faisceaux projectifs de plans, dont les axes sont parallèles, engendrent donc un faisceau de rayons parallèles ou une surface cylindrique du second ordre. Nous diviserons les surfaces cylindriques en surfaces elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, suivant qu'un plan quelconque, ne passant pas par leur centre à l'infini, les coupera suivant des ellipses, des paraboles ou des hyperboles ; ou ce qui revient au même, suivant qu'elles n'auront aucun rayon à l'infini, ou qu'elles en auront un ou deux.

# HUITIÈME LEÇON.

## Pôles et polaires par rapport aux courbes du second ordre.

Les théorèmes sur les quadrilatères, inscrits ou circonscrits à une courbe du second ordre, nous conduisent à une série de propriétés très importantes de ces courbes; nous en avons déjà indiqué quelques-unes dans l'introduction. Nous y arrivons par les considérations suivantes:

Soit donné un point U (fig. 41, 42), choisi arbitrairement dans le plan d'une courbe du second degré, mais non situé sur la courbe elle-même.

Par ce point menons deux droites qui coupent la courbe (sécantes, transversales) $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$; nous pouvons les considérer comme les diagonales d'un quadrilatère simple ABCD, inscrit dans la courbe. Les deux couples de côtés opposés $\overline{BC}$ et $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ de ce quadrilatère se coupent respectivement aux points P et Q, les deux tangentes $a$ et $c$ aux sommets opposés A et C se rencontrent en un troisième point R et ces trois points P, Q et R sont situés sur une même droite $u$. Les deux tangentes $b$ et $d$ qu'on peut mener aux sommets B et D se coupent aussi sur cette droite (Voir les théorèmes sur le quadrilatère inscrit, pages 82 et 86).

Désignons par V et W les points d'intersection de la droite $u$ avec $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$; nous voyons immédiatement que V est harmoniquement separé de U par A et C. En effet, dans le quadrilatère PBQD, les côtés opposés se coupent deux à deux en A et C, tandis que la diagonale $\overline{BD}$ passe par U et la diagonale $\overline{PQ}$ par V. De même, U est harmoniquement séparé de W par B et D. Nous pourrions donc aussi trouver $u$ en menant par U une sécante $\overline{AC}$, en cherchant sur celle-ci le point V harmonique-

ment séparé de U par les points A et C de la courbe et en joignant ce point V au point R où se coupent les deux tangentes menées en A et C

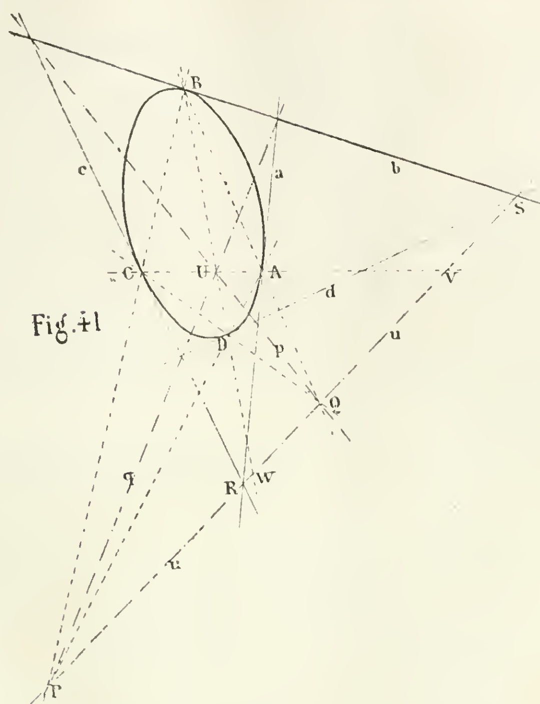


Fig. 41

à la courbe. Donc, de quelque manière qu'on mène par U une seconde sécante $\overline{BD}$, la droite $u$, qui se trouve déjà entièrement déterminée par la première sécante, devra contenir les points suivants :

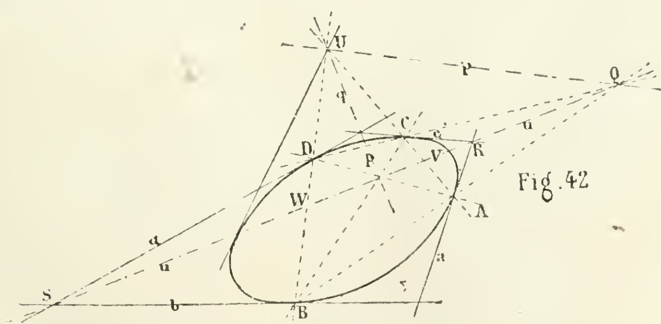


Fig. 42

1° les points P et Q, où se coupent les côtés opposés du quadrilatère ABCD,

2° le point d'intersection S des deux tangentes menées en B et D,

3° le point W, qui est harmoniquement séparé de U par les points B et D.

Nous appellerons U le *pôle* de la droite $u$ ainsi déterminée et réciproquement, nous dirons que $u$ est la *polaire* du point U. Étant donné un point, on peut donc trouver facilement sa polaire par rapport à une courbe du second degré, en procédant de différentes manières et au moyen de constructions linéaires. Réciproquement, on peut construire le pôle U d'une droite donnée $u$, en menant par deux points R et S de cette droite deux couples de tangentes $a$, $c$ et $b$, $d$ à la courbe du second ordre (fig. 41 et 42). Par le point U passent donc :

1° Les diagonales du quadrilatère simple $a\ b\ c\ d$,

2° Les droites $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ qui joignent les points de contact de chaque couple de tangentes.

3° Les deux rayons, dont l'un est harmoniquement séparé de $u$ par $a$ et $c$, et l'autre $b$ et $d$.

En effet, le point d'intersection U de $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ est le pôle de $u$; car, d'après ce qui précède, sa polaire se confond avec $u$, puisque les points de rencontre des tangentes menées en A et C, de même qu'en B et D, sont situés sur cette droite. De plus, la droite $\overline{RU}$ est harmoniquement séparé de $u$ par $a$ et $c$, puisque les points U et V qui appartiennent respectivement à ces deux droites sont harmoniquement séparés par les points de contact A et C de ces tangentes; de même, $\overline{SU}$ est harmoniquement séparée de $u$ par $b$ et $d$, ce qui prouve la 3e proposition. La démonstration de la 1re proposition résulte immédiatement des théorèmes précédemment établis sur le quadrilatère inscrit (page 86).

Si la polaire $u$ d'un point U (fig. 42) coupe la courbe du second ordre, les deux droites qui joignent le point V aux points d'intersection sont tangentes à la courbe. En effet, si l'une de ces droites avait un autre point commun avec la courbe, ce point devrait être harmoniquement séparé du premier par U et $u$ et par conséquent le premier point ne pourrait pas être situé sur $u$. Dans ce cas, la droite $u$ est appelée la *corde de contact* du point U, c'est-à-dire la droite qui joint les points de contact des deux tangentes menées à la courbe par le point U.

Tous ces résultats peuvent être réunis dans la double proposition qui suit :

Si par un point U, situé dans le

Si par un nombre quelconque

plan de la courbe du second ordre, mais non sur cette courbe, on mène à celle-ci un nombre quelconque de sécantes arbitraires et si l'on détermine :

1° Dans chaque quadrilatère simple inscrit à la courbe, et qui a pour diagonales deux quelconques de ces sécantes, les points d'intersection des côtés opposés ;

2° Sur chaque sécante, le point qui est harmoniquement séparé de U par les deux points de la courbe ;

3° Le point commun aux deux tangentes menées à la courbe par les points où une sécante coupe cette dernière ;

4° Les points de contact des tangentes qu'on peut mener à la courbe par le point U ;

Tous ces points sont situés sur une même droite $u$, qu'on appelle la *polaire* du point U, par rapport à la courbe du second ordre.

de points d'une droite $u$, située dans le plan d'une courbe du second degré, mais non tangente à cette courbe, on mène les deux tangentes à la courbe, et si l'on détermine :

1° Dans chaque quadrilatère simple circonscrit à la courbe, et qui a pour côtés opposés deux de ces couples de tangentes, les diagonales ;

2° Pour chaque point de $u$, la droite qui est harmoniquement séparée de $u$ par les deux tangentes à la courbe, issues de ce point ;

3° La droite qui joint les points de contact de chaque couple de tangentes ;

4° Les deux tangentes aux points d'intersection de $u$ avec la courbe, quand cette droite la coupe ;

Toutes ces droites passent par un même point U qu'on appelle le *pôle* de la droite $u$ par rapport à la courbe du second ordre.

Supposons qu'un point A soit situé sur la courbe du second ordre et soit $a$ la tangente en ce point ; on dira que $a$ est la polaire de A et que réciproquement A est le pôle de $a$. Il résulte de là, et de ce qui précède, que tout point du plan a une polaire par rapport à une courbe du second ordre et que, réciproquement, toute droite a un pôle.

Un point étant donné dans le plan d'une courbe du second ordre, nous dirons que ce point est *extérieur* ou *intérieur* à cette courbe, suivant qu'on pourra mener du point en question deux tangentes à la courbe ou qu'on n'en pourra mener aucune. Tous les points d'une tangente sont donc extérieurs à la courbe ; le point de contact seul est situé *sur* la courbe.

Toute droite, contenue dans le plan de la courbe, renferme une infinité de points extérieurs à cette courbe, puisque la droite a un point commun avec chacune des tangentes; et ces points se suivent d'une manière continue, puisque les tangentes se suivent elles-mêmes d'une manière continue. Tous les points d'une droite, qui sont intérieurs à la courbe, se suivent donc aussi d'une manière continue. Si donc la droite qui unit deux points A et B, extérieurs à la courbe, est coupée par cette dernière, ces points ne sont pas séparés l'un de l'autre par les points d'intersection; mais on peut aller de A en B en suivant le segment extérieur à la courbe (et, nécessairement, en passant par le point à l'infini) sans franchir aucun point de la courbe. De même, deux points intérieurs à la courbe ne sont pas séparés l'un de l'autre par celle-ci, mais sont situés sur un segment de leur ligne de jonction qui est emprisonné par la courbe. Si donc deux points sont séparés l'un de l'autre par la courbe, l'un d'eux lui est extérieur et l'autre intérieur; car, d'après ce qu'on vient d'établir, ils ne peuvent être tous les deux ni extérieurs, ni intérieurs à la courbe. Donc :

*Une courbe du second ordre divise en deux régions le plan dans lequel elle est située. On peut aller d'un point à un autre point de la même région sans traverser la courbe; mais cela n'est plus possible, quand les deux points appartiennent à deux régions différentes. Les points de l'une des régions sont extérieurs à la courbe et de chacun d'eux on peut mener deux tangentes à cette courbe; les points de l'autre région, au contraire, sont intérieurs à la courbe et d'aucun d'eux on ne peut mener de tangente à celle-ci.*

Un point intérieur à la courbe est donc harmoniquement séparé de chacun des points de sa polaire par la courbe; toute droite menée par ce point coupe la courbe en deux points, tandis que sa polaire ne la rencontre pas. Au contraire, un point R extérieur à la courbe n'est pas séparé par celle-ci de tous les points de sa polaire; si par R l'on mène les deux tangentes à la courbe, ces droites déterminent sur la polaire un segment dont tous les points sont harmoniquement séparés de R.

La courbe, avec tous les points qu'elle enclôt, est située tout entière dans l'un des deux angles complets que forment les deux tangentes.

Dans la suite, nous aurons souvent occasion de faire usage de ces propositions, qui peuvent sembler évidentes, mais qui à notre point de vue méritent d'être démontrées. Par leur moyen, nous établissons immédiatement le théorème fondamental de la théorie des polaires :

*Les polaires de tous les points d'une droite* u *passent par le pôle* U *de cette droite.*

Supposons un point de $u$ intérieur à la courbe du second ordre ; il est harmoniquement séparé de U et par conséquent sa polaire doit passer par U. Supposons au contraire un point R de $u$ (fig. 41 et 42) extérieur à la courbe, nous pouvons mener par ce point deux tangentes à la courbe. La droite qui joint le point de contact d'une de ces tangentes avec U est la polaire de R, puisque son pôle doit se trouver à la fois sur $u$ et sur cette tangente. Supposons enfin qu'on prenne un point de $u$ sur la courbe, la tangente en ce point est la polaire de ce même point, et elle passe également par U.

*Les pôles de tous les rayons issus d'un point* U *sont situés sur la polaire* u *de ce point.*

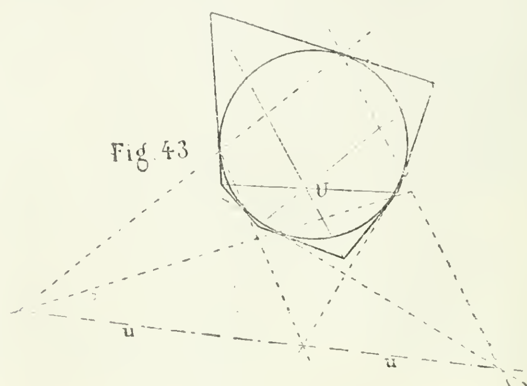
Si un rayon issu de U coupe la courbe du second ordre, on obtient son pôle en menant les tangentes aux deux points d'intersection et en cherchant leur point de rencontre. Ce dernier, comme on l'a démontré précédemment, est situé sur la polaire de U. Si, au contraire, un rayon issu de U ne rencontre pas la courbe, son pôle est intérieur à celle-ci ; il est harmoniquement séparé de tout point du rayon, et en particulier de U ; il est donc encore situé sur $u$. Si enfin le rayon est tangent à la courbe, son point de contact se trouve sur $u$ et il est en même temps le pôle de ce rayon.

Ces théorèmes et ceux qui les précèdent démontrent et établissent la loi de réciprocité, au moins pour le système plan et, en général, pour les formes fondamentales de seconde espèce. En effet, à l'aide d'une courbe du second ordre, nous pouvons construire le système plan réciproque d'un système plan donné, en prenant les polaires de chacun des points et les pôles de chacune des droites du système donné. C'est pourquoi, à l'avenir, quand il s'agira de deux propositions réciproques relatives aux systèmes plans, nous nous contenterons de démontrer seulement l'une d'elles.

Brianchon a déduit son théorème de celui de Pascal au moyen des polaires. A cet effet, il a construit le pôle de chacun des côtés de l'hexagone inscrit à la courbe en menant les tangentes aux extrémités de chaque côté et en cherchant leur point d'intersection (fig. 43). Aux côtés et aux sommets de l'hexagone inscrit correspondent ainsi les sommets et les côtés de l'hexagone circonscrit, et le point d'intersection de deux côtés quelconques de la première figure a pour polaire la droite

qui joint les sommets correspondants de la seconde. Mais comme les trois points, où se coupent les trois couples de côtés opposés de l'hexagone inscrit, sont situés sur une même droite $u$, les trois droites, qui joignent les côtés opposés de l'hexagone circonscrit, passent alors par un même point U, qui est le pôle de la droite $u$.

On voit déjà par cette seule application quels avantages on peut retirer de la théorie des polaires. Au moyen d'une courbe du second ordre, on peut par exemple trouver, pour chaque courbe plane, un faisceau de rayons, réciproque à cette courbe, puisque tout point de la courbe a pour polaire un rayon du faisceau. Aux propriétés de la courbe




correspondront des propriétés du faisceau. Dans la suite, nous étudierons des relations de ce genre, mais encore plus générales.

Soient P et Q deux points quelconques d'une droite $u$ (fig. 41 et 42); d'après les théorèmes précédents, leurs polaires $p$ et $q$ passent par le pôle U de $u$. Prenons P arbitrairement sur $u$, et choisissons au contraire pour Q le point d'intersection de $u$ et $p$; P, Q et U sont alors les sommets d'un triangle et leurs polaires $p$, $q$ et $u$ sont les côtés opposés de ce même triangle. On donne à ce triangle le nom de *triangle polaire de la courbe du second ordre;* chaque sommet est le pôle du côté qui lui est opposé. Comme on le voit immédiatement, ces triangles polaires nous donnent la double proposition qui suit :

Les trois couples de côtés opposés de tout quadrilatère complet, inscrit dans une courbe du second degré, se coupent aux som-

Les trois couples de sommets opposés de tout quadrilatère complet, circonscrit à une courbe du second degré, sont situés sur les

mets d'un triangle polaire de la courbe.

côtés d'un triangle polaire de la courbe (pages 96-97).

A tout triangle polaire PQU correspondent une infinité de quadrilatères inscrits à la courbe et dont les trois couples de côtés opposés se coupent en P, Q et U. Menons par P une sécante quelconque $\overline{BC}$ à la courbe (fig. 41 et 42), joignons les deux points B et C de la courbe au point U et prolongeons les droites $\overline{BU}$ et $\overline{CU}$ jusqu'à ce qu'elles coupent de nouveau la courbe respectivement aux points D et A ; ABCD est l'un de ces quadrilatères inscrits (dont le nombre est infini), comme on le démontre facilement.

Supposons maintenant que, dans le quadrilatère inscrit, les sommets A et C ainsi que le point U lui-même restent fixes, mais que le point P se meuve sur la polaire $u$ de U ; le sommet B se déplacera sur la courbe. Les droites $\overline{PB}$ et $\overline{QB}$ décriront donc autour des centres C et A deux faisceaux projectifs de rayons et les points P et Q décriront aussi deux ponctuelles projectives qui sont des sections de ces faisceaux. Nous en déduisons que le faisceau, décrit autour de U par la polaire $\overline{UQ}$ ou $p$ du point P, est projectif à la ponctuelle $u$ que décrit en même temps le point P en se déplaçant sur $u$. Donc :

*Si un point* P *décrit une ponctuelle* u, *sa polaire* p *décrit en même temps un faisceau de rayons* U, *qui est projectif à la ponctuelle.*

Cette proposition fait connaître d'une manière plus intime la dépendance qui existe entre une figure quelconque et sa figure polaire. Par exemple, nous en déduisons le théorème suivant :

*Étant données dans un même plan deux courbes du second ordre* $\varkappa$ *et* $\lambda$, *cherchons les polaires par rapport à l'une d'elles* $\lambda$ *de tous les points de l'autre courbe* $\varkappa$ ; *toutes ces polaires enveloppent une troisième courbe du second ordre.*

En effet, imaginons que $\varkappa$ soit engendrée au moyen de deux faisceaux projectifs de rayons U et V ; ces faisceaux ont pour figures correspondantes deux ponctuelles $u$ et $v$ qui leur sont projectives et qui par suite sont projectives entre elles. Ces ponctuelles engendrent le faisceau de rayons du second ordre qui enveloppe la troisième courbe.

Dans la théorie des courbes du second ordre, on emploie souvent les dénominations qui suivent :

Deux points du plan sont dits

Deux droites du plan sont

*conjugués* par rapport à une courbe du second ordre, quand l'un d'eux, et par suite quand chacun d'eux, est situé sur la polaire de l'autre.

dites *conjuguées* par rapport à une courbe du second ordre, quand l'une d'elles, et par suite quand chacune d'elles, passe par le pôle de l'autre.

Un point est donc conjugué à tout point de sa polaire et une droite à toute droite qui passe par son pôle. Les sommets, et par suite aussi les côtés de tout triangle polaire de la courbe sont ainsi conjugués deux à deux. Un point situé sur une courbe du second ordre est conjugué à lui-même, puisqu'il se trouve sur sa polaire qui est la tangente; et une tangente de la courbe est conjuguée à elle-même puisqu'elle passe par son pôle, qui est son point de contact.

Si la droite, qui joint deux points conjugués A et B, coupe la courbe du second ordre, A et B sont harmoniquement séparés par les deux points d'intersection. En effet, la polaire de A passe par B et contient tous les points qui sont harmoniquement séparés de A par deux points de la courbe.

Si, par le point d'intersection de deux droites conjuguées $a$ et $b$, il est possible de mener des tangentes à la courbe du second ordre, $a$ et $b$ sont harmoniquement séparés par ces tangentes. En effet le pôle de $a$ est situé sur $b$ et par ce point passent tous les rayons qui sont harmoniquement séparés de $a$ par deux tangentes de la courbe.

La courbe du second ordre contient donc dans son intérieur un sommet de tout triangle polaire, et les deux autres sommets lui sont extérieurs; elle coupe donc deux des côtés d'un triangle polaire quelconque, mais ne rencontre pas le troisième.

De la définition des points et droites conjugués il résulte encore que :

Si deux points A et B sont conjugués tous deux à un même point C, la droite $\overline{AB}$ est la polaire de C. En effet, la polaire de C doit passer aussi bien par A que par B.

Si deux droites $a$ et $b$ sont conjuguées toutes les deux à une même droite $c$, leur point d'intersection $ab$ est le pôle de $c$. En effet, ce pôle doit être situé aussi bien sur A que sur B.

Soient $u$ et $v$ deux droites du plan, qui sont conjuguées l'une à l'autre ; à tout point P de $u$ nous pouvons faire correspondre le point $P_1$ de $v$ qui lui est conjugué ; les ponctuelles $u$ et $v$ sont alors projectives l'une à l'autre. En effet, $v$ est une section du faisceau de rayons V, qui se compose des polaires de tous les points de $u$ et qui (d'après la page 101) est projectif à la ponctuelle $u$. Les droites qui joignent les points conjugués P et $P_1$ situés sur les droites $u$ et $v$ formeront donc un faisceau de rayons du premier ou du second ordre, suivant que le point $uv$ sera conjugué à lui-même (c'est-à-dire situé sur la courbe du second ordre) ou qu'il ne le sera pas. Comme P est conjugué en même temps aux points $P_1$ et U, $\overline{P_1U}$ est la polaire de P et $\overline{PP_1}$ est conjuguée à la droite $\overline{P_1U}$. Nous obtiendrons donc ces mêmes faisceaux du premier ou du second ordre, en menant par chaque point $P_1$ de $v$ le rayon qui est conjugué à la droite $\overline{P_1U}$.

Soient maintenant, d'autre part, U et V deux points du plan, non conjugués ; à tout rayon $p$ passant par U nous pouvons faire correspondre le rayon $p_1$ qui lui est conjugué et qui passe par V. Les deux faisceaux de rayons U et V sont alors projectifs l'un à l'autre. En effet, U est une projection de la ponctuelle $v$ à laquelle appartiennent les pôles de tous les rayons de V et qui est projective au faisceau de rayons V. Les faisceaux U et V engendreront donc une ponctuelle du premier ou du second ordre, selon que le rayon commun $\overline{UV}$ sera ou ne sera pas conjugué à lui-même (c'est-à-dire sera ou ne sera pas tangent à la courbe donnée du second ordre). Comme $p_1$ est conjugué en même temps aux rayons $p$ et $v$, $pv$ est le pôle de $p_1$ et le point $pp_1$ est conjugué au point $pv$. Nous obtiendrons la ponctuelle du premier ou du second ordre, dont il vient d'être parlé, en déterminant sur chaque rayon $p$ de U le point qui est conjugué au point $pv$. Nous avons de la sorte les théorèmes ci-après :

Étant donnés dans le plan d'une courbe du second ordre une droite $v$ et un point U non situé sur cette droite :

Déterminons sur chaque rayon passant par U le point conjugué du point d'intersection de ce rayon avec la droite $v$ ; tous ces points seront situés sur une courbe du second ordre, passant par le pôle V de la

Menons par chaque point de $v$ le rayon conjugué de la droite qui joint ce point au point U ; tous ces rayons envelopperont une courbe du second ordre tangente à la polaire $u$ de U, à $v$ et aux tangentes

droite $v$, par U et par les points de contact des deux tangentes qu'on peut mener du point U à la courbe du second ordre donnée. Dans le cas où $v$ passe par l'un de ces points de contact, et où, par conséquent la droite UV est une tangente à la courbe donnée du second ordre, nous obtenons une ponctuelle rectiligne, au lieu d'une courbe du second ordre[1].

menées aux deux points où la courbe du second ordre donnée est coupée par $v$. Dans le cas où U est situé sur une de ces tangentes et où, par conséquent, le point $uv$ appartient à la courbe donnée, nous obtenons un faisceau de rayons du premier ordre, au lieu du système des tangentes à une courbe du second ordre.

La courbe du second ordre et le point U donnés, restant invariables, à tout point du plan correspond un point conjugué qui est situé avec le premier sur un rayon passant par U; au contraire, à toute droite correspond en général une courbe du second ordre.

Supposons, maintenant, que la courbe du second ordre et la droite $v$ données (proposition de droite) restent fixes; à tout rayon du plan correspond un rayon conjugué qui coupe le premier en un point situé sur $v$; à tout faisceau de rayons du premier ordre correspond, en général, un faisceau de rayons du second ordre. Nous arrivons, de cette manière, à deux cas particuliers de la *correspondance géométrique du second ordre*.

Notre mode de démonstration (page 103-104) nous fournit encore les théorèmes suivants :

Étant donné un triangle $AMB_1$ (fig. 44), inscrit dans une courbe du second ordre, toute droite conjuguée à l'un des côtés $AB_1$ coupe les deux autres côtés en deux points

Étant donné un triangle UVW (fig. 45), circonscrit à une courbe du second ordre, tout point conjugué à l'un des sommets est projeté des deux autres sommets sui-

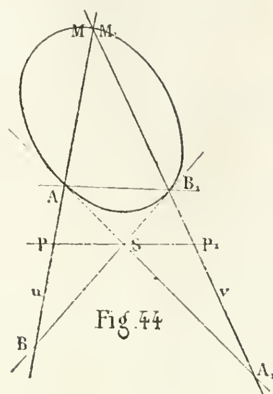
1. Comme cas particulier du théorème de gauche, nous citerons la proposition suivante :

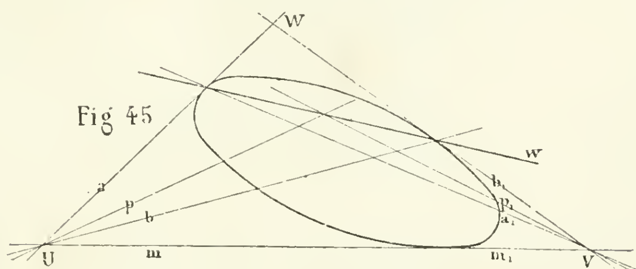
*Les points milieux de toutes les cordes d'une courbe du second ordre, qui convergent vers un même point propre donné, et d'ailleurs quelconque, sont situés sur une autre courbe du second ordre.*

Dans ce cas, la droite $v$ est située à l'infini et chacun des points milieux est harmoniquement séparé par la courbe d'un point situé à l'infini; il est donc conjugué à ce dernier.

conjugués. Et réciproquement, si une droite coupe deux des côtés du triangle en deux points conjugués, elle passe par le pôle du troisième côté.

vant deux rayons conjugués. Et réciproquement, si un point est projeté de deux des sommets du triangle suivant deux rayons conjugués, il est situé sur la polaire du troisième sommet.



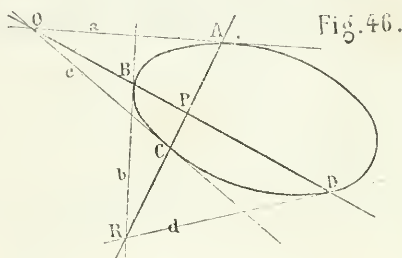

En effet, les ponctuelles $\overline{AM}$ ou $u$ et $\overline{B_1M}$ ou $v$ (fig. 44) sont perspectives l'une à l'autre, si à chaque point de $u$ on fait correspondre le point de $v$ qui lui est conjugué ; car le point M, commun à $u$ et $v$, est conjugué à lui-même. Mais le sommet S du faisceau de rayons engendré par $u$ et $v$ doit être situé sur la tangente menée en A, puisque le point d'intersection $A_1$ de cette droite avec $v$ est conjugué au point A ; pour la même raison, S est situé sur la tangente au point $B_1$. Donc S est le pôle de $AB_1$ et toute droite menée par ce point coupe $u$ et $v$ en deux points conjugués. Le théorème de droite peut se démontrer d'une manière

analogue ; son exactitude s'établit du reste au moyen de la loi de réciprocité.

Nous terminerons cette série de théorèmes en démontrant celui qui suit ; nous laisserons au lecteur le soin de trouver son réciproque.

*Si une courbe du second ordre est coupée par deux rayons conjugués* $\overline{AC}$ *et* $\overline{BD}$ (*fig.* 46), *les quatre points d'intersection* A, B, C, D *sont quatre points harmoniques, et les tangentes* a, b, c, d *en ces points sont quatre tangentes harmoniques de la courbe.*

Le pôle Q de $\overline{AC}$ où se coupent les tangentes *a* et *c* doit se trouver sur la droite $\overline{BD}$, parce que cette dernière est conjuguée à $\overline{AC}$ ; de même le point d'intersection R de *b* et *d* est situé sur $\overline{AC}$. Soit P le point d'intersection de $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ ; P, B, Q, D sont quatre points harmoniques et $\overline{RQ}$, *b*, $\overline{RP}$ et *d* sont quatre rayons harmoniques. Donc les rayons $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, *c* et $\overline{CD}$ sont quatre rayons harmoniques et les points *ca*,




*cb*, C et *cd* sont quatre points harmoniques. Les points A, B, C, D sont projetés de C, et par suite de tout autre point de la courbe, suivant quatre rayons harmoniques, et les tangentes *a*, *b*, *c*, *d* sont coupées par *c*, et conséquemment par toute autre tangente de la courbe, en quatre points harmoniques.

Tous les théorèmes qu'on vient d'établir pour les courbes du second ordre, s'appliquent immédiatement aux cônes du second ordre, puisqu'un plan sécant, ne passant pas par leur sommet, les coupe suivant des courbes du second ordre. Nous ne répéterons ici que les théorèmes qui suivent :

*Étant donnés, dans une gerbe de rayons, une surface conique du second ordre et un rayon* s, *non situé sur cette surface, menons par* s *un nombre quelconque de plans, qui coupent cette surface, et déterminons* :

1° *Dans chaque plan, le rayon qui est harmoniquement séparé de* s *par la surface conique;*

2° *La droite commune aux deux plans tangents à la surface, suivant les rayons où le plan sécant la rencontre;*

3° *Les rayons suivant lesquels se coupent les faces opposées de tout quadrarête, inscrit dans la surface et dont les plans diagonaux sont deux plans sécants quelconques menés par* s;

4° *Le rayon de contact de chacun des plans tangents qu'on peut mener par* s *à la surface:*

*Tous ces rayons sont situés dans un même plan* $\Sigma$ *qu'on appelle le* PLAN POLAIRE *du rayon* s.

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre aux surfaces coniques du second ordre les autres théorèmes de la théorie des polaires; nous ajouterons seulement qu'on donne à $s$ le nom de *rayon polaire* du plan $\Sigma$ par rapport à la surface conique du second ordre.

# NEUVIÈME LEÇON[1].

**Diamètres et axes des courbes du second ordre.**
**Équations de ces courbes.**

Des théorèmes relatifs aux pôles et aux polaires, il découle que :

*Si l'on mène, dans une courbe du second degré, une série de cordes parallèles entre elles, leurs points milieux sont situés sur une droite qu'on appelle un* DIAMÈTRE *de la courbe* (fig. 47).

En effet, puisque tous ces points milieux sont harmoniquement sépa-

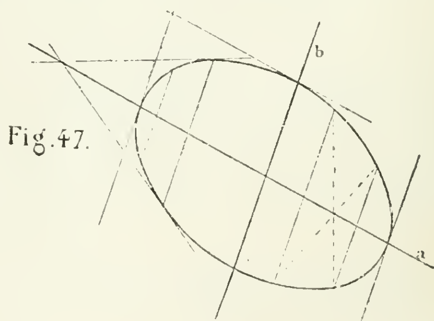


Fig. 47.

rés par la courbe du point situé à l'infini sur la direction des cordes parallèles, ils sont tous situés sur la polaire de ce point. Donc :

*La polaire de tout point à l'infini est un diamètre de la courbe du second ordre.*

1. Cette leçon doit être considérée comme un appendice à la géométrie *pure* de position.

Sur ce diamètre sont situés les points de contact des deux tangentes qu'on peut mener à la courbe parallèlement aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales.

Les deux tangentes menées à la courbe aux extrémités d'une de ces cordes se coupent en un point du diamètre (page 97); la corde est donc conjuguée au diamètre.

Nous avons trouvé précédemment (page 99) que les polaires de tous les points d'une droite se coupent au pôle de cette droite. Pour les diamètres d'une courbe du second ordre, cette proposition s'énonce ainsi :

*Tous les diamètres d'une courbe du second ordre se coupent en un seul et même point qui est le pôle de la droite à l'infini.*

Si la courbe est une parabole, elle est tangente à la droite à l'infini et le point de contact lui-même (page 97) est le pôle de la droite à l'infini; ou autrement dit :

*Les diamètres d'une parabole sont parallèles et passent tous par le point de la parabole qui est situé à l'infini.*

Si, au contraire, la courbe est une ellipse ou une hyperbole, le pôle de la droite à l'infini est un point propre; on lui donne le nom de *centre* de la courbe, parce qu'il jouit de la propriété suivante :

*Toute corde menée par le centre d'une courbe du second ordre est divisée par ce point en deux parties égales.*

La parabole n'a pas de centre; cela résulte du théorème qui suit :

*Si deux cordes d'une courbe du second ordre se coupent mutuellement en deux parties égales, leur point d'intersection est le pôle de la droite à l'infini et ces cordes elles-mêmes sont par conséquent des diamètres de la courbe.*

On reconnaît que ce théorème est exact, en remarquant que le point d'intersection des cordes est harmoniquement séparé par la courbe des points à l'infini sur ces cordes. Comme le pôle de la droite à l'infini par rapport à une parabole est identique avec le point de cette courbe qui est situé à l'infini, il n'y a pas, dans la parabole, de cordes qui puissent se couper mutuellement en deux parties égales.

*Les asymptotes d'une hyperbole se coupent au centre de cette courbe.*

En effet les tangentes aux points où une droite rencontre une courbe du second ordre passent par le pôle de cette droite. — Le centre d'une hyperbole est extérieur à la courbe; au contraire le centre d'une ellipse est à l'intérieur (page 98).

A tout diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole correspond un dia-

mètre qui lui est conjugué; chacun d'eux passe par le pôle de l'autre (qui est situé à l'infini).

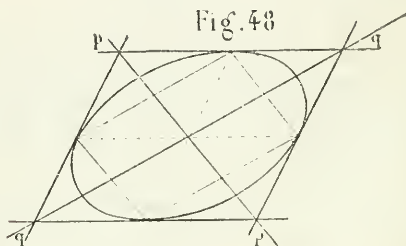
*Toute corde d'une ellipse ou d'une hyperbole, qui est parallèle à un diamètre de la courbe, est divisée en deux parties égales par le diamètre conjugué au premier.*

En effet, elle passe par le pôle de ce second diamètre. Étant donnés deux diamètres conjugués, si l'un d'eux coupe la courbe, les tangentes aux deux points d'intersection sont parallèles à l'autre. Cette propriété donne le moyen de trouver simplement le diamètre conjugué à un diamètre donné.

*Dans tout parallélogramme circonscrit à une courbe du second ordre, les diagonales sont deux diamètres conjugués.*

*Dans tout parallélogramme inscrit dans une courbe du second ordre, les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués.*

Les diagonales du parallélogramme inscrit, aussi bien que celles du




parallélogramme circonscrit (fig. 48) sont des diamètres de la courbe, parce que leur point d'intersection a pour polaire la droite à l'infini. Par ce point d'intersection menons deux parallèles $p$ et $q$ aux côtés du parallélogramme inscrit; chacune d'elles divise en deux parties égales les côtés parallèles à l'autre; $p$ et $q$ sont donc deux diamètres conjugués. Les pôles des quatre côtés du parallélogramme inscrit sont aussi situés sur $p$ et $q$; autrement dit, $p$ et $q$ sont les diagonales du quadrilatère circonscrit, dont les côtés sont tangents à la courbe du second ordre aux sommets du quadrilatère inscrit. Mais le quadrilatère circonscrit est un parallélogramme, parce que les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles; et le parallélogramme ainsi construit peut être regardé comme un parallélogramme quelconque circonscrit à la courbe.

Le théorème précédent peut aussi s'énoncer comme il suit:

*Les deux cordes, qui joignent un point quelconque d'une ellipse ou d'une hyperbole aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe.*

D'après cela, étant donnés deux couples de diamètres conjugués et un point d'une courbe du second ordre, on peut facilement trouver cinq autres points de la courbe. A cet effet, on mène le diamètre qui passe par le point donné P, et l'on détermine le second point Q où cette droite rencontre la courbe, en s'appuyant sur ce que le centre divise $\overline{PQ}$ en deux parties égales. Sur PQ comme diagonale, on construit ensuite deux parallélogrammes dont les côtés sont respectivement parallèles à chacun des couples de diamètres conjugués. Les deux couples de nouveaux sommets de ces parallélogrammes sont également situés sur

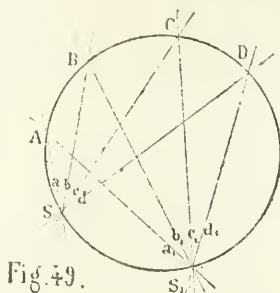


Fig. 49.

la courbe du second ordre. On peut de même construire facilement cinq tangentes à une courbe du second ordre, quand on connaît déjà une tangente et deux couples de diamètres conjugués de cette courbe.

*Si deux diamètres quelconques d'une courbe du second ordre sont toujours perpendiculaires l'un à l'autre, la courbe est un cercle.*

Dans ce cas, en effet, les côtés de tout parallélogramme inscrit sont perpendiculaires entre eux; le parallélogramme est donc un rectangle et ses diagonales, qui sont deux diamètres conjugués quelconques, ont même longueur; il en est donc de même pour tous les diamètres de la courbe.

Le cercle est une courbe du second ordre; cela résulte de la propriété dont jouissent les angles inscrits dans le même segment (comme $\angle ASB$ et $\angle AS_1B$, fig. 49) d'être égaux entre eux. En effet, en vertu de cette propriété, le cercle est engendré par deux faisceaux de rayons S et $S_1$ égaux entre eux et par conséquent projectifs. On peut de même démontrer directement que toutes les tangentes d'un cercle forment un

faisceau du second ordre. Les *coniques* des anciens, c'est-à-dire les courbes obtenues en coupant par un plan une surface conique à base circulaire, sont donc des courbes du second ordre.

En effet, une surface conique à base circulaire peut être projetée de deux de ses rayons suivant deux faisceaux projectifs de plans. Nous démontrerons plus tard que non seulement une conique est une courbe du second ordre, mais que réciproquement toute courbe du second ordre est une conique, ou bien que par toute courbe du second ordre on peut faire passer des surfaces coniques, qui pourront être coupées suivant des cercles.

Comme les propriétés projectives des cercles s'obtiennent de la manière la plus simple, tous les auteurs qui, à l'exemple de Steiner et Chasles, ont fondé la géométrie moderne sur le calcul, ont pris le cercle pour point de départ de leur étude des courbes du second ordre. En suivant cette marche, il faut encore prouver que deux formes fondamentales uniformes projectives ne peuvent engendrer d'autres courbes du second ordre que les coniques. En effet, s'il en avait d'autres, il faudrait démontrer à nouveau pour ces courbes tous les théorèmes établis pour le cercle; il faudrait prouver, par exemple, qu'elles sont projetées de deux quelconques de leurs points suivant deux faisceaux projectifs de rayons et que toutes leurs tangentes sont coupées par deux quelconques d'entre elles suivant des ponctuelles projectives. En effet, ces théorèmes ayant été établis pour le cercle, ils ne peuvent s'appliquer directement qu'aux sections faites dans des cônes à base circulaire.

*Si une courbe du second ordre a plus d'un couple de diamètres conjugués rectangulaires, c'est un cercle.*

En effet, par les extrémités A et B d'un diamètre menons des parallèles à deux diamètres conjugués rectangulaires; nous formerons un rectangle inscrit à la fois à la courbe du second ordre et à un certain cercle. Un autre couple de diamètres conjugués rectangulaires nous donnera un autre rectangle ayant la même diagonale $\overline{AB}$. En outre des points A et B, le cercle aura donc au moins quatre points communs avec la courbe et par conséquent il se confondra avec elle (page 75).

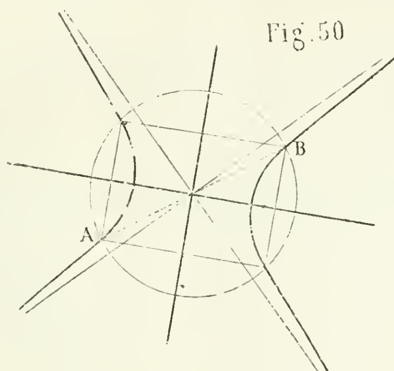
Quand deux diamètres conjugués sont rectangulaires, on leur donne le nom d'*axes* et l'on appelle *sommets* les points où ils coupent la courbe. Le cercle est la seule courbe du second ordre qui ait plus d'un couple d'axes, puisque deux quelconques de ses diamètres conjugués constituent un couple d'axes. Pour résoudre ce problème:

*Construire les axes d'une ellipse ou d'une hyperbole.*

Nous procéderons de la manière suivante. Du centre de la courbe nous décrirons une circonférence qui ait un diamètre $\overline{AB}$ (fig. 50) de la courbe pour diamètre; cette circonférence coupera les tangentes menées aux extrémités du diamètre et par suite la courbe elle-même. Chacune des deux demi-circonférences, separées par le diamètre, se trouve donc en partie à l'intérieur et en partie à l'extérieur de la courbe. Les quatre points d'intersection de la circonférence avec la courbe sont les sommets d'un rectangle inscrit, aux côtés desquels les axes sont parallèles. Il résulte de cette construction que:

*L'ellipse, de même que l'hyperbole, n'a qu'un seul couple d'axes.*

On peut dire aussi qu'un axe, dans une courbe du second ordre, est




un diamètre perpendiculaire aux cordes qui lui sont conjuguées et qu'il divise en deux parties égales. La parabole n'a qu'un axe; il renferme les points milieux de toutes les cordes perpendiculaires à la direction commune des diamètres de cette courbe. Chaque axe sépare une courbe du second ordre en deux moitiés symétriques.

Deux droites conjuguées sont harmoniquement séparées (page 85) par les deux tangentes qu'on peut mener à la courbe par leur point d'intersection.

Donc:

*Deux diamètres conjugués de l'hyperbole sont harmoniquement séparés par les asymptotes. L'un d'eux coupe donc la courbe, mais l'autre ne la rencontre pas. Les axes de l'hyperbole sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes* (page 45).

Les asymptotes déterminent donc sur toute droite parallèle à un diamètre un segment dont le point milieu est situé sur l'autre diamètre

(page 45). Si la droite coupe la courbe ou lui est tangente, le milieu de la corde interceptée sur la droite, ou son point de contact, coïncide avec le milieu de ce segment. De là résultent ces théorèmes (voir fig. 52).

*Les deux segments de toute sécante à l'hyperbole, compris entre la courbe et ses asymptotes, sont égaux.*

*Le segment intercepté par les asymptotes sur la tangente à une hyperbole est divisé en deux parties égales par le point de contact.*

La première de ces propriétés peut être utilisée pour construire l'hyperbole d'une manière très simple, quand on en connaît les deux asymptotes et un point propre. En effet, on peut immédiatement trouver un second point de la courbe sur une sécante quelconque menée par le point donné.

Les axes de l'hyperbole ne déterminent que deux sommets sur cette courbe ; l'ellipse au contraire en a quatre, puisque ses deux axes la coupent tous les deux ; la parabole n'a qu'un sommet propre, puisque son axe la rencontre pour la seconde fois en un point situé à l'infini.

Une hyperbole est dite *équilatère*, quand ses asymptotes sont perpendiculaires entre elles. Les angles que font entre eux deux diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère ont les asymptotes pour bissectrices (page 45). D'après cela, quand un diamètre pivote autour du centre, son conjugué tourne en sens inverse, mais d'une manière telle que les deux faisceaux décrits par ces diamètres sont égaux. Les faisceaux projectifs de rayons suivant lesquels l'hyperbole équilatère est projetée des extrémités d'un diamètre sont donc égaux entre eux ; en effet deux rayons correspondants de ces faisceaux sont parallèles à deux diamètres conjugués (page 111), puisqu'ils se coupent en un point de l'hyperbole.

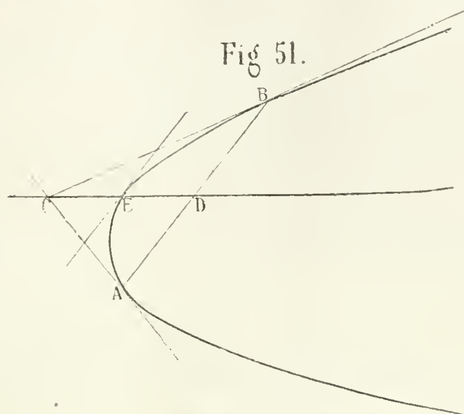
Joignons le milieu D d'une corde $\overline{AB}$ d'une parabole au point de concours C des tangentes en A et B ; la droite ainsi obtenue est un diamètre de la parabole ; en effet, c'est la polaire du point à l'infini sur $\overline{AB}$ (page 97). Mais C et D sont harmoniquement séparés l'un de l'autre par les deux points d'intersection de la droite $\overline{CD}$ avec la parabole. Or l'un de ces points est à l'infini ; donc l'autre E divise en deux parties égales le segment $\overline{CD}$ et par conséquent :

*La droite qui, dans la parabole, joint le pôle d'une corde au milieu de cette corde, est divisée en deux parties égales par la parabole.*

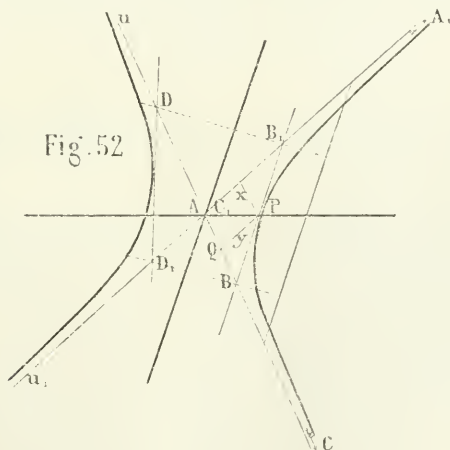
On voit de la même manière que, dans une hyperbole, les deux droites parallèles aux asymptotes, menées d'un point quelconque du

plan à la polaire de ce point, sont divisées en deux parties égales par la courbe.

Telles sont les relations métriques les plus importantes qu'on peut déduire dès maintenant de la théorie des polaires dans les courbes du




second ordre. Les théorèmes sur les quadrilatères et les triangles inscrits et circonscrits nous conduisent à quelques propriétés métriques de ces courbes qui ne manquent pas non plus d'intérêt. Prenons en particulier le théorème suivant (page 82):




*Les deux diagonales d'un quadrilatère $BB_1D_1D$ circonscrit à une courbe du second ordre se coupent en un point S, situé sur la droite qui joint les points de contact de deux quelconques des côtés opposés.*

Supposons que la courbe soit une hyperbole et que les deux couples de

côtés opposés soient les deux asymptotes et deux tangentes quelconques (fig. 52). S est situé sur la droite à l'infini et les deux diagonales $\overline{BD_1}$ et $\overline{B_1D}$ sont parallèles. Les deux triangles $D_1DB$ et $D_1B_1B$, qui ont même base $D_1B$, ont donc des surfaces équivalentes, et il en est encore de même pour les triangles $D_1AD$ et $B_1AB$ qui ne diffèrent des précédents que par le triangle commun $D_1AB$. Donc :

*Les triangles formés par les asymptotes d'une hyperbole et par des tangentes quelconques ont des aires égales.*

Les deux diagonales parallèles $\overline{BD_1}$ et $\overline{B_1D}$ et le centre A interceptent sur les asymptotes des segments proportionnels ; nous avons ainsi :

$$\frac{AB}{AD_1} = \frac{AD}{AB_1}; \text{ ou bien : } AB \times AB_1 = AD \times AD_1,$$

c'est-à-dire que le produit des segments déterminés sur les deux asymptotes par une tangente $\overline{BB_1}$ (ou $\overline{DD_1}$) est constant. Par le point de contact P de la tangente $\overline{BB_1}$, menons une parallèle $\overline{PQ}$ à l'une des asymptotes jusqu'à sa rencontre avec l'autre. Comme P divise en deux parties égales le segment $\overline{BB_1}$ intercepté sur la tangente (page 114),

$$PQ \text{ ou } y = \frac{1}{2} AB_1$$

$$AQ \text{ ou } x = \frac{1}{2} AB$$

Mais comme le produit $\overline{AB} \times \overline{AB_1}$ ne change pas, quand la tangente $\overline{BB_1}$ occupe une autre position, $xy$ reste aussi constant quelle que soit la position du point P sur l'hyperbole. Donc :

*Si l'on choisit les asymptotes d'une hyperbole pour axes d'un système de coordonnées parallèles, l'équation de cette courbe sera $xy = const.$*

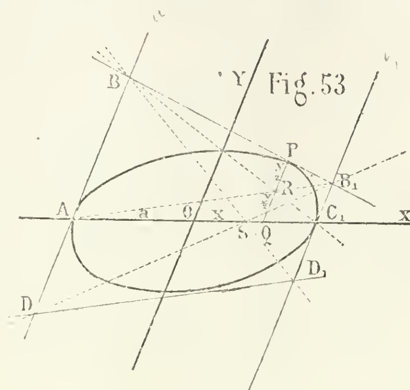
On met ainsi en évidence la liaison qui existe entre la théorie synthétique et la théorie analytique de l'hyperbole.

Dans les éléments de la géométrie analytique, on a l'habitude de rapporter l'ellipse et l'hyperbole, exprimées en coordonnées ordinaires, à deux diamètres conjugués. En appliquant ce procédé aux courbes du second ordre, nous démontrerons sans grande peine leur identité avec les courbes représentées analytiquement par des courbes du second degré.

Étant donnés deux diamètres conjugués $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ (fig. 53), il y en a au

moins un, $\overline{OX}$ par exemple, qui coupe la courbe du second ordre (page 114), et les tangentes $u$ et $u_1$ aux deux points A et C où il rencontre la courbe sont parallèles à l'autre diamètre conjugué $\overline{OY}$. Nous allons d'abord démontrer la proposition suivante:

*Le produit des segments* $\overline{AB}$ *et* $\overline{C_1B_1}$, *interceptés sur les tangentes*




u *et* $u_1$ *par une tangente quelconque* $\overline{BB_1}$ *de la courbe du second degré, est constant.*

En effet, une quatrième tangente quelconque $\overline{DD_1}$ forme avec les trois précédentes un quadrilatère circonscrit à la courbe, dont les diagonales $\overline{BD_1}$ et $\overline{B_1D}$ se coupent en un point S du diamètre $\overline{AC_1}$. On déduit de là la proportion.

$$\frac{AB}{C_1D_1} = \frac{AD}{C_1B_1}; \quad \text{ou bien} \quad AB \times C_1B_1 = AD \times C_1D_1$$

Ce produit est donc constant ; il sera positif et aura pour valeur $+ b^2$ quand la courbe est une ellipse; $b$ est le diamètre de l'ellipse dirigé suivant $\overline{OY}$, comme on le voit aisément en menant $\overline{DD_1}$ parallèle à $\overline{OX}$. Dans le cas de l'hyperbole, le produit $AB \times C_1B_1$ est négatif et égal à $-b^2$, parce que les segments AB et $C_1B_1$ ont des directions opposées; $b$ est la grandeur absolue du segment déterminé par chacune des asymptotes sur les tangentes parallèles $u$ et $u_1$.

Les trois tangentes $u$, $u_1$ et $\overline{BB_1}$, dont la dernière a pour point de contact le point P, forment un triangle circonscrit à la courbe, qui a pour sommets B, $B_1$ et le point à l'infini sur le diamètre $\overline{OY}$; les trois droites, qui joignent les points de contact des côtés aux sommets opposés, se

coupent donc en un même point (page 85); c'est-à-dire que le point R, où se coupent les droites $\overline{BC_1}$ et $\overline{AB_1}$, est situé sur l'ordonnée $y$ ou PQ du point P. Mais comme :

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} = \frac{PB_1}{BB_1} = \frac{RP}{AB},$$

il faut que

$$QR = RP = \frac{1}{2}PQ, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}y.$$

L'équation de la courbe du second ordre s'obtiendra maintenant en multipliant membre à membre les deux relations :

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} \quad \text{et} \quad \frac{QR}{C_1B_1} = \frac{AQ}{AC_1}$$

et en faisant dans le résultat : $QR = \frac{1}{2}y$, $AB.\ C_1B_1 = \pm b^2$

$AC_1 = 2.AO = 2a$, $OQ = x$, $QC_1 = a - x$ et $AQ = a + x$.

Nous avons ainsi

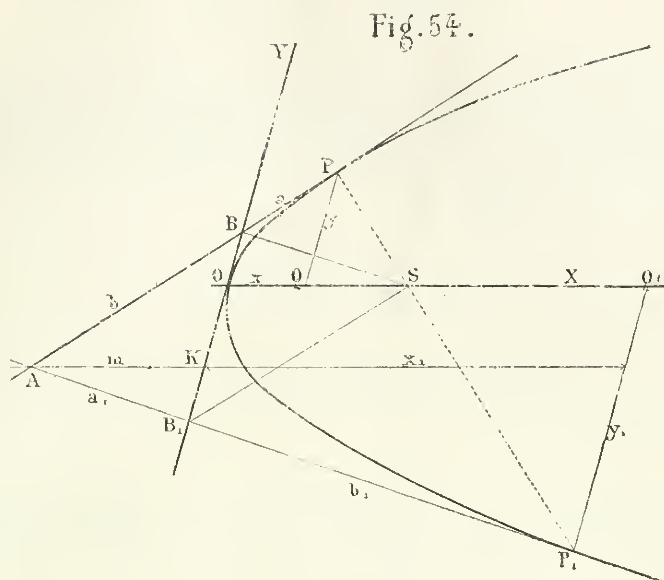
$$\pm\frac{y^2}{4b^2} = \frac{a^2 - x^2}{4a^2}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le signe supérieur donnera l'ellipse et le signe inférieur l'hyperbole. Cette équation est vérifiée par les coordonnées $x, y$ d'un point quelconque P de la courbe du second ordre, quand cette dernière est rapportée à deux diamètres conjugués.

Quand la courbe est une parabole, on prend habituellement pour axe des ordonnées une tangente quelconque $\overline{OY}$ (fig. 54) et pour axe des abcisses le diamètre $\overline{OX}$ qui passe par le point de contact O de $\overline{OY}$. Deux autres tangentes quelconques $\overline{AP}$ et $\overline{AP_1}$ qui coupent $\overline{OY}$ en B et $B_1$, constituent les deux côtés opposés d'un quadrilatère, circonscrit à la courbe, dont les deux autres côtés opposés sont $\overline{OY}$ et la droite à l'infini ; le point d'intersection S des deux diagonales de ce quadrilatère est donc situé sur les deux droites $\overline{PP_1}$ et $\overline{OX}$ qui joignent les points

de contact des couples de côtés opposés. Mais comme le quadrilatère $ABSB_1$ est pour cette raison un parallélogramme, que les triangles BPS

Fig. 54.




et $B_1SP_1$ sont semblables et que de plus les ordonnées PQ et $P_1Q_1$, ou $y$ et $y_1$, des points P et P, sont parallèles, nous avons :

$$\frac{y}{y_1}=\frac{PS}{SP_1}=\frac{BP}{B_1S}=\frac{BP}{AB};$$

et de même

$$\frac{y}{y_1}=\frac{BS}{B_1P_1}=\frac{AB_1}{B_1P_1}.$$

Il en résulte que :

$$\frac{BP}{AB}=\frac{AB_1}{B_1P_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

C'est le théorème que nous avons démontré précédemment : deux tangentes quelconques $\overline{AP}$ et $\overline{AP_1}$ d'une parabole sont divisées par toutes les autres tangentes en parties proportionnelles.

Menons $\overline{AK}$ parallèle à $\overline{OX}$ et prenons K sur $\overline{OY}$ ; nous avons :

$$\frac{AK}{OQ_1}=\frac{AB_1}{B_1P_1}=\frac{y}{y_1} \quad \text{et} \quad \frac{OQ}{AK}=\frac{BP}{AB}=\frac{y}{y_1}.$$

Multiplions ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{OQ}{OQ_1} = \frac{y^2}{y_1^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1^2}.$$

C'est-à-dire : *les abscisses* x *et* $x_1$ *des deux points P et* $P_1$ *de la parabole sont entre elles comme les carrés des ordonnées correspondantes.*

Habituellement, on écrit l'équation de la parabole sous la forme $y^2 = 2px$, en posant $\frac{y_1^2}{x_1} = 2p$.

# DIXIEME LEÇON.

## Systèmes réglés et surfaces réglées[1].

La considération de deux formes fondamentales uniformes projectives, qui sont situées dans le même plan ou qui appartiennent à la même gerbe de rayons, nous a conduits aux courbes, aux faisceaux de rayons et aux surfaces coniques du second ordre. Nous allons examiner maintenant si deux formes fondamentales projectives de première espèce ne peuvent pas engendrer d'autres formes que celles dites du second ordre. Nous trouvons d'abord que :

Un faisceau de rayons S et une ponctuelle projective $u$ engendrent le même faisceau de plans du premier, ou du second ordre, que le faisceau donné S et le faisceau de rayons qui projette $u$ du sommet S. En effet, le plan qui réunit un point de $u$ et le rayon correspondant du premier faisceau passe aussi par le rayon correspondant du second faisceau.

Un faisceau de rayons S et un faisceau de plans $u$ qui lui est projectif engendrent la même ponctuelle du premier, ou du second ordre, que le faisceau S et celui suivant lequel $u$ est coupé par le plan de S. En effet, le point où se rencontrent un plan de $u$ et le rayon correspondant du premier faisceau est situé aussi sur le rayon correspondant du second faisceau.

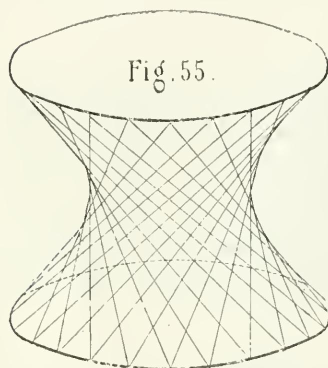
---

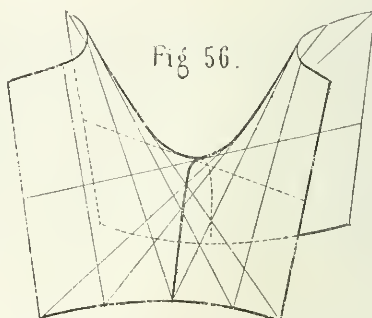
1. La langue française ne contenant pas de mot absolument équivalent au mot *regelschaar*, nous avons dû traduire ce dernier par *système réglé* (système qui peut être formé d'un nombre fini de rayons), par opposition à *regelfläche* surface réglée (qui contient une infinité de rayons).

Deux faisceaux projectifs de rayons, situés d'une manière quelconque dans l'espace, n'engendrent pas de forme nouvelle (tout au moins, pas immédiatement). En effet, deux rayons quelconques, qui se correspondent, ne sont généralement pas dans un même plan et par suite n'ont pas de point d'intersection commun. De même, une ponctuelle et un faisceau de plans qui lui est projectif n'engendrent pas de forme nouvelle, puisqu'un point de la ponctuelle et le plan qui lui correspond dans le faisceau ne déterminent pas d'élément pouvant appartenir à une troisième forme.

Nous n'obtiendrons donc de formes nouvelles qu'en considérant deux ponctuelles ou deux faisceaux projectifs de plans, situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Soient $u$ et $u_1$ deux ponctuelles projectives, non situées dans le


Fig. 55.


Fig. 56.

même plan; elles engendrent un système V, formé des droites qui unissent deux à deux les points correspondants des ponctuelles, et que nous appellerons *système de rayons* ou *système réglé*. Deux quelconques de ces rayons ne sont jamais dans un même plan; car s'il en était autrement, deux points de $u$ et deux points de $u_1$ seraient dans ce même plan; il en serait donc de même pour $u$ et $u_1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le système continu des rayons d'un système réglé constitue une surface courbe, appelée *surface réglée*, et qui a les propriétés suivantes :

*La surface réglée est encore engendrée par un second système* U *de rayons. Toute droite d'un des systèmes rencontre toutes les droites de l'autre système; au contraire, deux droites d'un même système ne sont jamais situées dans un même plan.*

Tout point, situé sur un rayon de l'un des systèmes, est aussi sur un rayon de l'autre.

Tout plan, qui passe par un rayon de l'un des systèmes, contient aussi un rayon de l'autre.

En effet, soient $v$, $v_1$, $v_2$, trois rayons quelconques du système V, qui joignent chacun deux points correspondants de $u$ et $u_1$ et soit $u_2$ une droite qui rencontre aussi les trois rayons $v$, $v_1$ $v_2$. Projetons les ponctuelles $u$ et $u_1$ de l'axe $u_2$; nous obtenons deux faisceaux projectifs de plans, qui ont les trois plans $\overline{u_2v}$, $\overline{u_2v_1}$ et $\overline{u_2v_2}$ communs et qui, par conséquent, ont tous leurs éléments correspondants communs (voir page 55).

Deux points correspondants quelconques de $u$ et $u_1$ sont donc dans un même plan avec $u_2$ et par conséquent $u_2$ sera rencontré par chacun des rayons du système réglé V. Il en sera de même pour toute autre droite $u_3$ qui coupe les trois rayons $v$, $v_1$, $v_2$. Donc :

*Le système réglé* U *se compose de toutes les droites qui coupent trois rayons quelconques* v, $v_1$ $v_2$ *du système réglé* V. *De même le système* V *se compose de toutes les droites qui coupent trois rayons* u, $u_1$, $u_2$, *du système* U.

Chacun des rayons d'un système est appelé une *directrice* de l'autre système, et chacun des deux systèmes est dit le *système directeur* de l'autre. La surface réglée peut donc être décrite de deux manières différentes par une droite qui glisse sur trois droites fixes telles que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan. Les trois droites fixes sont les directrices du système réglé décrit par la droite mobile. Celle-ci rencontre une fois chacun des points de toute directrice et se trouve une fois dans chacun des plans qu'on peut faire passer par une directrice (comp. page 26). Ces considérations démontrent donc les théorèmes énoncés précédemment.

Deux faisceaux projectifs de plans, $u$ et $u_1$ dont les axes ne sont pas situés dans un même plan, engendrent un système réglé. Ce dernier s'obtient aussi au moyen des ponctuelles projectives $u$ et $u_1$ dont la première est la section du faisceau $u_1$ par la droite $u$ et dont la seconde est la section du faisceau $u$ par la droite $u_1$. En effet, chaque droite, suivant laquelle se coupent deux plans correspondants de ces faisceaux, joint aussi l'un avec l'autre deux points correspondants de ces ponctuelles.

Un système réglé est coupé par

Un système réglé est projeté de

deux quelconques de ses directrices suivant des ponctuelles projectives.

deux quelconques de ses directrices suivant des faisceaux projectifs de plans.

En effet, soient $w$, $w_1$, $w_2$ trois directrices du système réglé, c'est-à-dire trois droites telles que chaque rayon du système les coupe. Nous obtiendrons autant de rayons du système réglé que nous voudrons, soit en faisant passer une série de plans par $w_2$, et en joignant dans chacun d'eux les deux points où $w$ et $w_1$ sont coupés par ce plan, soit en prenant une série de points sur $w_2$ et en cherchant la ligne d'intersection des deux plans que chacun de ces points détermine avec $w$ et $w_1$. Le système réglé sera donc coupé par les deux directrices $w$ et $w_1$ suivant deux ponctuelles perspectives au faisceau de plans $w_2$ ; et en même temps, il sera projeté de $w$ et $w_1$ suivant deux faisceaux de plans perspectifs à la ponctuelle $w_2$ et par suite projectifs entre eux.

*Quatre rayons d'un système réglé sont appelés* RAYONS HARMONIQUES, *quand ils sont coupés par une directrice quelconque, et par conséquent par toutes les directrices, en quatre points harmoniques ; et quand ils sont projetés d'une directrice quelconque suivant quatre plans harmoniques.*

Soient $w$ et $w_1$ deux directrices du système réglé ; ce dernier détermine sur les directrices deux ponctuelles projectives $w$ et $w_1$ ; et si quatre rayons quelconques du système réglé sont coupés par $w$ en quatre points harmoniques, leurs intersections avec $w_1$ seront aussi quatre points harmoniques. Les quatre rayons seront en même temps projetés de $w_1$ par quatre plans harmoniques ; en effet, ces plans passent par les quatre points d'intersection, situés sur $w$ et qui sont harmoniques.

Étant donnés trois rayons $a$, $b$, $c$ de l'espace, qui ne sont pas situés deux à deux dans un même plan, ils déterminent un quatrième rayon harmonique $d$, qui est séparé de l'un d'eux, de $b$ par exemple. Si, sur l'une quelconques des droites qui coupent les trois rayons donnés, nous cherchons le quatrième point harmonique aux trois points d'intersection, ce point sera situé sur $d$. En général, $d$ est un quatrième rayon du système réglé auquel appartiennent les rayons $a$, $b$, $c$ et, sur ce système, il est harmoniquement séparé de $b$ par $a$ et $c$.

Quand une droite a plus de deux points communs avec une surface réglée, elle est située tout entière sur cette surface ; en effet, elle coupe

alors plus de deux droites d'un système; elle doit donc être une directrice de ce système et appartenir au deuxième système réglé. En raison de cette propriété, on donne à la surface réglée que nous étudions le nom de *surface réglée du second ordre* pour la distinguer des autres surfaces à génératrices rectilignes. Un plan qui coupe la surface suivant un rayon $u$ de l'un des systèmes et par suite aussi (page 123) suivant un autre rayon $v$ de l'autre système, ne peut avoir avec la surface aucun point commun P, qui ne soit pas situé sur les droites $u$ et $v$. En effet, s'il en était autrement, toute droite passant par P et coupant $u$ et $v$, chacune en un point, appartiendrait à la surface et le plan tout entier se confondrait avec celle-ci, ce qui est impossible. Puisque toute droite du plan qui passe par le point d'intersection de $u$ et $v$, n'a que ce point $uv$ commun avec la surface, nous dirons que *ce plan est tangent à la surface au point* uv.

*Le nombre des plans tangents qu'on peut mener à la surface par une droite quelconque est égal au nombre des points communs à la droite et à la surface.*

En effet, comme chacun de ces plans tangents contient un rayon d'un des systèmes réglés (et aussi un rayon de l'autre système), la droite donnée a un point d'intersection commun avec ce rayon. Mais deux de ces points d'intersection ne coïncideront jamais, parce que deux rayons d'un même système réglé ne sont jamais dans un même plan. Il résulte de là qu'une droite est tout entière sur la surface réglée, quand elle est l'intersection de plus de deux plans tangents à cette surface.

Imaginons un système réglé engendré par deux faisceaux projectifs de plans et supposons qu'on le coupe par un plan $\Sigma$; nous aurons dans ce plan deux faisceaux projectifs de rayons, et chaque point d'intersection de deux de leurs rayons homologues sera situé sur un rayon du système réglé. Supposons au contraire le système réglé engendré par deux ponctuelles projectives et projetons-les d'un même point quelconque S; nous obtiendrons deux faisceaux de rayons projectifs et concentriques et le plan qui joint deux rayons homologues de ces faisceaux passera par un rayon du système réglé. Nous obtenons ainsi la première partie des propositions suivantes :

Un système réglé est coupé par un plan quelconque $\Sigma$, qui ne contient aucun de ses rayons, suivant

Un système réglé est projeté d'un point S, qui n'est situé sur aucun de ses rayons, suivant un

une courbe du second ordre. Tous les plans tangents à la surface réglée aux points d'une telle courbe du second ordre forment un faisceau de plans du second ordre.

faisceau de plans du second ordre. Tous les points de contact des plans de ce faisceau avec la surface réglée sont situés sur une courbe du second ordre.

Pour démontrer la seconde partie de la proposition de droite, menons un plan par trois des points de contact. Ce plan coupera le faisceau de plans suivant un faisceau de rayons du second ordre, dans lequel les trois points choisis sont des points de contact et qui enveloppe une courbe du second ordre. Mais cette courbe est identique avec celle que le plan détermine par son intersection avec la surface, puisque ces deux courbes ont trois points communs ainsi que les tangentes en ces points. La proposition de gauche se démontrerait de même, en faisant passer un faisceau de plans tangents à la surface réglée par le point où se coupent trois quelconques de ses plans tangents.

Une surface réglée du second ordre s'appelle un *hyperboloïde simple*, ou *hyperboloïde à une nappe* (fig. 55), quand aucune de ses droites n'est située à l'infini, et qu'elle n'a qu'une courbe du second ordre commune avec le plan à l'infini. Elle prend au contraire le nom de *paraboloïde hyperbolique*, quand l'un, et par suite aussi l'autre, de ses systèmes réglés a un rayon situé à l'infini. Dans un paraboloïde hyperbolique, chacun des deux systèmes réglés est coupé par deux quelconques de ses directrices suivant des ponctuelles projectives *semblables*, dont les points à l'infini se correspondent. Un paraboloïde hyperbolique peut aussi être décrit par une droite qui glisse le long de deux droites fixes $u$ et $u_1$, qui ne se coupent pas, et qui reste parallèle à un plan fixe qui ne contient pas les directions de $u$ et $u_1$. En effet, la droite mobile coupe non seulement les droites $u$ et $u_1$, mais encore la droite à l'infini du plan donné ; elle décrit donc une surface réglée qui contient un rayon, et par suite un second rayon, à l'infini. Tout plan, qui ne passe par aucun des rayons d'un paraboloïde hyperbolique, le coupe suivant une hyperbole ; la courbe d'intersection est une parabole seulement dans le cas où le plan contient une direction parfaitement déterminée. En effet, la courbe d'intersection, qui est du second ordre, passe par les deux points où les rayons à l'infini de la surface sont coupés par le plan et ces points ne coïncident que lorsque le plan sécant passe par le point commun aux deux rayons à l'infini.

L'hyperboloïde à une nappe n'est pas tangent au plan à l'infini comme le paraboloïde, mais il est coupé par ce plan suivant une courbe du second ordre. Les plans tangents aux points à l'infini de l'hyperboloïde sont donc tous des plans propres, qui (d'après la page 125) se coupent en un même point S et forment un faisceau de plans du second ordre. La surface conique S, enveloppée par ces plans, est tangente à l'hyperboloïde le long de sa courbe à l'infini ; on l'appelle le *cône asymptotique* de cette surface. Chacun des rayons du cône asymptotique est parallèle à l'un des rayons des deux systèmes réglés, puisqu'il en contient le point à l'infini. Un plan quelconque, qui ne passe par aucun des rayons de l'hyperboloïde simple, coupe cette surface suivant une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant qu'il a en commun avec la courbe à l'infini deux points, un seul point ou aucun point ; ou bien, suivant qu'il est parallèle à deux rayons du cône asympotique, ou à un seul, ou enfin qu'il n'est parallèle à aucun d'eux.

Nous ajouterons encore la proposition suivante qui résulte de ce qui précède :

*Si par un point donné quelconque l'on mène des parallèles à tous les rayons d'un système réglé, toutes ces parallèles sont situées dans un même plan ou sur un cône du second degré, suivant que la surface réglée, à laquelle appartient le système, est un paraboloïde ou un hyperboloïde à une nappe.*

Un paraboloide hyperbolique est dit *équilatère*, quand les rayons de ses deux systèmes réglés sont parallèles à deux plans perpendiculaires l'un à l'autre. Chaque système réglé du paraboloïde équilatère contient un rayon qui coupe normalement le plan directeur, et par suite un rayon quelconque de l'autre système réglé.

---

# ONZIÈME LEÇON.

## Projectivité des formes élémentaires.

Les formes fondamentales uniformes projectives donnent naissance, comme nous l'avons vu, à cinq formes du second ordre qui sont : la courbe ou ponctuelle du second ordre, le faisceau de rayons et le faisceau de plans du second ordre, la surface conique du second ordre et le système réglé. Il convient, comme l'a fait Von Staudt, de réunir ces cinq formes du second ordre et les trois formes fondamentales uniformes sous la dénomination commune de *formes élémentaires*. Les formes élémentaires comprennent donc : 1° deux formes de points, les ponctuelles du premier et du second ordre; 2° deux formes de plans, les faisceaux de plans du premier et du second ordre ; 3° enfin quatre formes de rayons, les faisceaux de rayons du premier et du second ordre, la surface conique et le système réglé.

Nous allons montrer dans cette leçon que les formes élémentaires peuvent être rapportées les unes aux autres d'une manière analogue à celle qu'on a suivie pour les formes fondamentales uniformes. Le champ de nos recherches s'étend ainsi d'une manière notable; en effet, on voit de suite que nous arriverons de cette façon à un nombre considérable de nouvelles formes de points, de plans et de rayons, qui possèdent des propriétés aussi remarquables que celles que nous avons considérées jusqu'ici. Nous serons en même temps conduits à d'autres propriétés importantes des formes du second ordre, qu'il serait difficile d'obtenir aussi simplement en suivant une autre marche.

Nous commencerons par rappeler d'abord des propositions établies

précédemment et qu'on peut considérer aussi comme définissant les éléments harmoniques dans les formes du second ordre.

Quatre points harmoniques d'une courbe du second ordre sont projetés d'un cinquième point quelconque de la courbe suivant quatre rayons harmoniques (page 77).

Quatre rayons harmoniques d'une surface conique du second ordre sont projetés d'un cinquième rayon quelconque de la surface suivant quatre plans harmoniques (page 90).

Quatre plans harmoniques d'un faisceau de plans du second ordre sont coupés par un cinquième plan quelconque du faisceau suivant quatre rayons harmoniques (p. 90).

Quatre rayons harmoniques d'un faisceau de rayons du second ordre sont coupés par un cinquième rayon quelconque du faisceau suivant quatre points harmoniques (page 77).

*Quatre rayons harmoniques d'un système réglé sont coupés par toute directrice du système en quatre points harmoniques, et sont projetés de toute directrice suivant quatre plans harmoniques* (*page* 124).

La définition que nous avons donnée précédemment (page 51) pour la projectivité des formes fondamentales peut s'étendre d'une manière générale aux formes élémentaires; ainsi :

*Deux formes élémentaires sont dites projectives, quand elles sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'à quatre éléments harmoniques de l'une des formes correspondent quatre éléments harmoniques de l'autre.*

Il découle de cette définition que deux formes élémentaires sont projectives l'une à l'autre, quand elles sont projectives à une seule et même autre forme.

Nous pouvons aussi étendre aux formes élémentaires la notion de perspectivité, définie pour des formes fondamentales uniformes en général, en disant que :

*Deux formes élémentaires projectives d'espèce différente sont dites perspectives, quand chaque élément de l'une est situé sur l'élément correspondant de l'autre.*

Par exemple, une courbe du second ordre est perspective à une surface conique qui passe par elle, quand à chacun des rayons de cette surface on fait correspondre le point de la courbe qui est situé sur lui. Une ponctuelle du second ordre est également projetée de chacun de ses

points suivant un faisceau de rayons qui lui est perspectif; la même chose a lieu pour un système réglé projeté d'une de ses directrices, etc.

Car deux formes élémentaires, dont l'une est ainsi engendrée au moyen de l'autre, sont aussi projectives, puisque quatre éléments harmoniques de l'une d'elles correspondent à quatre éléments harmoniques de l'autre. Si à chaque point d'une courbe du second ordre on fait correspondre la tangente en ce point, la courbe et le faisceau de rayons qui l'enveloppe sont perspectifs l'un à l'autre : en effet, quatre points harmoniques quelconques de la courbe sont les points de contact de quatre rayons harmoniques du faisceau (page 88). Deux courbes du

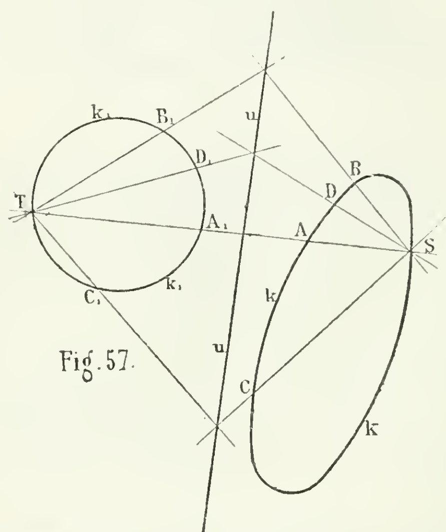


Fig. 57.

second ordre sont donc projectives l'une à l'autre, quand les faisceaux de rayons qui les enveloppent sont eux-mêmes projectifs entre eux.

On peut rapporter projectivement l'une à l'autre deux formes du second ordre en rapportant projectivement entre elles deux formes fondamentales uniformes qui leur sont perspectives. Deux formes élémentaires projectives peuvent donc toujours être regardées (page 50) comme la première et la dernière d'une série de formes élémentaires telles que chacune d'elles est perspective à celle qui la suit. Deux formes élémentaires peuvent aussi être projectivement rapportées l'une à l'autre, et d'une seule manière, de telle sorte qu'à trois éléments donnés de l'une correspondent respectivement trois éléments de l'autre :

en effet, ce théorème a déjà été démontré pour les formes fondamentales uniformes.

Soient, par exemple, deux ponctuelles du second ordre, $k$ et $k_1$ (fig. 57), situées dans le même plan, qu'il s'agit de rapporter projectivement l'une à l'autre, de telle sorte qu'aux points A, B, C de $k$ correspondent respectivement les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ de $k_1$. Désignons par S et $T_1$ les deux points de $k$ et $k_1$ qui sont respectivement projetés de A et $A_1$ par le rayon $\overline{AA_1}$ et projetons maintenant les ponctuelles données de S et $T_1$ suivant les deux faisceaux de rayons S (ABC...) et $T_1$ ($A_1B_1C_1$...). Ces deux derniers sont projectifs et en outre ils sont perspectifs, puisqu'ils ont en commun le rayon correspondant $\overline{AA_1}$. Par conséquent, deux points homologues D et $D_1$, appartenant aux deux ponctuelles, seront projetés de S et $T_1$ respectivement suivant deux rayons qui se coupent sur une droite déterminée $u$.

*Lorsque deux formes élémentaires projectives de même espèce sont superposées, elles ont tous leurs éléments correspondants communs, ou elles en ont deux au plus.*

En effet, des formes élémentaires identiques sont en même temps projectives.

Deux courbes du second ordre, qui sont dans le même plan et qui ont un point S commun, sont rapportées projectivement l'une à l'autre, si l'on fait correspondre deux quelconques de leurs points situés sur une droite passant par S. En effet les courbes sont, de cette manière, perspectives au faisceau S. Tout point commun à ces courbes et différent de S est un point correspondant commun ; le point S ne peut jouir de cette propriété que si les courbes ont une tangente commune en S et par suite si elles sont tangentes en ce point.

Deux courbes du second ordre, qui sont dans le même plan et qui ont une tangente commune $s$, sont rapportées projectivement l'une à l'autre, quand on fait correspondre entre elles deux quelconques de leurs tangentes qui se coupent en un point de $s$. En effet, les deux faisceaux du second ordre qui enveloppent les courbes sont perspectifs à la ponctuelle $s$. Toute tangente commune différente de S est une tangente correspondante commune aux deux courbes; $s$ ne peut jouir de cette propriété que si les courbes sont tangentes en un même point de $s$.

Deux courbes du second ordre, différentes l'une de l'autre et qui

sont rapportées entre elles d'après la manière indiquée à gauche, ont tout au plus trois joints correspondants communs. En effet, si, en outre de S, elles avaient encore quatre points communs, ou trois points communs et une tangente commune en S, elles seraient identiques (page 78).

De même, les courbes considérées à droite peuvent avoir, tout au plus, trois tangentes correspondantes communes. Nous sommes conduits ainsi à la double proposition qui suit :

Si deux courbes projectives du second ordre ont quatre points correspondants A, B, C, S communs, elles ont tous leurs points correspondants communs et par suite sont identiques.

Si deux courbes projectives du second ordre ont quatre tangentes correspondantes communes, elles ont toutes leurs tangentes correspondantes communes et par suite sont identiques.

Voici comment on démontre le théorème de gauche. On ne peut rapporter les courbes l'une à l'autre que d'une seule manière pour que les trois points A, B, C de l'une d'elles correspondent aux trois points A, B, C de l'autre; et l'on établit cette relation en rapportant perspectivement les deux courbes au faisceau de rayons S. Si les deux courbes doivent aussi avoir le point S pour point commun, elles auront encore une tangente commune en ce point et par conséquent seront identiques (page 78). — La proposition de droite se déduit de la précédente au moyen de la loi de réciprocité que nous avons déjà démontrée pour le plan. Le lecteur fera un exercice utile en cherchant une démonstration directe.

Si les deux courbes sont projetées d'un centre quelconque suivant deux surfaces coniques, on a pour ces surfaces une proposition double entièrement analogue. Si une courbe du second ordre est projective à un système réglé ou à une surface conique du second ordre, et si plus de trois points de la courbe sont situés sur les rayons qui leur correspondent, la courbe est perspective au système réglé ou à la surface conique : en effet, elle est identique avec la section que son plan détermine dans l'une ou l'autre de ces surfaces, puisqu'elle lui est projective et qu'elle a plus de trois points correspondants communs avec elle. De même un faisceau de plans du second ordre est en position perspective par rapport à un faisceau de rayons du second ordre ou à un système réglé qui lui est projectif, quand plus de trois de ses plans passent par

les rayons correspondants du faisceau de rayons ou du système réglé. Pour le démontrer, projetons la forme de rayons du second ordre du sommet du faisceau de plans; nous obtenons un second faisceau de plans du second ordre qui est identique avec le premier; car il lui est projectif et de plus il a plus de trois correspondants communs avec lui.

A ces considérations se rattache la démonstration des théorèmes suivants :

Deux surfaces coniques du second ordre qui ont des sommets différents et qui sont tangentes à un seul et même plan, passant par la droite *s* qui joint leurs sommets, se coupent suivant une courbe du second ordre.

En effet, rapportons perspectivement les surfaces coniques au faisceau de plans *s* : elles ont le rayon correspondant *s* qui leur est commun, et deux autres rayons correspondants quelconques des surfaces ont un point commun, puisqu'ils sont dans un même plan (passant par *s*). Le plan qui passe par trois quelconques des points d'intersection des rayons homologues coupe les surfaces coniques suivant deux courbes projectives du second ordre, qui sont identiques, puisqu'elles ont comme points correspondants communs, non seulement ces trois points d'intersection, mais encore un point de *s*.

Deux courbes du second ordre qui sont situées dans des plans différents et qui sont tangentes en un seul et même point à la droite d'intersection de leurs plans sont situées sur une même surface conique du second ordre.

En effet, rapportons perspectivement à la ponctuelle *s* les faisceaux de rayons du second ordre qui enveloppent les courbes : ils ont le rayon correspondant *s* qui leur est commun (voir page 131), et deux autres rayons correspondants quelconques des faisceaux sont dans un même plan, puisqu'ils se coupent sur *s*. Les deux faisceaux de rayons sont projetés du point d'intersection de trois quelconques des plans joignant les rayons homologues suivant deux faisceaux projectifs de plans du second ordre, qui sont identiques, puisqu'ils ont pour plans correspondants communs, non seulement ces trois plans, mais encore un autre plan passant par *s*.

La démonstration peut être présentée encore plus simplement. Pour établir la proposition de gauche, faisons passer un plan par trois points

communs aux surfaces coniques; les courbes d'intersection situées dans ce plan ont ces trois points communs et de plus le point d'intersection de $s$ avec le plan leur est aussi commun. Comme les courbes sont tangentes en ce dernier point à la droite suivant laquelle est coupé le plan tangent commun aux deux surfaces coniques, elles coïncident (page 78). On démontrerait le théorème de droite d'une manière analogue.

Il résulte incidemment de ces propositions que toute courbe du second ordre peut être considérée comme une section d'un cône à base circulaire. En effet, on peut, d'une infinité de manières, amener un cercle dans une position telle, par rapport à une courbe donnée du second ordre, que ces deux courbes soient tangentes entre elles, qu'elles soient situées dans des plans différents et par suite appartiennent à une seule et même surface conique. Les courbes du second ordre sont donc identiques avec les *coniques* des géomètres anciens. Dans ce qui suit, nous pourrons donc les désigner aussi par ce nom.

Si un faisceau de rayons du premier ordre S est projectif à une courbe $s$ du second ordre et situé dans son plan, sans toutefois lui être perspectif, il passe au plus trois rayons du faisceau par les points qui leur correspondent sur la courbe, mais il en passe au moins un.

Si une ponctuelle du premier ordre est projective à un faisceau de rayons du second ordre et située dans son plan, sans toutefois lui être perspective, il y a au plus trois points de la ponctuelle qui soient situés sur les rayons qui leur correspondent dans le faisceau, mais il y en a au moins un.

En effet, tout faisceau $S_1$ de rayons perspectif à la courbe $s$ est aussi projectif au faisceau S : il engendre donc en général avec celui-ci une deuxième courbe du second ordre, qui doit avoir en commun avec la première tous les points situés sur les rayons correspondants de S. Si donc plus de trois rayons de S passent par les points qui leur correspondent sur $s$, les deux courbes ont au moins quatre points communs indépendamment de $S_1$ : elles sont donc identiques et S est perspectif à $s$. — Comme toute courbe du second ordre partage le plan en deux parties distinctes, si les deux courbes précédentes ne coïncident pas, elles sont tangentes en leur point commun $S_1$, ou bien elles se coupent en ce point ; mais alors elles se rencontreront en un autre point P, puisque l'une des courbes est située, partie à l'intérieur, partie à l'extérieur de l'autre.

Dans ce dernier cas, les rayons $\overline{SP}$ et $\overline{S_1P}$ se correspondent et par conséquent $\overline{SP}$ passe par le point P qui lui correspond sur la courbe *s*. Dans le premier cas, au rayon $\overline{SS_1}$ de S correspond la tangente commune en $S_1$ et par suite le point $S_1$ de la courbe S qui est situé sur $\overline{SS_1}$. Donc il y a au moins un point de la courbe situé sur le rayon qui lui correspond dans le faisceau.

Les formes du premier et du second ordre dans la gerbe donnent naissance à des propositions entièrement analogues. Nous en concluons que :

*Étant données une forme fondamentale uniforme et une forme élémentaire du second ordre projectivement rapportées l'une à l'autre, s'il y a plus de trois éléments de l'une qui passent par les éléments qui leur correspondent dans l'autre, les deux formes sont perspectives, c'est-à-dire que tout élément de l'une passe par l'élément qui lui correspond dans l'autre.*

Si la forme du second ordre est un système réglé et si l'autre forme est une ponctuelle ou un faisceau de plans du premier ordre, nous pouvons conclure de ce qui précède que ces formes seront perspectives toutes les fois que trois rayons du système réglé passeront par les trois points qui leur correspondent dans la ponctuelle, ou par les trois plans qui leur correspondent dans le faisceau de plans. En effet, le lieu de la ponctuelle ou l'axe du faisceau de plans est alors une directrice du système réglé (page 124), puisqu'il coupe trois de ses rayons.

L'importance de ces théorèmes ressort des conséquences mêmes qui s'en déduisent :

Un faisceau de plans du premier ordre et un système réglé [ou une surface conique du second ordre] qui lui est projectif engendrent en général *une courbe gauche du troisième ordre*, qui a au moins un point et au plus trois points communs avec un plan donné.

Une ponctuelle du premier ordre et un système réglé [ou un faisceau de rayons du second ordre] qui lui est projectif engendrent en général *un faisceau de plans de troisième ordre*, dont un plan au moins et trois plans au plus passent par un point quelconque donné.

En effet, un plan coupe le système réglé [ou la surface conique] suivant une ponctuelle du second ordre qui lui est perspective et dont

en général trois points au plus sont situés sur les plans qui leur correspondent dans le faisceau.

Si une ponctuelle *u* du premier ordre et une ponctuelle *k* du second ordre, qui lui est projective, sont situées dans un même plan, toutes les droites qui joignent leurs points homologues engendrent *un faisceau de rayons du troisième ordre*, qui a au moins un rayon et au plus trois rayons communs avec tout faisceau du premier ordre, qui ne fait pas lui-même partie du faisceau du troisième ordre.

Si un faisceau de rayons du premier ordre et un faisceau de rayons du second ordre, qui lui est projectif, sont situés dans un même plan, tous les points d'intersection de leurs rayons homologues forment *une courbe du troisième ordre*, qui a au moins un point et au plus trois points communs avec toute droite du plan qui ne fait pas elle-même partie de la courbe du troisième ordre.

En effet, soit S un faisceau quelconque du premier ordre perspectif à *u* et par conséquent projectif à *k* : ou bien tous ses rayons passent par les points de K qui leur correspondent, ou bien il y en a trois au plus et un au moins qui jouissent de cette propriété.

Si la ponctuelle *u* du premier ordre et la ponctuelle *k* du second ordre ont un point correspondant commun P, chaque rayon passant par ce point doit être regardé comme une droite qui joint deux points correspondants (réunis ensemble), et le faisceau de rayons du troisième ordre contient le faisceau du premier ordre P. Les théorèmes qui suivent doivent donc être considérés, non pas comme des cas d'exception, mais bien comme des cas particuliers des théorèmes qu'on vient de démontrer.

Si une ponctuelle du premier ordre *u* et une ponctuelle du second ordre *k*, qui lui est projective, ont deux points correspondants communs A et B, elles engendrent un faisceau de rayons du premier ordre.

Si un faisceau de rayons du premier ordre et un faisceau de rayons du second ordre, qui lui est projectif, ont deux rayons correspondants communs, ils engendrent une ponctuelle du premier ordre.

Soit $C_1$ le point de *k* qui correspond à C de *u* et S le point de *k* qui

est projeté de $C_1$ suivant le rayon $\overline{CC_1}$. Rapportons $u$ et $k$ perspectivement au faisceau de rayons S ; ces deux formes se trouvent alors rapportées projectivement entre elles de telle manière qu'aux trois points A, B, C de $u$ correspondent respectivement les trois points A, B, $C_1$ de $k$. Mais, comme la projectivité de $u$ et $k$ est déterminée complètement par trois couples de points homologues (pages 131), les droites qui joignent les points homologues forment effectivement un faisceau de rayons du premier ordre dont le centre est situé sur la courbe $k$.

Une courbe du second ordre et deux droites $a$ et $b$, qui ont chacun un point commun avec la courbe, mais qui ne sont pas situées dans son plan et qui ne sont pas elles-mêmes dans un même plan, déterminent un système réglé, perspectif à la courbe et dont les deux droites sont des directrices.

En effet, les deux faisceaux de plans $a$ et $b$, perspectifs à la courbe, engendrent le système réglé.

Un faisceau de plans du second ordre et deux droites $a$ et $b$, qui sont projetées de son sommet suivant deux de ses plans, mais qui ne se rencontrent pas, déterminent un système réglé, perspectif au faisceau et dont les deux droites sont des directrices.

En effet, les deux ponctuelles rectilignes $a$ et $b$, perspectives au faisceau de plans, engendrent le système réglé.

Le système des directrices du système réglé contient les droites $a$ et $b$ : de même il est respectivement perspectif à la courbe et au faisceau de plans du second ordre.

Si une ponctuelle rectiligne et une courbe au second ordre, projectives entre elles, ont un point correspondant A commun, mais ne sont pas situées dans un même plan, elles engendrent un système réglé qui leur est perspectif.

Si un faisceau de plans du premier ordre et un faisceau de plans du second ordre, projectifs l'un à l'autre, ont un plan correspondant commun, mais si l'axe du premier faisceau ne passe pas par le sommet du second, ils engendrent un système réglé qui leur est perspectif.

Soient A, $B_1$, $C_1$ (théorème de gauche), les points de la courbe qui correspondent aux points A, B, C de la ponctuelle rectiligne ; le système

réglé perspectif à la courbe, auquel appartiennent les droites $BB_1$, $CC_1$, est aussi perspectif à la ponctuelle rectiligne, puisque les trois points A, B, C de cette dernière sont situés sur les rayons qui leur correspondent dans le système réglé (page 135). La proposition de droite se démontre d'une manière entièrement analogue.

D'un point quelconque, non situé dans le plan de la courbe, on projette cette dernière suivant une surface conique du second ordre et le système réglé suivant un faisceau de plans du premier ou du second ordre. Un plan quelconque coupe le faisceau de plans du second ordre suivant un faisceau de rayons du second ordre, et le système réglé suivant une ponctuelle du premier ou du second ordre. Donc :

Si une ponctuelle rectiligne et une surface conique du second ordre sont projectives et si un point de la première forme est situé sur le rayon qui lui correspond dans la seconde, les deux formes engendrent un faisceau de plans du premier ou du second ordre, qui leur est perspectif.

Si un faisceau de plans du premier ordre et un faisceau de rayons du second ordre sont projectifs et si un plan du premier faisceau passe par le rayon qui lui correspond dans le second, les deux faisceaux engendrent une ponctuelle du premier ou du second ordre, qui leur est perspective.

Si l'on remarque que toute courbe du second ordre peut être considérée comme une section d'une surface conique du second ordre, ce théorème conduit immédiatement au suivant :

Si une ponctuelle rectiligne et une courbe du second ordre, projectives l'une à l'autre, sont situées dans un même plan et ont un point correspondant commun, elles engendrent un faisceau de rayons du premier ou du second ordre, qui leur est perspectif.

Si un faisceau de rayons du premier ordre et un faisceau de rayons du second ordre, projectifs l'un à l'autre, sont situés dans le même plan et ont un rayon correspondant commun, ils engendrent une ponctuelle du premier ou du second ordre, qui leur est perspective.

*Deux systèmes réglés* a b c *et* $a_1$ $b_1$ $c_1$, *projectifs entre eux et tels que chacun d'eux constitue un système de directrices de l'autre, engendrent en même temps une courbe du second ordre et un faisceau de plans du second ordre qui leur sont perspectifs.*

En effet, les deux systèmes réglés ne peuvent être rapportés projectivement l'un à l'autre que d'une seule manière pour que les rayons $a$, $b$, $c$ de l'un des systèmes correspondent aux rayons $a_1$, $b_1$, $c_1$ de l'autre. Or cette relation existe réellement quand on fait correspondre deux à deux les rayons qui se coupent en un seul et même point du plan qui passe par les trois points $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ ou qui sont projetés par un seul et même plan du point d'intersection des trois plans $aa_1$, $bb_1$ et $cc_1$.

Deux courbes du second ordre, projectives entre elles, et qui sont placées l'une sur l'autre, engendrent un faisceau du second ordre qui leur est perspectif, ou bien il existe un point par lequel passent les droites qui joignent deux à deux les points homologues des courbes.

Deux faisceaux de rayons du second ordre, projectifs entre eux et qui sont placés l'un sur l'autre, engendrent une courbe du second ordre qui leur est perspective, ou il existe une droite sur laquelle se coupent deux à deux les rayons homologues des faisceaux.

En effet, tout système réglé perspectif à l'une des courbes engendre avec son système directeur, que nous pouvons rapporter perspectivement à l'autre courbe, un faisceau de plans du second ordre qui est perspectif aux quatre formes ; suivant que le sommet de ce faisceau sera placé en dehors du plan des courbes, ou sur ce plan même, nous aurons l'un ou l'autre des deux cas que nous venons de citer. — Si donc, parmi les droites qui joignent deux à deux les points homologues des courbes, trois quelconques passent par un seul et même point U (voir plus loin les figures 60 et 61), toutes ces droites se coupent en ce même point.

Deux courbes projectives du second ordre ABCD et $ABC_1D_1$, qui ont deux points correspondants A et B communs, mais qui ne sont pas situées dans le même plan, engendrent une forme de rayons du second ordre qui leur est perspective ; c'est un système réglé ou une surface conique du second ordre.

Deux faisceaux projectifs de plans du second ordre, qui ont deux plans correspondants communs, mais qui ne sont pas concentriques, engendrent une forme de rayons du second ordre qui leur est perspective ; c'est un système réglé ou un faisceau de rayons du second ordre.

En effet, le système réglé ou la surface conique perspective à la courbe ABCD, à laquelle appartiennent les rayons $\overline{CC_1}$ et $\overline{DD_1}$, est également perspectif à la courbe $ABC_1D_1$ (page 132). Ces courbes engendrent une surface conique quand leurs tangentes en C et $C_1$ coupent la droite $\overline{AB}$ en un seul et même point. En effet, si dans ce cas elles donnaient naissance à un système réglé, le plan mené par ces tangentes contiendrait non seulement le rayon $\overline{CC_1}$, mais encore une directrice de ce système (page 122) : il aurait donc sur cette directrice un point, différent de C ou $C_1$, commun avec l'une des courbes ou avec toutes les deux, ce qui est impossible. Il résulte de là que :

Si deux courbes du second ordre sont situées dans des plans différents et si elles interceptent sur la droite d'intersection de ces plans un seul et même segment AB, il existe deux surfaces coniques qui passent chacune par les deux courbes.

Deux surfaces coniques du second ordre non concentriques, inscrites dans un seul et même dièdre, se coupent suivant deux courbes du second ordre.

En effet, il y a deux manières de rapporter les courbes projectivement l'une à l'autre; soit que les extrémités A et B de leur corde commune soient des points correspondants communs, soit que les tangentes en deux autres points homologues C et $C_1$ se coupent en un même point de la droite $\overline{AB}$.

Nous sommes maintenant en état de démontrer le théorème suivant qui se rapporte à la perspectivité de deux formes élémentaires du second ordre :

*Si une courbe et un faisceau du second ordre, ou bien une surface conique et un faisceau de plans du second ordre, sont projectifs entre eux, et si cinq éléments* A, B, C, D, E, *de la première forme, sont situés sur les éléments* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, *qui leur correspondent dans la seconde, ces deux formes sont perspectives l'une à l'autre.*

Nous supposerons que la première forme soit une courbe du second ordre $u$ et la seconde un faisceau de plans du second ordre S. Tous les autres cas pourront se ramener à celui-ci. Il nous suffira alors de faire voir qu'on peut construire une forme de rayons qui soit perspective en même temps à la courbe et au faisceau de plans; car il sera démontré

de la sorte que tout point de la courbe est situé sur le plan qui lui correspond dans le faisceau.

Supposons que le plan $u$ de la courbe soit un élément du faisceau S. Son intersection avec ce faisceau se composera d'un faisceau de rayons du premier ordre $u$ ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$) perspectif à S, qui sera aussi perspectif à la courbe $u$ (A B C D E), puisqu'il y a plus de trois rayons qui passent par les points qui leur correspondent sur la courbe (page 135) : le point S est donc situé sur la courbe. Réciproquement, si le point S est situé sur la courbe, projetons cette dernière de S suivant le faisceau du premier ordre S (A B C D E) qui est perspectif au faisceau de plans S ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$), puisqu'il y a plus de trois de ses rayons contenus dans les plans de S qui leur correspondent : le plan $u$ appartient donc au faisceau de plans S dont il est un élément.

Supposons maintenant que le point S ne soit pas sur la courbe et que par conséquent le plan $u$ de cette dernière n'appartienne pas au faisceau S ; soit $A_1$ le point de la courbe qui est projeté de A par le plan $\alpha$, c'est-à-dire le second point d'intersection de ce plan avec la courbe, point qui coïncidera avec A, si la courbe est tangente à $\alpha$.

Par $A_1$ traçons dans le plan $\alpha$ une droite $g$ différente de $\overline{AA_1}$ et projetons de cette droite la courbe du second ordre suivant un faisceau de plans du premier ordre $g$ (A B C D E). Ce faisceau est projectif au faisceau du second ordre S et engendre avec lui un système réglé qui leur est perspectif à tous deux, puisqu'ils ont le plan $\alpha$ qui est un plan correspondant commun ; ce système réglé est aussi perspectif à la courbe du second ordre, puisque quatre de ses rayons passent par les points qui leur correspondent sur la courbe (page 137).

Si une courbe du second ordre ABCDE et un système réglé *abcde* sont projectifs, sans être perspectifs, et si deux points A, B de la courbe sont situés sur les rayons $a$, $b$ qui leur correspondent dans le système réglé, ces deux formes engendrent un faisceau de plans du premier ou du second ordre qui leur est perspectif.

Si un faisceau de plans du second ordre et un système réglé sont projectifs, sans être perspectifs, et si deux plans du faisceau passent par les rayons qui leur correspondent dans le système réglé, ces deux formes engendrent une ponctuelle du premier ou du second ordre qui leur est perspective.

Les trois plans $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, qui joignent les points C, D, E de la courbe avec les rayons correspondants *c*, *d*, *e* du système réglé, se coupent suivant une même droite ou en un même point, et le faisceau de plans qui projette le système réglé *a b c d e* de cette droite ou de ce point est aussi perspectif à la courbe A B C D E.

Deux courbes projectives du second ordre, situées dans un même plan et ayant deux points correspondants communs, engendrent un faisceau de rayons du premier ou du second ordre qui leur est perspectif, ou bien il existe un point qui n'est situé sur aucune d'elles, mais par lequel passent les droites qui joignent deux à deux les points correspondants de ces courbes.

Deux faisceaux projectifs de rayons du second ordre, qui ont deux rayons correspondants communs, engendrent une ponctuelle du premier ou du second ordre, qui leur est perspective, ou bien il existe une droite qui n'appartient à aucun des deux faisceaux, mais sur laquelle se coupent deux à deux les rayons qui sont correspondants dans ces faisceaux.

En effet, tout système réglé, perspectif à l'une des courbes, engendre avec l'autre un faisceau de plans du premier ou du second ordre, et ce dernier est coupé en général par le plan de la courbe suivant un faisceau de rayons du premier ou du second ordre. C'est seulement quand le faisceau de plans est du second ordre et quand son sommet se trouve dans le plan des courbes, que le dernier cas de notre théorème se réalise.

Si deux courbes projectives du second ordre sont dans un même plan, sans avoir de point correspondant commun, elles engendrent un faisceau de rayons d'ordre plus élevé dont, en général, quatre rayons au plus passent par un même point. En effet, si par un point S du plan il passait plus de quatre de ces rayons, il en passerait une infinité; car un faisceau de plans du second ordre, ayant le point S pour sommet et perspectif à l'une des deux courbes (par exemple, un faisceau qui projette un système réglé perspectif à cette courbe), serait aussi perspectif à l'autre courbe. Des points S de ce genre ne peuvent se présenter qu'isolément. De même, deux faisceaux projectifs de rayons du second ordre, situés dans le même plan, engendrent une courbe d'ordre plus élevé

(du quatrième) qui, en général, n'a pas plus de quatre points communs avec une droite. Nous nous contentons, quant à présent, de signaler en passant ces formes et celles qu'engendrent les formes projectives élémentaires du second ordre.

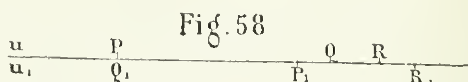
---

# DOUZIÈME LEÇON.

## Formes élémentaires en involution.

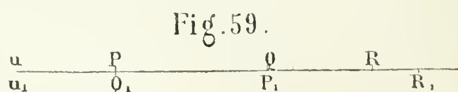
Étant données deux formes élémentaires de même espèce $u$ et $u_1$ (par exemple, deux ponctuelles) projectives entre elles et placées l'une sur l'autre, on peut rattacher un élément P quelconque de leur lieu commun aussi bien à l'une des formes $u$ qu'à l'autre $u_1$; cet élément a donc pour correspondants *deux* autres éléments, l'un sur $u$, l'autre sur $u_1$.

Fig. 58




En général, ces deux éléments qui correspondent à P sont différents l'un de l'autre (comme dans la fig. 58 où les points $P_1$, $Q_1$, $R_1$ de $u_1$, correspondent respectivement aux points P, Q, R de $u$); mais il peut aussi arriver qu'ils coïncident (comme dans la fig. 59) et qu'à l'élément P corresponde *doublement* un autre élément $P_1$. A l'élément P de la pre-

Fig. 59.




mière forme $u$ correspond alors l'élément $P_1$ de la seconde forme $u_1$ et à l'élément P de $u_1$ correspond également l'élément $P_1$ de $u$.

*Lorsque deux formes projectives* u *et* $u_1$ *n'ont pas tous leurs éléments correspondants communs, mais qu'à* chaque *élément de l'une correspond* doublement *un élément de l'autre, nous dirons que les*

*formes sont en* situation involutive *ou qu'elles sont* en involution. *De même, deux formes élémentaires projectives d'espèces différentes (par exemple, une ponctuelle et un faisceau de rayons) seront dites* en involution, *quand l'une d'elles sera en involution avec une section ou une projection de l'autre.*

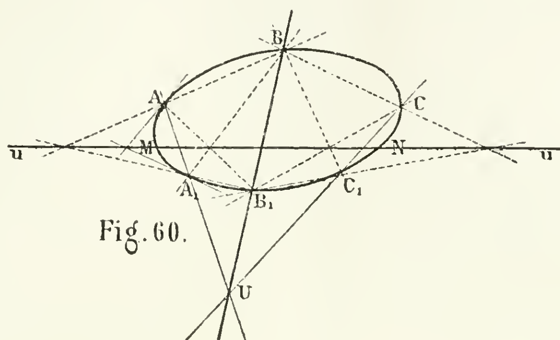



Fig. 60.

Par exemple, deux ponctuelles projectives du second ordre, superposées sur la même courbe, sont en involution quand trois droites et par suite (page 159) toutes les droites qui joignent deux à deux les points correspondants se coupent en un même point ; au contraire, elles ne sont pas en involution, quand elles engendrent un faisceau de rayons du

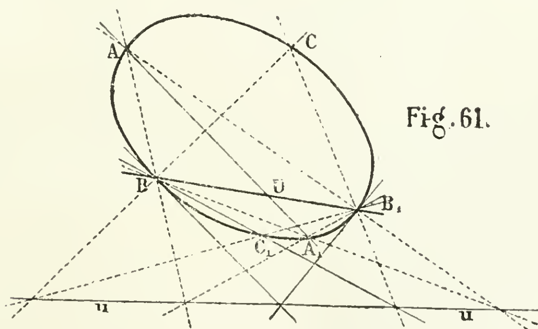



Fig. 61.

second ordre qui leur est perspectif. Étant donnée une droite $u$, située dans le plan d'une courbe du second ordre mais qui ne lui est pas tangente, si à chaque point de la droite l'on fait correspondre sa polaire par rapport à cette courbe, on obtient un faisceau de rayons du premier ordre qui non seulement est rapporté projectivement à la ponctuelle $u$, mais qui est en involution avec elle (pages 99 et 101).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

*Deux ponctuelles du second ordre, projectives l'une et l'autre et superposées sur la même courbe, sont en involution lorsqu'à un point quelconque A de l'une correspond doublement un point $A_1$ de l'autre.*

Soient B et $B_1$ (figures 60 et 61) deux autres points correspondants quelconques des ponctuelles, de sorte qu'aux points A, $A_1$, B de l'une d'elles correspondent respectivement les points $A_1$, A, $B_1$ de l'autre; soit de plus U le point d'intersection de $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$ et $u$ sa polaire par rapport à la courbe du second ordre. Les deux faisceaux de rayons $B_1$ ($AA_1$ B) et B ($A_1$ A $B_1$), qui projettent respectivement de $B_1$ et B les ponctuelles A $A_1$ B et $A_1$ A $B_1$, sont alors perspectifs à la forme rectiligne $u$. En effet, ils sont projectifs aux ponctuelles du second ordre et par suite projectifs l'un à l'autre; et comme ils ont le rayon $\overline{B_1 B}$ ou $\overline{BB_1}$ correspondant commun, ils sont les projections d'une seule et même ponctuelle rectiligne; cette dernière est située sur $u$, parce que (page 97) le point d'intersection de deux rayons correspondants $\overline{B_1 A}$ et $\overline{B A_1}$, $\overline{B_1 A_1}$ et $\overline{B A}$ est situé sur $u$. Deux autres points quelconques C et $C_1$ de la courbe, situés sur une droite passant par U, seront projetés de la même manière par deux couples de rayons homologues des faisceaux B et $B_1$ perspectifs à $u$ ; ce sont par conséquent deux points des ponctuelles du second ordre qui se correspondent *doublement* l'un à l'autre. Il suit de là et des propositions établies précédemment (page 97) que :

*Si deux courbes projectives du second ordre sont en involution, les rayons qui joignent les points homologues se coupent en un même point U, et tous les points d'intersection des tangentes homologues sont situés sur la polaire* u *de ce point U. La droite* u *est appelée* l'axe d'involution *et le point U* le centre d'involution *des courbes.*

Les deux faisceaux de rayons du second ordre qui enveloppent deux courbes du second ordre en involution sont aussi en involution ; car les tangentes en deux points homologues doivent également se correspondre doublement. Ces faisceaux seront donc coupés par chacun de leurs rayons suivant deux ponctuelles du premier ordre en involution. De même, deux courbes du second ordre en involution sont projetées de chacun de leurs points suivant deux faisceaux de rayons du premier ordre en involution, et de tout point extérieur à leur plan, suivant deux surfaces coniques en involution. Un système réglé, perspectif à l'une des deux courbes, est en involution avec l'autre, etc.

D'après cela, nous pouvons étendre à toutes les formes élémentaires l'un des théorèmes établis précédemment et dire :

*Deux formes élémentaires de même espèce, projectives et situées l'une sur l'autre, sont en involution lorsque deux quelconques de leurs éléments se correspondent doublement.*

En effet, supposons que les deux formes élémentaires soient deux formes de rayons situées l'une sur l'autre; construisons alors deux ponctuelles du second ordre situées l'une sur l'autre et qui leur soient projectives. Comme ces dernières formes sont en involution, puisque deux de leurs points se correspondent doublement, les deux formes de rayons doivent aussi être en involution. Si, au contraire, les formes élémentaires sont deux faisceaux de plans ou deux ponctuelles rectilignes, nous construirons deux formes de rayons, qui leur soient perspectives et qui soient situées l'une sur l'autre; d'après ce qu'on vient de démontrer, ces dernières formes sont alors involution; donc il en est de même des premières.

Deux formes de même espèce en involution sont souvent considérées comme une seule forme *involutive* dont les éléments sont dits *conjugués deux à deux* ou *accouplés involutivement*. Par exemple, les points d'une droite $u$, placée d'une manière quelconque dans le plan d'une courbe du second ordre, sont accouplés involutivement, quand on rapporte deux à deux les points conjugués situés sur cette droite (page 145). De même, tous les diamètres conjugués d'une courbe du second ordre forment un faisceau de rayons en involution. Nous pouvons ajouter de plus que :

Dans une courbe involutive du second ordre (figures 60 et 61), les points conjugués entre eux se trouvent deux à deux sur des droites qui passent toutes par un même point, non situé sur la courbe ; et deux tangentes quelconques, conjuguées entre elles, se coupent sur la polaire de ce point par rapport à la courbe du second ordre.

Dans une surface conique involutive du second ordre, les rayons conjugués entre eux se trouvent deux à deux dans des plans qui passent tous par une même droite, non située sur la surface ; et deux plans tangents quelconques, conjugués entre eux, se coupent sur le plan polaire de cette droite par rapport à la surface conique.

Le théorème de gauche n'est que la répétition de celui qu'on a

démontré, page 146 ; le théorème de droite se déduit du précédent, parce que la surface conique du second ordre est coupée par un plan quelconque suivant une courbe du second ordre. En effet, si deux formes élémentaires sont perspectives et si les éléments de l'une sont accouplés involutivement, il s'ensuit que les éléments de l'autre jouissent de la même propriété.

*Pour accoupler involutivement les éléments d'une forme élémentaire, il suffit de prendre arbitrairement deux couples d'éléments conjugués $A$, $A_1$ et $B$, $B_1$; chaque élément de la forme se trouve alors conjugué à un autre élément.*

En effet, la forme élémentaire en involution provient de la réunion l'une sur l'autre de formes rapportées projectivement entre elles de telle manière qu'à trois éléments A, $A_1$, B de l'une correspondent respectivement les trois éléments $A_1$, A, $B_1$ de l'autre ; mais cette correspondance n'est possible que d'une seule manière.

Si la forme élémentaire en involution est une courbe du second ordre, on peut trouver le point $C_1$, conjugué à un cinquième point C quelconque, soit à l'aide du centre d'involution U (figures 60 et 61), où $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$ se coupent et par lequel passe aussi $\overline{CC_1}$, soit au moyen de l'axe d'involution. On procéderait de même pour une surface conique du second ordre.

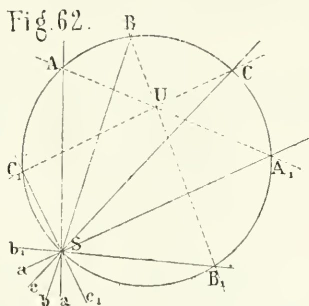
Pour accoupler involutivement les rayons d'un système réglé, nous couperons ce système suivant une courbe du second ordre, et nous n'aurons plus qu'à accoupler involutivement les points de cette dernière courbe. S'il s'agit d'un faisceau de rayons du premier ordre (fig. 62), nous construirons une courbe du second ordre perspective à ce faisceau, par exemple un cercle passant par son sommet S, et nous conjuguerons deux à deux les points de cette courbe. Nous procéderons d'une manière analogue pour toute autre forme élementaire. On peut du reste accoupler involutivement les éléments d'une forme fondamentale uniforme sans recourir aux formes du second ordre.

Deux formes élémentaires de même espèce en involution, par exemple deux ponctuelles du second ordre (fig. 60 et 61), sont projectives concordantes ou opposées, suivant que deux éléments conjugués A et $A_1$ sont ou ne sont pas séparés par deux éléments conjugués B et $B_1$. Dans le premier cas (fig. 61), les deux éléments qui se correspondent se meuvent dans le même sens, en décrivant simultanément : le premier la forme $AA_1B$, le second la forme $A_1AB_1$ ; ils ne peuvent

donc jamais se rencontrer. Dans le second cas (fig. 60), ils se meuvent en sens contraire et doivent tomber deux fois l'un sur l'autre. Tout élément correspondant commun à deux formes en involution a reçu le nom d'*élément double* de la forme involutive composée des deux premières considérées ensemble. Nous avons ainsi ce théorème :

*Une forme élémentaire involutive n'a pas d'élément double ou en a deux, suivant que deux éléments conjugués de cette forme sont ou ne sont pas séparés par deux autres éléments conjugués. En chaque élément double coïncident deux éléments conjugués de la forme en involution.*

Si le centre d'involution U d'une courbe involutive du second degré est situé en dehors de cette courbe (fig. 60), celle-ci a deux points doubles ; ce sont les points de contact des tangentes qu'on peut mener




de U à la courbe. L'axe d'involution $u$ rencontre la courbe en ces points, puisque $u$ est la polaire de U (page 97).

*Les éléments doubles M, N d'une forme élémentaire en involution sont harmoniquement séparés par deux éléments conjugués quelconques $A$ et $A_1$.*

Il suffit de démontrer ce théorème pour une courbe du second ordre en involution, puisque l'on peut ramener tout autre cas à celui-là. Soient $B, B_1$ un second couple d'éléments conjugués (fig. 60) ; les côtés opposés du quadrilatère simple $ABA_1B_1$ se coupent en deux points conjugués (page 102), harmoniquement séparés l'un de l'autre par M et N. Les rayons $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{BN}$ sont donc quatre rayons harmoniques, puisqu'ils projettent quatre points harmoniques ; par conséquent, les points doubles M et N de la courbe sont harmoniquement séparés par les points A et $A_1$. Cette propriété résulte encore d'un théorème de la page 106, parce que $\overline{MN}$ et $\overline{AA_1}$ sont deux rayons conjugués.

Pour accoupler involutivement les éléments d'une forme élémentaire, nous pouvons à volonté choisir deux éléments doubles M et N, ou un élément double M et un couple d'éléments conjugués $A, A_1$ ; car le conjugué d'un élément quelconque est alors entièrement déterminé. En effet, dans le premier cas, deux éléments quelconques sont conjugués l'un à l'autre s'ils sont harmoniquement séparés par M et N ; dans le second cas, on peut immédiatement déterminer le second élément double N, puisqu'il est harmoniquement séparé de M par A et $A_1$. Ce cas se ramène donc au précédent.

Les théorèmes que nous avons donnés jusqu'ici sur les formes involutives sont d'une telle importance, et nous les appliquerons si souvent, qu'il nous paraît bon de les démontrer encore une fois d'une manière plus élémentaire ; chemin faisant, nous rencontrerons encore des théorèmes nouveaux et importants. Pour cela, nous partirons de la définition suivante :

*Deux formes ABCDE..... et $A_1B_1C_1D_1E_1$..... composées d'éléments isolés de deux formes élémentaires* u *et* $u_1$, *seront dites* projectives, *quand les formes* u *et* $u_1$ *sont rapportées projectivement entre elles, de telle manière qu'aux éléments A,B,C,D,E..... de* u *correspondent respectivement les éléments $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$.... de* $u_1$. *Nous nous servirons du signe* $\barwedge$ *pour indiquer la projectivité.*

Soient, par exemple, $u$ et $u_1$, deux ponctuelles du premier ordre situées dans un même plan, mais non sur la même droite ; nous n'aurons la relation ABCDE.... $\barwedge$ $A_1B_1C_1D_1E_1$.... que si les droites $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}$,.... passent par un seul et même point, ou sont tangentes à une seule et même courbe du second ordre à laquelle $u$ et $u_1$ sont elles-mêmes tangentes*.

*Une forme ABCD, composée de quatre éléments d'une forme élémentaire, est projective à toutes les formes qu'on en déduit, en permutant deux des quatre éléments entre eux, et en permutant en même temps les deux éléments restant entre eux ; autrement dit, on a :*

$$ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA.$$

---

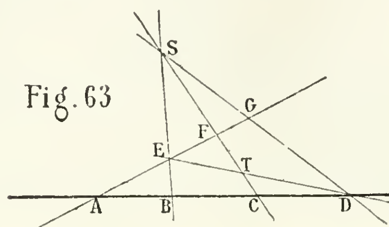
* La relation ABCD $\barwedge$ $A_1B_1C_1D_1$ exprime aussi, comme on l'a déjà démontré (pages 65-66), qu'entre les segments déterminés sur les droites $u$ et $u_1$ il existe la proportion :

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1D_1}{C_1B_1}.$$

Soit ABCD une forme rectiligne (on peut ramener tous les autres cas à celui-là) et supposons qu'il s'agisse de démontrer que

$$\mathrm{ABCD} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{CDAB}.$$

D'un point quelconque S, projetons ABCD sur une droite passant par




A (fig. 63); soit AEFG cette projection et soit T le point d'intersection de $\overline{\mathrm{CF}}$ et $\overline{\mathrm{DE}}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AEFG | est une projection de | ABCD | faite du centre | S |
| CTFS | — | AEFC | — | D |
| CDAB | — | CTFS | — | E |

Par conséquent :

$$\mathrm{ABCD} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{AEFG} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{CTFS} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{CDAB},$$

et par suite

$$\mathrm{ABCD} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{CDAB}.$$

Les autres relations peuvent se démontrer d'une manière analogue. Nous en concluons que :

Si $abcd \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ABCD}$, on a aussi :

$$abcd \;\overline{\wedge}\; \mathrm{BADC} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{CDAB} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{DCBA}^{**}.$$

---

** Entre autres résultats, ce théorème important permet de démontrer la proposition très remarquable qui suit :

Les six sommets de deux triangles polaires quelconques d'une courbe $k^2$ du second ordre sont situés sur une deuxième courbe du second ordre, qui est circonscrite

Les six côtés de deux triangles polaires quelconques d'une courbe du second ordre sont tangents à une deuxième courbe du second ordre, à laquelle on peut circon-

On déduit de là ce théorème déjà démontré antérieurement d'une autre manière, à savoir que deux formes élémentaires projectives situées l'une sur l'autre sont en involution, quand deux quelconques de leurs éléments A et $A_1$, se correspondent doublement. En effet, supposons qu'à un élément quelconque B de l'une corresponde l'élément $B_1$ de l'autre, de telle sorte que les éléments $A_1, A, B_1$ de la seconde forme soient rapportés aux éléments $A, A_1, B$ de la première ; de la relation

$$AA_1BB_1 \barwedge A_1AB_1B$$

il suit qu'à l'élément $B_1$ de la première forme correspond l'élément B de la seconde, ou que deux éléments homologues quelconques B et $B_1$ se correspondent doublement.

Voici une conséquence que nous aurions déjà pu énoncer précédemment :

*Une ponctuelle* u *du premier ordre et un faisceau de rayons du premier ordre S, qui lui est projectif, sont en involution, lorsque le centre de ce dernier est extérieur à* u *et que deux points P et $P_1$ de la ponctuelle sont tels que chacun d'eux est situé sur le rayon du faisceau qui correspond à l'autre point.*

En effet, la section du faisceau par la droite est projective à $u$ et en involution avec elle, puisque les points P et $P_1$ se correspondent doublement. On peut reconnaître d'une manière analogue quand un faisceau de plans est en involution avec une forme rectiligne ou un faisceau de rayons.

On peut aussi démontrer d'une manière élémentaire que, si une forme en involution a deux éléments doubles, M et N, deux points conjugués A

---

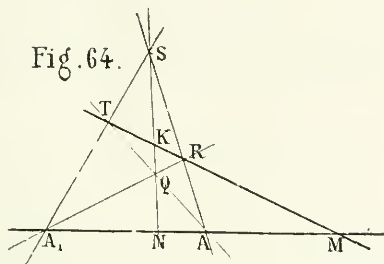
aux triangles polaires, en nombre infini, de la première. | scrire des triangles polaires, en nombre infini, de la première.

Soient ABC et DEF les deux triangles polaires ; nous supposons que leurs six sommets ne sont pas trois à trois en ligne droite. Les faisceaux de rayons A(BCEF) et D(CBFE) sont projectifs (page 103), parce que les quatre rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ du premier sont respectivement conjugués aux rayons $\overline{DC}$, $\overline{DB}$, $\overline{DF}$, $\overline{DE}$ du second, par rapport à $k^2$. De A(BCEF) $\barwedge$ D(CBFE), il découle que A(BCEF) $\barwedge$ D(BCEF), et par conséquent les six points A,B,C,D,E,F sont situés sur une courbe du second ordre, ainsi que l'énonce le théorème de gauche. Soient maintenant deux points D′ et E′ de cette courbe, qui sont conjugués par rapport à la courbe donnée $k^2$ et qui par suite appartiennent à un triangle polaire D′E′F′ de $k^2$, dont ils sont les sommets ; le sommet F′ est situé aussi sur la courbe du second ordre qui passe par A,B,C,D,E,F ; en effet cette courbe a cinq points communs avec celle qui passe par A,B,C,D′,E′,F′ ; donc tous leurs points sont communs et elles coïncident. — La proposition de droite se démontrerait d'une manière analogue.

et $A_1$ sont harmoniquement séparés par M et N. Supposons que la forme involutive $M.N.AA_1$ soit une ponctuelle rectiligne et qu'elle provienne de la superposition de deux formes projectives en involution; aux points M, A, N, $A_1$ de l'une de ces formes correspondent alors les points M, $A_1$, N, A de l'autre, puisque M et N sont des points correspondants communs aux deux formes et que A et $A_1$ se correspondent doublement. On a alors $MANA_1 \barwedge MA_1NA$.

D'un point quelconque S (fig. 64) projetons maintenant $MANA_1$ sur une droite passant par M et soit MRKT la projection; elle est perspective à $MANA_1$; donc elle est projective à $MA_1NA$ et par suite $MRKT \barwedge MA_1NA$.

Or, ces formes ont le point correspondant M qui leur est commun; par conséquent, elles sont en perspective; c'est-à-dire que les droites $\overline{RA_1}$, $\overline{KN}$, $\overline{TA}$ se coupent en un seul et même point Q. Nous avons de la sorte un quadrangle QRST, dont les couples de côtés




opposés se coupent respectivement en A et $A_1$, tandis que ses diagonales passent par M et N; il s'ensuit que les points M A N $A_1$ sont bien quatre points harmoniques.

On donne le nom d'*involution* au système formé de trois couples d'éléments conjugués $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ d'une forme élémentaire en involution. Les six éléments d'une involution ne sont pas indépendants les uns des autres parce que, étant donné un élément quelconque d'une forme involutive, son conjugué se trouve déterminé du moment qu'on a deux couples d'éléments conjugués. De plus, deux quelconques des formes telles que $AA_1BC$ et $A_1AB_1C_1$, ou $AB_1C_1C$ et $A_1BCC_1$ que l'on peut former en combinant symétriquement les six éléments, doivent être projectives. Réciproquement, de la relation $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1$ il résulte que les trois couples d'éléments $A,A_1$; $B,B_1$; $C,C_1$ forment une involution $AA_1$. $BB_1$. $CC_1$; en effet, dans les formes projectives $AA_1BC$ et $A_1AB_1C_1$, les éléments A et $A_1$ se correspondent doublement et il en

est de même de B et $B_1$ ainsi que de C et $C_1$. Un élément double M ou N peut remplacer un couple d'éléments dans l'involution ; par exemple, $M.AA_1.BB_1$ est une involution, si $MAA_1B \,\overline{\wedge}\, MA_1AB_1$. De même $M.N.AA_1$ est une involution, si $MANA_1$ est projectif à $MA_1NA$, c'est-à-dire si ces éléments constituent une forme harmonique.

Nous pouvons maintenant énoncer la double proposition qui suit :

Une droite $u$, située dans le plan d'un quadrangle complet QRST (fig. 65), mais ne passant par aucun de ses quatre sommets, coupe les six côtés de ce quadrangle suivant une involution ; les points d'intersection de cette droite avec deux côtés opposés quelconques sont deux points conjugués.

Un point quelconque situé dans le plan d'un quadrilatère complet, mais ne se trouvant sur aucun de ses côtés, projette les six sommets de ce quadrilatère suivant six rayons qui forment une involution ; les rayons qui joignent le point à deux sommets opposés quelconques sont deux rayons conjugués.

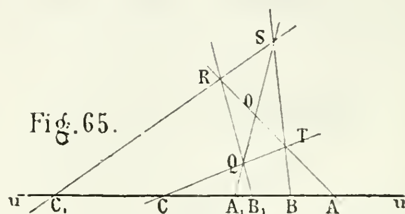


Fig. 65.

Supposons que $u$ coupe respectivement les côtés $\overline{RT}$ et $\overline{QS}$, $\overline{ST}$ et $\overline{RQ}$, $\overline{QT}$ et $\overline{RS}$ suivant les points A et $A_1$, B et $B_1$, C et $C_1$. Alors ATOR est à la fois une projection de $ACA_1B_1$ faite du point Q et une projection de $ABA_1C_1$ faite du point S ; par conséquent,

$$ACA_1B_1 \,\overline{\wedge}\, ATOR \,\overline{\wedge}\, ABA_1C_1.$$

Mais si l'on permute entre eux A et $A_1$, B et $C_1$ (page 150), il vient :

$$ABA_1C_1 \,\overline{\wedge}\, A_1C_1AB.$$

Donc on a aussi :

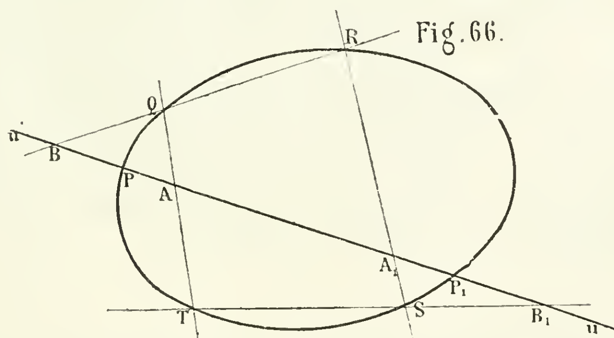
$$ACA_1B_1 \,\overline{\wedge}\, A_1C_1AB.$$

et $AA_1.BB_1.CC_1$ est une involution. En effet, si deux ponctuelles projec-

tives situées sur $u$ sont tellement rapportées l'une à l'autre qu'aux points $A$, $C$, $A_1$ de la première correspondent respectivement les points $A_1$, $C_1$, $A$ de la seconde, ces deux formes sont en involution, parce que $A$ et $A_1$ se correspondent doublement et $B$ et $B_1$ sont correspondants à cause de la relation $ACA_1B_1 \barwedge A_1C_1AB$.

Si maintenant, étant donnés deux couples de points $A$ et $A_1$, $B$ et $B_1$ d'une ponctuelle $u$ en involution, nous voulons déterminer le point $C_1$ correspondant à un cinquième point quelconque $C$, nous pourrons procéder comme il suit, sans recourir aux formes du second ordre. Nous construirons un quadrilatère complet dont deux côtés opposés passeront par $A$ et $A_1$, deux autres par $B$ et $B_1$ et un cinquième par $C$; le sixième côté coupera la droite $u$ au point cherché $C_1$.

Si deux points $M$ et $N$ et de $u$ sont harmoniquement séparés en même temps par $A$ et $A_1$ ainsi que par $B$ et $B_1$, c'est-à-dire par deux couples de côtés opposés du quadrangle, ils sont aussi harmoniquement séparés par $C$ et $C_1$, c'est-à-dire par le troisième couple de côtés opposés. $M$ et $N$ sont donc les points doubles de la forme involutive $AA_1.BB_1...$




*Soit un quadrangle simple* $QRST_1$, (*fig.* 66) *inscrit dans une courbe du second ordre; une droite quelconque* u, *ne passant par aucun de ses sommets, rencontre la courbe et les deux couples de côtés opposés du quadrilatère en six points en involution* (*Théorème de Desargues*).

Supposons que $u$ coupe respectivement les côtés $\overline{QT}$, $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ et $\overline{TS}$ aux points $A, A_1$, $B$ et $B_1$ et qu'elle rencontre la courbe aux points $P$ et $P_1$. Les deux faisceaux qui projettent les points $P$, $R$, $P_1$, $T$ de la courbe de $Q$ et $S$ sont projectifs (page 77); il en est par suite de même pour les ponctuelles $PBP_1A$ et $PA_1P_1B_1$ suivant lesquelles ces faisceaux sont coupés

par la droite $u$. Mais puisque $PA_1P_1B_1 \barwedge P_1B_1PA_1$ (page 150), il en résulte aussi que :

$$PBP_1A \barwedge P_1B_1PA_1$$

Donc $AA_1 . BB_1 . PP_1$ est une involution.

Les courbes du second ordre inscrites dans un quadrilatère simple, c'est-à-dire tangentes à ses côtés, donnent lieu à un théorème analogue. Une forme uniforme en involution étant déterminée par deux couples d'éléments correspondants $A.A_1$ et $B.B_1$, nous pouvons énoncer la double proposition ci-après :

Étant donnée une droite $u$, située dans le plan d'un quadrangle simple, mais ne passant par aucun de ses sommets, toutes les courbes du second ordre qui sont circonscrites à ce quadrangle déterminent sur la droite une ponctuelle involutive $u$. Dans cette forme, deux points conjugués appartiennent à une seule et même courbe du second ordre. Les points doubles de l'involution sont les points de contact de deux de ces courbes avec $u$.

Étant donné un point S situé dans le plan d'un quadrilatère plan, mais ne se trouvant sur aucun de ses côtés, toutes les courbes du second ordre qui sont inscrites dans ce quadrilatère déterminent avec S un faisceau S de rayons en involution. Deux rayons conjugués quelconques sont tangents à une seule et même courbe du second ordre. Les rayons doubles de S sont tangents en ce point à deux de ces courbes.

Suivant que ces éléments doubles existeront ou n'existeront pas, il se trouvera ou ne se trouvera pas deux courbes du second ordre

circonscrites à un quadrangle plan et tangentes en même temps à une droite $u$, située dans le plan de ce quadrangle, mais ne passant par aucun de ses sommets.

inscrites dans un quadrilatère plan et passant en même temps par un point situé dans le plan du quadrilatère, mais ne se trouvant sur aucun de ses côtés.

Le problème qui consiste à construire ces courbes du second ordre se ramène donc à celui-ci : *Déterminer les éléments doubles d'une*

*forme uniforme en involution*. Dans une prochaine leçon, nous nous occuperons de résoudre ce problème du second degré.

Si, dans le théorème de gauche, on suppose la droite $u$ à l'infini, on en déduit le cas particulier suivant :

*Par quatre points propres situés dans un plan, on peut faire passer deux paraboles, ou l'on n'en peut faire passer aucune.*

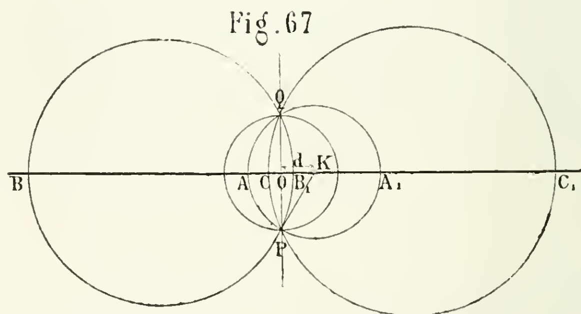
---

# TREIZIÈME LEÇON [1].

**Relations métriques dans les formes en involution.**
**Foyers des courbes du second ordre.**

Soient $A,A_1$, $B,B_1$, $C,C_1$ (fig. 67 et 68) trois couples de points d'une ponctuelle du premier ordre en involution, entre lesquels il existe entre autres (page 153) la relation $AA_1BC_1 \barwedge A_1AB_1C$.

Fig. 67




Les segments que les six points déterminent entre eux nous donnent alors (page 65) la proportion :

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1A}{A_1C} : \frac{B_1A}{B_1C}$$

1. Cette leçon doit être considérée comme un appendice à la géométrie *pure* de position.

Nous pouvons la remplacer par la suivante :

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CA_1} : \frac{AB_1}{CB_1}.$$

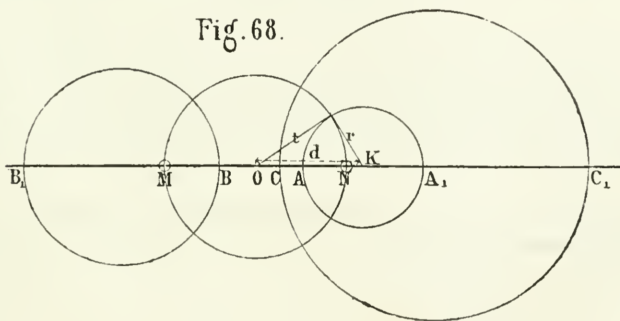
Car $A_1A = -AA_1$, $A_1C = -CA_1$, etc., puisque deux segments de ce genre ont des longueurs égales, mais des directions opposées. Supprimons les facteurs communs et chassons les dénominateurs, nous obtenons l'équation

I. $$AB_1 . BC_1 . CA_1 = AC_1 . BA_1 . CB_1$$

La relation $AA_1BC_1 \barwedge A_1AB_1C$ ne cesse pas de subsister quand on y permute deux points conjugués; il en est donc de même pour l'équation I. Par exemple, permutons C et $C_1$, nous trouvons l'équation suivante :

I*a*. $$AB_1 . BC . C_1A_1 = AC . BA_1 . C_1B_1$$

On déduit encore de I d'autres équations qu'on forme d'une manière analogue. On obtiendrait des relations du même genre entre les




sinus des angles que font entre eux six éléments d'un faisceau du premier ordre en involution.

Les équations I et I*a* se simplifient notablement, quand l'un des six points, par exemple $C_1$, s'éloigne à l'infini. Son point conjugué C vient alors coïncider avec ce qu'on appelle le *centre* ou le *point central* de la ponctuelle en involution, c'est-à-dire avec le point O qui est conjugué du point à l'infini. Les rapports

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{AC_1 - AB}{AC_1} = 1 - \frac{AB}{AC_1}$$

et

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{C_1B_1 - A_1B_1}{C_1B_1} = 1 - \frac{A_1B_1}{C_1B_1}$$

s'approchent indéfiniment de l'unité, parce que $AC_1$ et $C_1B_1$ croissent indéfiniment, tandis que AB et $A_1B_1$ sont des segments finis. Les équations I et I*a* se transforment alors dans les suivantes :

$$AB_1 . OA_1 = BA_1 . OB_1,$$

et

$$AB_1 . BO = AO . BA_1.$$

En divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{OA_1}{BO} = \frac{OB_1}{AO};$$

et cette dernière équation peut immédiatement être mise sous la forme

II. $$OA . OA_1 = OB . OB_1.$$

C'est-à-dire : *le produit des deux segments que deux points conjugués* (*A et* $A_1$, *ou B et* $B_1$ *etc.*) *d'une ponctuelle du premier ordre en involution déterminent avec le point central de cette ponctuelle est constant.*

Si la ponctuelle a deux points doubles M et N (fig. 68), où se confondent deux points conjugués l'un à l'autre, il résulte de II, que :

III. $$OA . OA_1 = (\overline{OM})^2 = (\overline{ON})^2.$$

Le point central O divise donc en deux parties égales le segment MN limité par les deux points doubles. Cette équation exprime aussi (page 48) que M et N sont harmoniquement séparés par A et $A_1$, ce que nous savions déjà.

Suivant que le produit $OA . OA_1$ est positif (égal à un carré $\overline{OM}^2$) ou négatif, il y a ou il n'y a pas de points doubles. Dans le premier cas, A et $A_1$ sont d'un même côté du point central ; dans le second, ils sont situés de part et d'autre de ce point. Cette proposition résulte aussi d'un théorème établi antérieurement (page 149).

Sur chacun des segments $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, etc., limités par deux points conjugués de la ponctuelle en involution, décrivons un cercle ayant ce segment comme diamètre; soit $r$ le rayon de l'un quelconque de ces cercles, par exemple, de celui qui est décrit sur $AA_1$, et soit $d$ la distance de son centre K au point central O. Nous avons alors (fig. 67 et 68)

$$OA = OK - AK = d - r,$$

et

$$OA_1 = OK + KA_1 = d + r;$$

par suite :

$$OA.\, OA_1 = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2.$$

Si la ponctuelle en involution a deux points doubles M et N (fig. 68), O est en dehors du cercle et $d^2 - r^2$ représente le carré de la longueur de la tangente $t$ qu'on peut mener de O à ce cercle; en effet $t$ et $r$ sont les côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $d$. D'après l'équation II, la longueur de cette tangente est la même pour tous les cercles construits sur les segments et l'équation III montre qu'elle est égale à la demi-longueur du segment MN compris entre les points doubles. Si du point O, nous décrivons une circonférence sur MN comme diamètre, cette circonférence coupera orthogonalement les circonférences décrites sur $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, etc. On peut démontrer de même que ces dernières sont aussi coupées orthogonalement par toute circonférence qui passe par les points M et N (voir page 48).

Si la ponctuelle en involution n'a pas de points doubles (fig. 67), son point central se trouve à l'intérieur du cercle décrit sur $AA_1$ et $d^2 - r^2$ est négatif. Menons par O une corde PQ de ce cercle perpendiculairement à $AA_1$; chacune des moitiés OP ou OQ de cette corde forme avec $d$ un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est $r$; de sorte qu'on a :

$$d^2 + \overline{OP}^2 = r^2, \text{ ou } d^2 - r^2 = -\overline{OP}^2 = -\overline{OQ}^2.$$

D'après l'équation II, la longueur de cette demi-corde est la même pour tous les cercles décrits sur $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, etc.; ces derniers passent donc tous par P et Q. Par conséquent, les angles $APA_1$, $BPB_1$, $CPC_1$, etc., sont droits et nous sommes conduits à cette proposition :

*Si une ponctuelle en involution n'a pas de points doubles, il existe*

*dans le plan qui la contient deux points P et Q, d'où elle est projetée par un faisceau rectangulaire de rayons en involution, c'est-à-dire par un faisceau dont les rayons conjugués deux à deux sont perpendiculaires entre eux.*

Le théorème suivant peut aussi servir à démontrer que les cercles construits sur $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, etc., passent par chacun des points où se coupent deux quelconques d'entre eux :

*Un faisceau de rayons en involution est rectangulaire, quand les angles que forment entre eux deux couples quelconques* $a_1a_1$ *et* $b_1b_1$ *de rayons conjugués sont droits.*

L'exactitude de cette proposition s'établit en remarquant qu'il n'y a qu'une seule manière d'accoupler involutivement les rayons d'un faisceau de manière que les rayons $a$ et $a_1$ se correspondent, ainsi que les rayons $b$ et $b_1$. Or c'est précisément ce qui a lieu quand chaque rayon a pour correspondant le rayon qui lui est perpendiculaire. On déduit aussi de là que :

*Si l'on inscrit dans une courbe du second degré une série de triangles rectangles, ayant tous les sommets de leurs angles droits en un même point S de la courbe, leurs hypoténuses se coupent en un seul et même point.*

En effet, les points de la courbe sont accouplés involutivement au moyen du faisceau rectangulaire S (voir page 146).

Soit donné dans le plan d'une courbe du second ordre un faisceau U de rayons du premier ordre, dont le sommet n'est pas sur la courbe ; les rayons de U sont accouplés involutivement quand on fait correspondre deux à deux les rayons conjugués (page 147). Si le faisceau involutif de rayons ainsi déterminé est rectangulaire, son centre a une relation spéciale avec la courbe ; on lui donne le nom de *foyer*. Nous pouvons définir les foyers de la manière suivante :

*Un* foyer *d'une courbe du second ordre est un point tel que deux rayons rectangulaires quelconques, qui se croisent en ce point, sont conjugués par rapport à la courbe.*

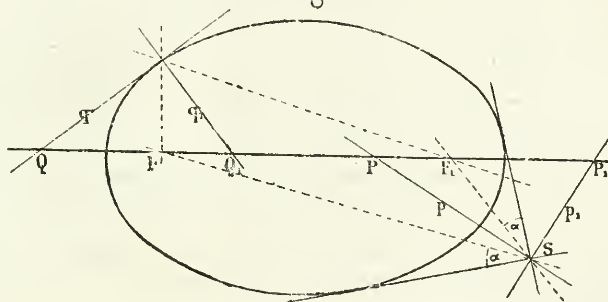
Un foyer ne peut pas être extérieur à la courbe ; car, sans cela, le faisceau involutif de rayons dont il est le sommet aurait deux rayons doubles, les deux tangentes à la courbe issues de ce point. Chaque foyer F est situé sur un axe de la courbe du second ordre ; en effet, un diamètre mené par F est un axe, puisqu'il est perpendiculaire à la corde conjuguée qui passe par F. La droite qui joint deux foyers F et F′

d'une courbe du second ordre est un axe de la courbe ; car elle est conjuguée aux deux perpendiculaires qui lui sont élevées par F et F'; son pôle coïncide donc avec le point d'intersection de ces perpendiculaires, qui est à l'infini (voir page 112).

Le centre d'un cercle est un foyer de cette courbe. Deux rayons, conjugués par rapport à un cercle, ne sont perpendiculaires l'un à l'autre que si l'un ou l'autre d'entre eux est un diamètre ; il est facile de voir, d'après cela, que le cercle ne peut avoir d'autre foyer que son centre. Nous exclurons le cercle des recherches qui suivent.

Toute droite $p$, située dans le plan d'une courbe du second ordre, a une conjuguée $p_1$ (fig. 69) qui lui est perpendiculaire ; c'est la perpendiculaire abaissée du pôle de $p$ sur $p$. Soit $a$ un axe de la courbe du second ordre et supposons qu'il soit rencontré obliquement en P et $P_1$

Fig. 69.




par les rayons $p$ et $p_1$ ; chaque rayon du faisceau P est alors perpendiculaire au rayon qui lui est conjugué dans le faisceau $P_1$. En effet, les faisceaux P et $P_1$ seront rapportés projectivement l'un à l'autre, si à chaque rayon de l'un d'eux on fait correspondre celui qui lui est conjugué dans l'autre (page 103). Mais, si A est le pôle situé à l'infini de l'axe $a$, les trois rayons $a$, $\overline{PA}$ et $p$ de P sont respectivement perpendiculaires aux rayons $\overline{P_1A}$, $a$ et $p_1$ qui leur sont conjugués dans $P_1$ ; les deux faisceaux P et $P_1$ engendrent donc un cercle, qui a $PP_1$ pour diamètre, et deux rayons conjugués quelconques appartenant à ces faisceaux sont perpendiculaires entre eux. Nous avons ainsi la première partie du théorème suivant :

*Considérons un axe* a *d'une courbe du second degré ; à chacun de ses points P correspond un point $P_1$ tel que deux rayons conjugués quelconques passant respectivement par P et $P_1$ sont perpendiculaires*

*entre eux. Si l'on fait correspondre deux à deux les points déterminés de cette manière, les points de l'axe* a *sont accouplés involutivement.*

La seconde partie du théorème se démontre comme il suit. Rapportons projectivement l'un à l'autre (page 105) les deux faisceaux de rayons parallèles, dont l'un a la direction de $p$ et l'autre la direction de $p_1$, en faisant correspondre à chaque rayon de l'un des faisceaux le rayon qui lui est conjugué dans l'autre. La droite $a$ est coupée par ces faisceaux suivant deux ponctuelles projectives ; et ces dernières sont en involution, parce que deux quelconques de leurs points, comme P et $P_1$ se correspondent doublement.

*Si cette ponctuelle en involution* a *a deux points doubles, chacun d'eux est un foyer de la courbe du second ordre : si* a *n'a pas de points doubles, chacun des deux points qui projette* a *suivant un faisceau rectangulaire de rayons* (*page* 162) *est un foyer de la courbe.*

En effet, deux rayons rectangulaires quelconques, issus d'un pareil point, sont conjugués. Dans le second cas, les foyers sont situés sur l'axe de la courbe qui est différent de $a$ ; ils constituent les points doubles d'une ponctuelle involutive, située sur ce second axe et construite de la même manière que la première.

Aucune courbe du second ordre n'a plus de deux foyers ; en effet, toute droite qui joint deux foyers est un axe et il n'y a que le cercle qui ait plus de deux axes. L'axe $a$ d'une ellipse ou d'une hyperbole sur lequel sont situés les deux foyers est appelé *axe principal* ; l'autre est dit *axe conjugué*.

*Tout cercle circonscrit à un triangle rectangle, qui a son hypoténuse sur l'axe conjugué et dont les deux autres côtés sont conjugués l'un à l'autre, coupe l'axe principal aux foyers de la courbe.*

Cette proposition découle immédiatement de la deuxième partie du théorème précédent.

L'hyperbole est coupée par son axe principal ; en effet, l'axe qui ne la rencontre pas ne peut pas contenir les foyers, puisque ceux-ci doivent être intérieurs à la courbe. Les foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole sont équidistants du centre de la courbe (pages 44-45) ; en effet, dans la ponctuelle involutive $a$, dont les foyers sont les points doubles, le point central est conjugué au point à l'infini, puisque l'autre axe de la courbe est conjugué à toutes les droites qui lui sont normales. En général, les foyers sont harmoniquement séparés par deux droites conjuguées quelconques rectangulaires entre elles.

Si la courbe du second degré est une parabole, et si par suite $a$ est son axe, les deux faisceaux projectifs de rayons parallèles, dont il a été question plus haut, ont la droite de l'infini pour élément correspondant commun; en effet, cette dernière, qui est tangente à la parabole, est conjuguée à elle-même (page 102). Dans la ponctuelle en involution $a$, l'un des points doubles coïncide donc avec le point à l'infini, qui doit, pour cette raison, être regardé comme un foyer (impropre) de la parabole. La parabole n'a par conséquent qu'un seul foyer propre qui doit, comme second point double de $a$, partager en deux parties égales le segment compris entre deux points conjugués, P et $P_1$.

Soient F et $F_1$ les deux foyers d'une courbe du second ordre, dont l'un peut être à l'infini sur la direction des diamètres parallèles, si la courbe est une parabole. Deux droites conjuguées quelconques $\overline{SP}$ et $\overline{SP_1}$, perpendiculaires entre elles (fig. 69), sont harmoniquement séparées par les points F et $F_1$ et conséquemment aussi par les rayons $\overline{SF}$ et $SF_1$; elles bissectent donc l'angle compris entre $\overline{SF}$ et $\overline{SF_1}$ (page 45).

Si S est un point de la courbe, l'une des droites $\overline{SP}$ et $\overline{SP_1}$ est tangente à la courbe; si le point S est extérieur, $\overline{SP}$ et $\overline{SP_1}$ bissectent encore l'angle compris entre les deux tangentes qu'on peut mener du point S à la courbe, parce que ces dernières sont aussi séparées harmoniquement par $\overline{SP}$ et $\overline{SP_1}$ (page 102). Nous obtenons ainsi les théorèmes suivants :

*Toute tangente à une courbe du second ordre fait des angles égaux avec les deux droites qui joignent son point de contact aux foyers de la courbe. Si deux coniques ont les mêmes foyers (sont homofocales) les deux tangentes, menées en tout point commun à ces deux courbes, se coupent orthogonalement.*

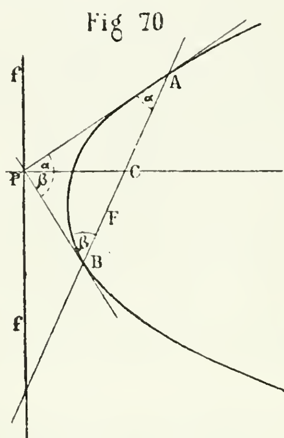
*Si l'on joint le point de rencontre de deux tangentes aux foyers d'une courbe du second ordre, l'une des droites ainsi menées fait avec l'une des tangentes le même angle que l'autre droite fait avec l'autre tangente.*

La polaire $f$ d'un foyer F de la courbe du second ordre a reçu le nom de *directrice* de la courbe; l'ellipse et l'hyperbole en ont deux, tandis que la parabole n'a qu'une seule directrice propre. Cette dernière courbe nous donne ce théorème :

*Deux tangentes* $\overline{PA}$ *et* $\overline{PB}$ *à une parabole sont perpendiculaires entre elles, quand leur point de rencontre P est situé sur la directrice.*

En effet, dans ce cas, la polaire de P passe par le foyer F (fig. 70) et contient les points de contact A et B des deux tangentes ; chaque tangentes fait donc avec $\overline{AB}$ le même angle qu'avec un diamètre quelconque. En conséquence, dans le triangle APB, la somme des angles en A et B est égale à la somme des angles que $\overline{PA}$ et $\overline{PB}$ font avec le diamètre $\overline{PC}$ qui passe par C, c'est-à-dire à l'angle P ; et comme la somme des angles A,P,B est égale à deux droits, l'angle P doit être un angle droit.

D'autres propriétés remarquables des foyers d'une courbe du second ordre découlent de ce fait que deux rayons conjugués quelconques pas-




sant par un foyer sont perpendiculaires l'un à l'autre. Nous avons entre autres celle-ci :

*Le segment déterminé sur une tangente par son point de contact et son point de rencontre avec une directrice est projeté du foyer correspondant suivant un angle droit.*

Les côtés de cet angle sont en effet deux rayons conjugués passant par le foyer F, parce que le point où la tangente coupe la directrice $f$ a pour polaire la droite qui joint F au point de contact de la tangente.

Soient $\overline{TA}$ et $\overline{TB}$ deux tangentes quelconques d'une courbe du second ordre (fig. 71) et soit $\overline{AB}$ la polaire du point T ; le point d'intersection P de $\overline{AB}$ avec $f$ est le pôle de la droite $\overline{TF}$, et $\overline{PF}$ est perpendiculaire à $\overline{TF}$, parce que ces deux rayons sont conjugués. En même temps $\overline{FA}$ et $\overline{FB}$ sont harmoniquement séparés par $\overline{FT}$ et $\overline{FP}$, parce que A et B sont harmoniquement séparés par P et $\overline{FT}$. En conséquence, les angles que

forment entre eux $\overline{FA}$ et $\overline{FB}$ sont bissectés par $\overline{FP}$ et $\overline{FT}$ (page 45); ou en d'autres termes :

*Si l'on joint par des droites un foyer propre d'une courbe du second ordre aux points de contact et au point d'intersection de deux tangentes, la dernière droite fait des angles égaux avec les deux premières.*

Menons par A et B (fig. 71) deux parallèles à FT qui coupent res-

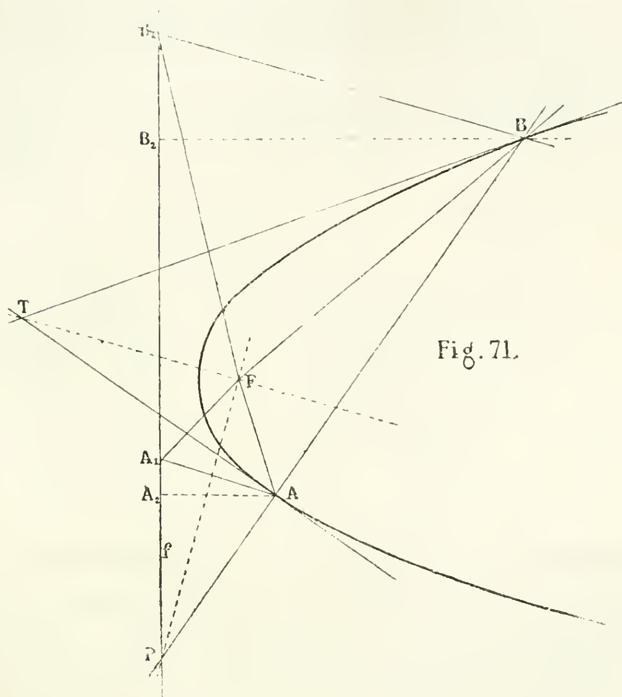


Fig. 71.

pectivement la directrice $f$ en $A_1$ et $B_1$; $A_1$ et $B_1$ sont aussi séparés harmoniquement par P et $\overline{FT}$. Les angles que forment $\overline{FA_1}$ et $\overline{FB_1}$ sont donc aussi bissectés par $\overline{FT}$ et $\overline{FP}$. Il résulte immédiatement de là que les triangles $A_1AF$ et $B_1BF$ ont leurs angles égaux, qu'ils sont semblables et qu'on a la proportion :

$$\frac{FA}{AA_1} = \frac{FB}{BB_1}$$

Les segments $AA_1$ et $BB_1$ font des angles égaux avec la directrice $f$;

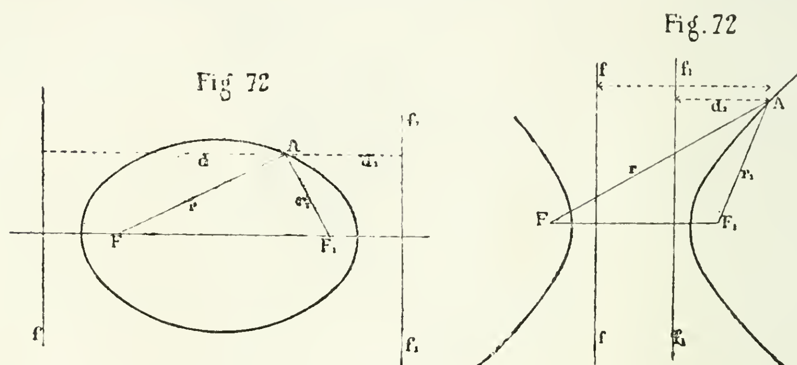
par conséquent, ils sont proportionnels aux perpendiculaires $AA_2$ et $BB_2$ qu'on peut abaisser de A et B sur $f$; en sorte que nous avons aussi :

$$\frac{FA}{AA_2} = \frac{FB}{BB_2}$$

Ici A et B sont des points quelconques de la courbe ; d'où ce théorème :

*Les distances d'un point quelconque d'une courbe du second ordre à un foyer et à la directrice correspondante sont entre elles dans un rapport constant.*

Pour la parabole, la valeur de ce rapport est l'unité, c'est-à-dire que




les deux distances sont égales entre elles; en effet, le sommet est équidistant du foyer et de la directrice, puisqu'il est harmoniquement séparé du point à l'infini par ces deux éléments. En se servant ainsi des sommets, on démontre facilement que la valeur de ce rapport est plus petite que l'unité pour l'ellipse et plus grande que l'unité pour l'hyperbole; et comme chacun des deux axes partage une courbe du second ordre en deux moitiés symétriques, ce rapport a la même valeur pour l'un et l'autre foyer et pour les directrices correspondantes. Soient donc $r_1$ et $r_2$ les distances d'un point A de la courbe aux deux foyers F et $F_1$, $d_1$ et $d_2$ ses distances aux directrices correspondantes $f$ et $f_1$ (fig. 72 et 73) on aura :

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \text{constante},$$

quelle que soit la position du point A. Il en résulte aussi que $\dfrac{r_1 \pm r_2}{d_1 \pm d_2}$

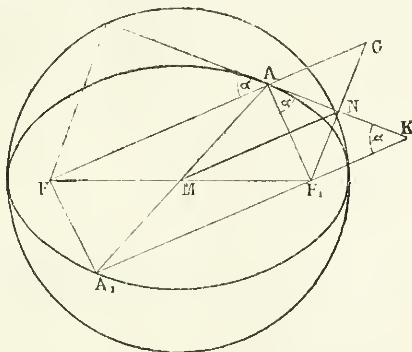
est égal à ce rapport constant. Or, dans l'ellipse $d_1 + d_2$ est constant et $d_1 - d_2$ l'est aussi dans l'hyperbole, puisque ces quantités représentent la distance qui sépare les deux directrices l'une de l'autre ; il faut que $r_1 + r_2$ dans l'ellipse et $r_1 - r_2$ dans l'hyperbole soient des quantités constantes ; donc

*Dans une ellipse, la somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante.*

*Dans une hyperbole, la différence des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante.*

On trouvera sans peine que cette somme ou cette différence constante est égale au segment $2a$ compris entre les deux sommets situés sur l'axe principal, et que l'ellipse intercepte un plus grand segment sur son axe principal que sur son axe conjugué.

Fig. 74




Lorsque deux points sont symétriquement placés par rapport à une droite, c'est-à-dire lorsque la droite qui les joint est perpendiculaire à la première et bissectée par elle, on dit que l'un des points est le *symétrique* de l'autre par rapport à cette droite. Ceci posé, dans l'ellipse et l'hyperbole nous avons le théorème suivant :

*Les symétriques d'un foyer* $F_1$, *par rapport à toutes les tangentes d'une ellipse ou d'une hyperbole, sont situés un cercle de rayon* $2a$ *qui a l'autre foyer* F *pour centre.*

En effet, soit G le symétrique de $F_1$ par rapport à une tangente quelconque, dont le point de contact est A (fig. 74) ; F, A et G sont situés sur une même droite, puisque $\overline{AF_1}$ et par suite $\overline{AG_1}$ fait avec la tangente le même angle que $\overline{AF}$ (page 165) ; comme de plus les points $F_1$ et G sont équidistants de A, FG est égal à la somme (ou à la différence) de FA

et $F_1A$ ; cette longueur est donc constante et égale à $2a$, ainsi qu'on l'a énoncé. Le pied N de la perpendiculaire abaissée de $F_1$ sur la tangente est le milieu de $F_1G$ et le centre M de la courbe est aussi le milieu du segment $FF_1$ ; donc MN est parallèle à FG et égal à $\frac{1}{2}$ FG ; par suite $MN = a$. Donc :

*Les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse, ou d'une hyperbole, sur les tangentes à cette courbe sont situés sur une circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.*

En considérant la parabole comme le cas limite de l'ellipse ou de

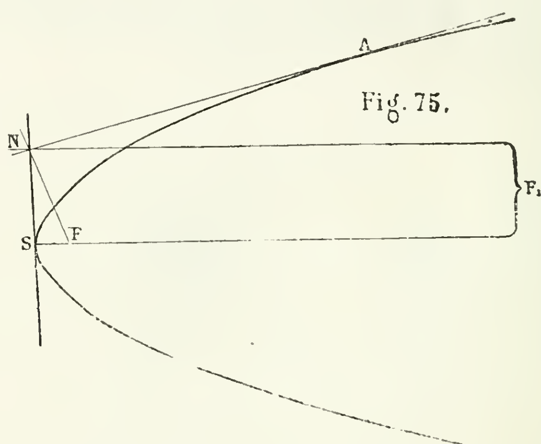


Fig. 75.

l'hyperbole, par exemple, comme une ellipse dont un foyer est à l'infini, on obtient le théorème suivant :

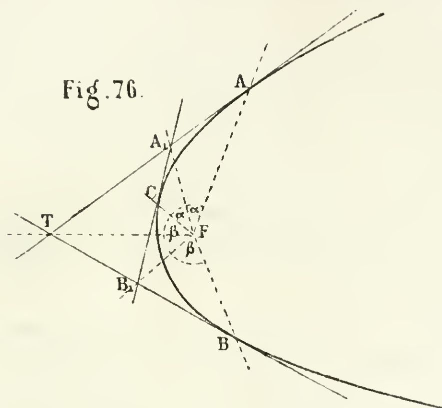
*Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer F d'une parabole sur toutes ses tangentes sont situés sur la tangente au sommet de la parabole.*

Pour le démontrer, par le point N où une tangente quelconque $\overline{NA}$ (fig. 75) rencontre la tangente au sommet $\overline{NS}$, menons une droite $\overline{NF_1}$ parallèle à l'axe et une droite $\overline{NF}$ dirigée vers le foyer ; les angles FNA et $SNF_1$ sont alors égaux (page 165), puisque $NF_1$ contient le foyer de la parabole, lequel est situé à l'infini ; et comme $SNF_1$ est un angle droit, il en est de même pour FNA.

Ces propositions nous fournissent le moyen de déterminer très simplement les foyers d'une courbe du second ordre. Voici une construction facile pour l'ellipse ou l'hyperbole. Menons les tangentes aux deux

sommets du grand axe; elles couperont une troisième tangente quelconque aux deux points P et Q, qui sont projetés d'un point quelconque du grand axe suivant deux rayons conjugués (page 102). Pour avoir les foyers, où ces deux rayons conjugués sont rectangulaires, décrivons une circonférence sur PQ comme diamètre; ses points d'intersection avec l'axe principal sont les deux foyers cherchés.

Supposons deux tangentes $\overline{TA}$ et $\overline{TB}$ d'une courbe du second ordre coupées par une troisième tangente aux points $A_1$ et $B_1$; soient A, B et C leurs points de contact et F un foyer propre de la courbe (fig. 76).




Entre les angles qui projettent les segments des tangentes du foyer F, nous avons les équations suivantes (page 167) :

$$< B_1FC = < BFB_1 = \frac{1}{2} < BFC,$$

$$< CFA_1 = < A_1FA = \frac{1}{2} < CFA;$$

par conséquent :

$$< B_1FC + < CFA_1 = \frac{1}{2} (< BFC + < CFA);$$

ou bien :

$$< B_1FA_1 = < BFT = < TFA.$$

Supposons maintenant que les deux premières tangentes $\overline{TA}$ et $\overline{TB}$ soient fixes, l'angle $B_1FA_1$, qui projette du foyer F le segment $A_1B_1$ de

la troisième tangente, aura une grandeur invariable, quelle que soit cette troisième tangente. Si elle roule d'une manière continue sur la courbe, $A_1$ et $B_1$ décrivent deux ponctuelles projectives sur les tangentes fixes et les rayons $\overline{FA_1}$ et $\overline{FB_1}$ décrivent autour de F deux faisceaux de rayons égaux; on voit ainsi que :

*Les ponctuelles projectives, suivant lesquelles deux tangentes quelconques d'une courbe du second ordre rencontrent toutes les autres tangentes sont projetées de chacun des foyers suivant deux faisceaux projectifs de rayons, égaux et concordants.*

Ce théorème subsiste encore si la courbe du second ordre est une parabole ou un cercle et si le foyer devient, en même temps, le point à l'infini de l'une ou le centre de l'autre courbe. Étant données trois tangentes d'une courbe du second ordre et un foyer, on pourra donc construire autant d'autres tangentes que l'on voudra.

Supposons que la courbe soit une parabole; la tangente mobile $\overline{A_1B_1}$ peut aussi passer à l'infini; les droites $\overline{FA_1}$ et $\overline{FB_1}$ font alors entre elles le même angle que les tangentes fixes $\overline{TA}$ et $\overline{TB}$. Le quadrangle $B_1TA_1F$ est inscriptible et par suite :

*Tout cercle, circonscrit à un triangle* $B_1TA_1$ *formé par trois tangentes à une parabole, passe par le foyer* F *de cette courbe.*

Si donc l'on circonscrit des cercles aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère, ces cercles ont tous un point commun; c'est le foyer de la parabole inscrite dans le quadrilatère.

Supposons que la courbe du second ordre soit une hyperbole et que les deux tangentes fixes $\overline{TA}$ et $\overline{TB}$ soient ses asymptotes; A et B sont alors ses points à l'infini, $\overline{TB}$ et $\overline{FB}$ sont parallèles et l'angle $B_1FA_1 = BFT$ est égal à l'un des deux angles que l'asymptote $\overline{TB}$ fait avec l'axe principal $\overline{FT}$; l'angle $A_1F_1B_1$ qui projette $A_1B_1$ du second foyer $F_1$ est égal à l'autre angle formé comme le précédent. Par conséquent $B_1FA_1$ et $A_1F_1B_1$ sont supplémentaires et $B_1FA_1F_1$ est inscriptible.

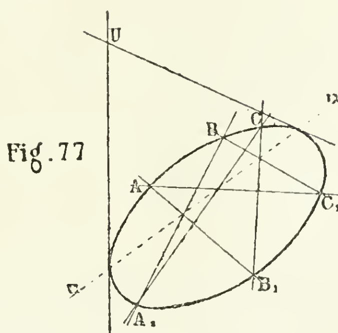
Donc :

*Les deux foyers d'une hyperbole et les deux points, où une tangente quelconque coupe les deux asymptotes, sont situés sur un même cercle. Le centre de ce cercle, le centre de l'hyperbole et les deux mêmes points d'intersection de la tangente sont sur un deuxième cercle.*

# QUATORZIÈME LEÇON.

**Problèmes du second degré. — Éléments imaginaires.**

Nos recherches nous ont plusieurs fois conduit à des problèmes qui admettent en général deux solutions, qui par suite ne peuvent pas se




résoudre en employant seulement des constructions linéaires, mais qui exigent qu'on ait recours à une forme du second ordre. De ce nombre sont les suivants : *construire les points correspondants communs à deux ponctuelles projectives situées sur la même droite. Trouver les éléments doubles d'une forme élémentaire involutive.* Tous ces problèmes peuvent se ramener à celui-ci :

*Deux ponctuelles du second ordre* k *et* $k_1$, *situées sur la même courbe, sont rapportées projectivement l'une à l'autre; trouver les points correspondants qui leur sont communs.*

Soient A,B,C (fig. 77) trois points quelconques de $k$ et $A_1$,$B_1$,$C_1$, les

points de $k_1$ qui leur correspondent. Projetons la ponctuelle $k_1$ de A et la ponctuelle $k$ de $A_1$ ; nous obtenons deux faisceaux de rayons A $(A_1B_1C_1)$ et $A_1$ (ABC) qui sont perspectifs puisqu'ils ont en commun le rayon correspondant $\overline{AA_1}$. Les points d'intersection de deux rayons correspondants quelconques des faisceaux se trouvent donc sur une droite $u$; c'est celle qui joint le point d'intersection de $\overline{AB_1}$ et de $\overline{A_1B}$ avec le point d'intersection de $\overline{AC_1}$ et de $\overline{A_1C}$.

Les points cherchés sont les points communs à $u$ et à la courbe du second ordre; les ponctuelles ont chacun d'eux pour point correspondant commun. Suivant que $u$ coupera la courbe, lui sera tangente ou ne la rencontrera pas, nous aurons ainsi deux de ces points, un seul ou pas du tout.

En vertu du théorème de Pascal, le point de rencontre des droites $\overline{BC_1}$ et $\overline{B_1C}$ se trouve aussi sur la droite $u$; en effet, les trois couples de côtés opposés de l'hexagone $AB_1CA_1BC_1$, inscrit dans la courbe du second ordre, se coupent sur la droite $u$. Nous aurons encore la même droite $u$ en projetant les ponctuelles $k_1$ et $k$ de B et $B_1$ ou C et $C_1$, suivant deux faisceaux de rayons qui seront encore perspectifs. En général, si deux points quelconques P et Q de $k$ ont pour correspondants les points $P_1$ et $Q_1$ de $k_1$, le point d'intersection de $\overline{PQ_1}$ et de $\overline{P_1Q}$ se trouvera sur $u$. Si donc l'on connaît trois points de $k$ et les trois points qui leur correspondent sur $k_1$, on pourra sans difficulté construire la droite $u$.

Si les ponctuelles $k$ et $k_1$ sont en involution, si par conséquent elles constituent une ponctuelle involutive du second ordre, $u$ est l'axe d'involution de cette dernière forme et il rencontre la courbe suivant les deux points doubles, quand ces derniers existent. Dans ce cas, pour construire $u$, il suffit de connaître deux couples de points conjugués A, $A_1$ et B, $B_1$ ; en effet aux points A, B, $A_1$ de $k$ correspondent les points $A_1$, $B_1$, A de $k_1$ et $u$ passe par les deux points où les droites $\overline{AB_1}$ et $\overline{AB}$ rencontrent respectivement les droites $\overline{A_1B}$ et $\overline{A_1B_1}$ (figures 60 et 61). Le pôle de $u$, où se coupent les droites $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$ est le centre d'involution et si, de ce point, l'on peut mener deux tangentes à la courbe, elles sont tangentes à cette courbe aux points doubles.

On peut facilement ramener au problème que nous venons de résoudre les différents cas du problème plus général que voici :

*Deux formes élémentaires, situées l'une sur l'autre, sont projectives ; déterminer les éléments correspondants qui leur sont communs.*

Si, par exemple, les deux formes élémentaires sont deux surfaces

coniques ou deux systèmes réglés, nous les couperons par un plan quelconque qui nous donnera comme sections deux ponctuelles projectives, situées sur la même courbe du second ordre ; si ce sont deux faisceaux de rayons du second ordre, les ponctuelles du second ordre qu'ils enveloppent sont situées l'une sur l'autre et projectives ; nous n'avons donc qu'à déterminer les points correspondants communs à ces courbes pour obtenir immédiatement les deux rayons cherchés, puisque ces rayons doivent passer par les points ainsi construits. Si deux faisceaux projectifs de rayons du premier ordre sont concentriques et situés dans le même plan, nous les couperons par une courbe du second ordre, passant par leur centre commun, en deux ponctuelles projectives $k$ et $k_1$ ; les deux rayons correspondants communs aux deux faisceaux passent alors par les deux points correspondants communs à $k$ et $k_1$. Supposons

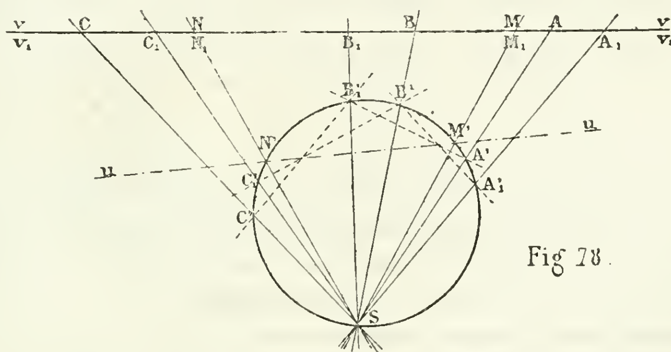


Fig 78.

enfin que les deux formes élémentaires projectives soient deux ponctuelle $v$ et $v_1$ situées sur la même droite ; nous ramènerons ce cas au précédent, en projetant ces ponctuelles, d'un point arbitraire S suivant deux faisceaux de rayons concentriques (fig. 78). Menons maintenant par le sommet S une courbe du second ordre, par exemple, un cercle qui soit dans le plan S$v$, et projetons de S sur cette courbe trois points A,B,C de $v$ et leurs correspondants $A_1$,$B_1$, $C_1$ de $v_1$. Ceci nous donne sur la courbe les points $A'$,$B'$,$C'$ et $A'_1$, $B'_1$, $C'_1$ et nous déterminons immédiatement la droite $u$ sur laquelle se trouvent les points d'intersection de $\overline{A'B'_1}$ avec $\overline{A'_1B'}$ de $\overline{B'C'_1}$ avec $\overline{B'_1C'}$ et de $\overline{A'C'_1}$ avec $\overline{A'_1C'}$. Si la courbe du second ordre est coupée par $u$ aux deux points $M'$ et $N'$, nous projetons ces points du centre S sur la droite $v$ et nous obtenons ainsi les deux points M et N de $v$ qui se confondent avec les points $M_1$ et $N_1$ qui

leur correspondent dans $v_1$. Si la courbe du second ordre n'a qu'un point commun avec la droite ou n'en a aucun, nous ne trouvons pour les ponctuelles $v$ et $v_1$ qu'un seul point correspondant commun ou pas du tout.

Pour les faisceaux de rayons et les surfaces coniques du second ordre, le problème général peut aussi se résoudre directement sans recourir aux courbes du second ordre; s'il s'agit de formes fondamentales uniformes, nous pourrons employer une forme élémentaire quelconque du second ordre. La solution la plus commode est celle qu'on vient de donner, parce que toutes les courbes du second ordre peuvent se construire facilement au moyen du cercle.

Comme on le sait, les progrès considérables qu'ont faits les mathématiques dépendent essentiellement des efforts tentés pour faire disparaître les cas d'exception des théorèmes et des règles générales et pour embrasser des propositions différentes sous un même point de vue, en généralisant les notions antérieurement existantes ou en introduisant de nouvelles. C'est ainsi que l'arithmétique s'est enrichie d'une manière si étonnante au moyen des quantités négatives, des grandeurs irrationnelles et enfin des nombres imaginaires. Sans ces derniers, le théorème important que toute équation du degré $n$ a $n$ racines et toutes ses nombreuses conséquences dans la géométrie analytique seraient à peu près inexacts. C'est ainsi que nous avons vu toute la fécondité de l'emploi des éléments à l'infini dans la géométrie moderne.

Les problèmes du second degré viennent de nous donner le premier exemple de l'introduction des points, droites et plans *imaginaires* dans la géométrie synthétique; et l'un des plus grands services qu'ait rendus Von Staudt, c'est d'avoir établi d'une manière purement géométrique la théorie des éléments imaginaires et de l'avoir amenée à un très haut degré de perfection. Mais il est dans l'essence même des choses que cette théorie ne peut prétendre à l'intuitivité pas plus dans la géométrie synthétique que dans la géométrie analytique : c'est pourquoi, nous nous bornerons à en indiquer seulement les fondements.

Nous définirons les éléments imaginaires par le théorème suivant qui résume en même temps les conséquences des recherches qui précèdent :

*Deux formes élémentaires projectives, situées l'une sur l'autre mais non identiques, ont deux éléments correspondants communs, réels ou imaginaires conjugués (qui peuvent coïncider).*

Ainsi, nous dirons que les deux éléments correspondants communs

sont *imaginaires* toutes les fois qu'il n'existeront pas réellement ; dans tout ce qui précède, il n'avait été question que d'éléments *réels*.

D'après cela, une forme élémentaire en involution a toujours deux éléments doubles (réels ou imaginaires). Nous pouvons dire aussi que :

Une courbe du second ordre a deux points communs avec toute droite réelle située dans son plan.

Par tout point réel, situé dans le plan d'une courbe de second ordre, passent deux tangentes de la courbe.

Si nous voulons distinguer les divers cas résumés dans cette double proposition, nous ajouterons que :

Ces deux points sont imaginaires, réels ou coïncidents, suivant que la droite est tout entière à l'extérieur de la courbe, qu'elle la rencontre ou qu'elle lui est tangente.

Ces deux tangentes sont imaginaires, réelles, ou coïncidentes, suivant que le point est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur le pourtour de la courbe.

Si la courbe du second ordre et la droite sont complètement données, nous considérerons leurs deux points communs comme déterminés. Si au contraire la courbe n'est définie, par exemple, que par cinq points A, B, C, D, E, nous la regarderons comme engendrée par les deux faisceaux projectifs de rayons A (CDE) et B (CDE); ces faisceaux seront coupés par la droite suivant deux ponctuelles qui auront les deux points cherchés comme éléments correspondants communs. On pourra donc déterminer ces deux points au moyen des règles précédentes, quand la courbe du second ordre est définie d'une manière complète. Nous pourrons de cette manière décider à quelle espèce appartient une courbe du second ordre déterminée par cinq points, car :

*Une courbe du second ordre est une hyperbole, une ellipse ou une parabole suivant que les deux points qu'elle a en commun avec la droite de l'infini sont réels, imaginaires ou coïncidents.*

La même méthode permet aussi de résoudre les problèmes du second degré qui suivent :

On donne quatre points d'une courbe du second ordre et la tan-

On donne quatre tangentes d'une courbe du second ordre et

gente en l'un d'eux, ou trois points et les tangentes en deux d'entre eux; déterminer les deux points qui sont communs à la courbe et à une droite réelle située dans son plan.

le point de contact de l'une d'elles, ou trois tangentes et les points de contact de deux d'entre elles; déterminer les deux tangentes qu'on peut mener à la courbe par un point réel situé dans son plan.

S'il s'agit de trouver les points communs à une droite et à une courbe du second ordre définie par cinq de ses tangentes, nous chercherons d'abord les points de contact des tangentes et nous ramènerons ainsi ce problème au précédent.

Von Staudt a établi une distinction spéciale pour les éléments doubles imaginaires d'une forme élémentaire involutive concordante $AA_1$, $BB_1$... en associant à la forme le sens déterminé de succession $ABA_1$ ou $A_1BA$ des éléments qu'elle renferme. Sans nous étendre sur ce sujet, nous nous appuierons sur ce qui précède pour énoncer les théorèmes et donner les définitions qui suivent.

Un point imaginaire est toujours situé sur une droite réelle; celle-ci contient aussi le point imaginaire conjugué.

Un plan imaginaire passe toujours par une droite réelle; le plan imaginaire conjugué passe par cette droite.

Une droite imaginaire de *première espèce* passe toujours par un point réel et se trouve dans un même plan réel avec la droite imaginaire qui lui est conjuguée; en effet, le point et le plan sont les lieux des faisceaux projectifs de rayons du premier ordre qui ont les deux droites imaginaires conjuguées pour éléments correspondants communs.

Deux systèmes réglés projectifs du second ordre, situés l'un sur l'autre, peuvent avoir en commun deux droites réelles (qui peuvent aussi coïncider) ou deux droites imaginaires conjuguées de *seconde espèce*. Ces droites se distinguent des droites imaginaires de première espèce en ce qu'il n'existe aucun plan réel qui les coupe en un point réel et aucun point réel d'où l'on puisse les projeter suivant un plan réel. En effet, un plan réel coupe les deux systèmes réglés projectifs suivant deux ponctuelles projectives du premier ou du second ordre situées l'une sur l'autre et qui ne peuvent avoir de point réel correspondant commun que si les deux systèmes réglés ont une droite corres-

pondante commune réelle et passant par ce point. Il n'y a donc qu'une seule espèce de points et de plans imaginaires, tandis qu'il existe deux espèces de droites imaginaires.

Quand nous parlerons de points, de droites et de plans, sans autre désignation, nous entendrons qu'il s'agit comme précédemment d'éléments réels, à moins que nous n'ayons expressément spécifié le contraire ou que cela ne résulte de la suite même de nos considérations. Ceci a lieu en particulier dans les deux problèmes du second degré qui suivent :

*On donne deux polygones (n-gones) simples dans un même plan ; on demande de construire un troisième polygone qui soit inscrit au premier et circonscrit au second :*

Ou pour parler d'une manière plus précise :

*On demande de construire un polygone de* n *côtés, dont les sommets successifs soient situés sur* n *droites données* $u_1$, $u_2$, $u_3$..... $u_n$, *et dont les côtés successifs passent par* n *points donnés* $S_1$, $S_2$, $S_3$..... $S_n$ *dans un même plan.*

Du point $S_1$ projetons la ponctuelle $u_1$ sur $u_2$, de $S_2$ la ponctuelle $u_2$ (c'est-à-dire la projection de $u_1$) sur $u_3$, de $S_3$ la ponctuelle $u_3$ sur $u_4$ et ainsi de suite, et enfin de $S_n$ projetons la ponctuelle $u_n$ sur $u_1$. Nous obtenons ainsi $n+1$ ponctuelles du premier ordre, dont chacune est la projection de la précédente et dont la première et la dernière sont situées sur la même droite $u_1$. Tout point correspondant commun à ces deux ponctuelles peut donc être considéré comme le premier sommet du polygone cherché et il donne, par conséquent, une solution du problème. En général, il existe au plus deux polygones possibles satisfaisant au problème. Dans le cas particulier où les deux ponctuelles projectives situées sur $u_1$ ont plus de deux points correspondants communs et où, par conséquent, elles ont tous leurs points correspondants communs, nous avons un nombre infini de solutions.

Il n'est pas nécessaire que les droites $u_1$, $u_2$..... $u_n$ et les points $S_1$, $S_2$..... $S_n$ soient dans un seul et même plan ; il suffit que $S_1$ soit dans un même plan avec $u_1$ et $u_2$, $S_2$ avec $u_2$ et $u_3$, etc., et enfin $S_n$ avec $u_n$ et $u_1$. Les deux polygones de $n$ côtés, qui sont donnés, peuvent donc également être des polygones gauches de $n$ côtés.

A ce problème se rattache celui-ci :

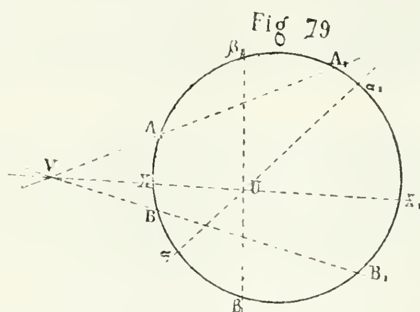
*Trouver une droite rencontrant quatre droites données* a, b, c, d *qui ne sont pas situées deux à deux dans un même plan.*

Rapportons perspectivement les faisceaux de plans $a$ et $b$ à la ponctuelle $c$; ils déterminent sur $d$ deux ponctuelles projectives superposées. Par chacun des points correspondants communs à ces ponctuelles passe une droite qui rencontrera $a$, $b$ et $c$ puisqu'elle est contenue à la fois dans deux plans homologues des faisceaux $a$ et $b$. Si les droites appartiennent à un seul et même système réglé, le problème a une infinité de solutions; dans le cas général au contraire, il n'en a que deux. On peut encore l'énoncer de la manière suivante :

*Une surface réglée du second ordre est donnée par trois droites* a, b, c *d'un de ses systèmes réglés; trouver les points qui lui sont communs avec une quatrième droite quelconque* d.

Un des plus importants problèmes du second degré est celui-ci :

*Deux formes élémentaires en involution sont situées l'une sur*




*l'autre; trouver deux éléments qui soient en même temps conjugués l'un à l'autre dans l'une et dans l'autre forme.*

Supposons d'abord que les deux formes élémentaires soient deux ponctuelles involutives situées sur la même courbe du second ordre (fig. 79), et soient d'une part $\alpha$ et $\beta$ les points de la courbe qui correspondent aux points $\alpha_1$ et $\beta_1$, et d'autre part A et B les points qui correspondent à $A_1$ et $B_1$. Cherchons les centres d'involution U et V; ils sont tels que deux points conjugués de la première ponctuelle se trouvent sur une droite passant par U et que deux points conjugués de la seconde sont situés sur une droite passant par V. Si la droite $\overline{UV}$ est coupée par la courbe du second ordre aux deux points X et $X_1$, ces derniers sont en même temps conjugués l'un à l'autre dans les ponctuelles en involution. Si la droite $\overline{UV}$ est tangente à la courbe, son point de contact est un point double des deux ponctuelles. Enfin si $\overline{UV}$ est à l'extérieur de la courbe, il n'existe pas de points satisfaisant aux conditions du problème.

Ce dernier cas ne peut se produire que si chacune des ponctuelles en involution a deux points doubles réels et si, par conséquent, elles sont involutives opposées; car c'est alors seulement que les points U et V sont extérieurs à la courbe; comme les polaires de U et V doivent se couper à l'intérieur de la courbe, au pôle de $\overline{UV}$, les points doubles de chaque ponctuelle sont en outre séparés par ceux de l'autre.

Si les formes élémentaires involutives sont deux faisceaux de rayons concentriques, situés dans le même plan, nous les couperons par une courbe du second ordre passant par le sommet commun des faisceaux; et nous pourrons d'une manière analogue ramener un cas quelconque du problème général à celui que nous venons de traiter. Le dernier résultat obtenu ne concerne pas seulement deux ponctuelles en involution situées sur la même courbe du second ordre; on peut encore l'énoncer d'une manière générale comme il suit :

*Lorsque deux formes élémentaires en involution sont placées l'une sur l'autre, elles renferment deux éléments qui sont conjugués l'un à l'autre dans chacune de ces formes; ces éléments ne sont imaginaires (conjugués) que si les deux formes sont involutives opposées et, dans ce cas, les éléments doubles de l'une sont séparés par ceux de l'autre. Quand les deux éléments, qui se correspondent ainsi de deux manières, coïncident, les deux formes involutives ont un élément double commun.*

Soient, par exemple, deux faisceaux de rayons du premier ordre dont l'un est rectangulaire (page 162), il résulte, comme cas particulier de ce théorème, que :

*Dans tout faisceau de rayons du premier ordre en involution, il existe deux rayons réels conjugués entre eux, qui sont rectangulaires; on les appelle les* AXES *du faisceau.*

Ceci nous permet de démontrer à nouveau que l'ellipse et l'hyperbole possèdent deux diamètres conjugués rectangulaires, c'est-à-dire deux axes (voir, page 112); en effet, si l'on fait correspondre deux à deux tous les diamètres conjugués, ils forment un faisceau de rayons en involution. Ce résultat appartient tout naturellement à la géométrie métrique de même que le problème suivant du second ordre qui s'y rattache :

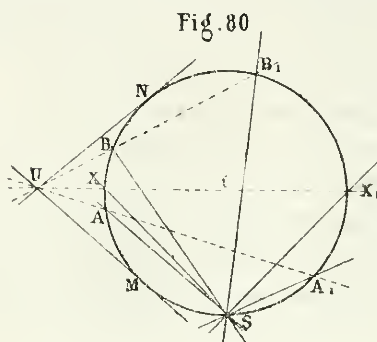
*Étant donnés deux couples de diamètres conjugués d'une courbe du second ordre, construire les axes de la courbe.*

Par le centre S de la courbe (fig. 80), où se coupent les diamètres

donnés, faisons passer une circonférence quelconque, qui coupe l'un des couples de diamètres conjugués en A et $A_1$ et l'autre couple en B et $B_1$. Les points de cette circonférence sont alors accouplés involutivement par le moyen du faisceau de diamètres, et le point U où se rencontrent $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$ est le centre d'involution par lequel passent les droites qui joignent deux à deux les points conjugués l'un à l'autre sur le cercle. Joignons maintenant U au centre C du cercle par la droite $\overline{UC}$; cette droite coupera la circonférence en deux points conjugués X et $X_1$ qui seront projetés de S suivant les deux axes cherchés $\overline{SX}$ et $\overline{SX_1}$.

Si le point U est extérieur au cercle, ce dernier a deux éléments doubles réels, M et N, qui sont projetés de U suivant deux tangentes et

Fig. 80




de S suivant les asymptotes de l'hyperbole, lesquelles appartiennent aussi au faisceau donné des diamètres (page 115).

Comme exercice, le lecteur pourra traiter ce problème : comment peut-on construire les axes (d'après la page 162), si, au lieu d'un cercle, on donne une courbe quelconque du second ordre passant par S?

Dans la suite, nous aurons souvent à résoudre cet autre problème :

*Dans un faisceau de rayons en involution, déterminer deux rayons qui soient harmoniquement séparés par deux points donnés dans le plan.*

Pour que le problème ne soit pas impossible, nous supposerons que les points donnés M et N ne sont pas situés sur une droite passant par le sommet S du faisceau de rayons et que par aucun d'eux il ne passe un rayon double de ce même faisceau. Du sommet S projetons maintenant la ponctuelle involutive, dont M et N sont les point doubles, suivant un second faisceau involutif de rayons; il ne nous restera plus qu'à chercher les deux rayons qui sont à la fois conjugués l'un à l'autre

dans chacun de ces deux faisceaux. — Ce problème peut s'étendre aussi à d'autres formes élémentaires et être présenté sous bien des formes différentes. Par exemple, à la place du faisceau S nous pourrions avoir une ponctuelle involutive située sur la droite $\overline{MN}$. Si l'un des deux points M et N, par exemple N, passe à l'infini, le problème devient le suivant :

*Dans une ponctuelle involutive du premier ordre, déterminer les points conjugués équidistants d'un point quelconque M donné sur la droite.*

On donne dans un même plan un triangle ABC et un faisceau F de rayons du premier ordre en involution, dont aucun rayon double ne passe par l'un des sommets du triangle. Circonscrire au triangle une courbe du second ordre de telle sorte que les rayons conjugués du faisceau F soient conjugués deux à deux par rapport à la courbe.

On donne dans un même plan un triangle et une ponctuelle du premier ordre en involution, dont aucun point double ne se trouve sur l'un des côtés du triangle. Inscrire dans le triangle une courbe du second ordre de telle manière que les points conjugués de la ponctuelle soient conjugués deux à deux par rapport à la courbe.

Pour que le problème soit possible, il faut que le sommet du faisceau F ne coïncide avec aucun des sommets du triangle ABC (fig. 81); nous pourrons donc admettre que deux au moins des côtés de ce triangle, par exemple $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$, ne passent pas par F. En supposant que la courbe cherchée existe, il doit y avoir, sur chacun des côtés $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$, un point dont la polaire par rapport à la courbe passe par F. Comme ce point est harmoniquement séparé de sa polaire par la courbe, que de plus les rayons conjugués de F sont conjugués deux à deux par rapport à la courbe cherchée, nous trouverons cette dernière comme il suit. Dans le faisceau F, nous déterminerons deux rayons conjugués $p$ et $p_1$ qui soient harmoniquement séparés par les points A et B et deux autres $q$ et $q_1$ qui soient harmoniquement séparés par les points A et C (fig. 81). Si ces rayons sont imaginaires, il n'existe pas de courbe réelle du second ordre qui satisfasse aux conditions du problème; ce cas ne se présentera que si le faisceau F a deux rayons doubles qui soient séparés l'un de l'autre par A et B ou par A et C (page 180).

Soient P et $P_1$ les points d'intersection de $\overline{AB}$ avec les rayons $p$ et $p_1$, et Q et $Q_1$ ceux où $\overline{AC}$ est coupé par $q$ et $q_1$. Nous pouvons et nous devons faire alors l'une des hypothèses suivantes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1°. | P et Q sont les pôles respectifs de | | | $p_1$ et $q_1$, |
| 2°. | P et $Q_1$ | — | — | $p_1$ et $q$, |
| 3°. | $P_1$ et Q | — | — | $p$ et $q_1$. |
| 4°. | $P_1$ et $Q_1$ | — | — | $p$ et $q$. |

Chacune de ces hypothèses nous conduit à une solution du problème. Faisons, par exemple, la première hypothèse et cherchons sur la

Fig. 81.

droite $\overline{PC}$ le point C′ harmoniquement séparé de C par P et sa polaire $p_1$ ; cherchons de même sur $\overline{QB}$ le point B′ harmoniquement séparé de B par Q et sa polaire $q_1$. La courbe du second ordre, qui passe par les cinq points ABCB′C′ et dont nous pouvons déterminer autant de points que nous voulons par les méthodes données précédemment, satisfait alors à toutes les conditions imposées. En effet, elle est circonscrite au triangle ABC et comme P et $p_1$ séparent harmoniquement deux couples de points de la courbe A,B et C,C′, P est le pôle de $p_1$, le rayon $\overline{FP}$ ou $p$ est conjugué au rayon $p_1$ et le rayon $q$ au rayon $q_1$ ; de sorte que deux rayons conjugués quelconques du faisceau F sont conjugués l'un à l'autre par rapport à la courbe.

Si le faisceau involutif F a deux rayons doubles, qui doivent par conséquent être tangents à la courbe du second ordre cherchée, le problème que nous venons de résoudre peut s'énoncer ainsi :

Circonscrire à un triangle donné une courbe du second ordre qui soit tangente à deux droites données situées dans le plan du triangle.

Inscrire dans un triangle donné une courbe du second ordre qui passe par deux points donnés dans le plan du triangle.

La construction ci-dessus montre en même temps que ce double problème ne peut avoir quatre solutions réelles que si les deux droites (problème de gauche) ne sont pas séparées par deux sommets quelconques du triangle et si les deux points (théorème de droite) ne sont pas séparés l'un de l'autre par deux côtés du triangle. Dans le cas contraire, il n'y a pas de solutions réelles.

Si les rayons doubles du faisceau F sont imaginaires, le problème a quatre solutions. Ce cas se rencontre, par exemple, si le faisceau est rectangulaire et si par conséquent F est un foyer de la courbe cherchée; nous avons de la sorte trouvé, en passant, la solution de ce problème :

*Déterminer les quatre courbes du second ordre, qui sont circonscrites à un triangle donné et qui ont pour foyer un point donné.*

Pour terminer nous allons traiter un problème qui, il est vrai, n'est pas du second degré, mais qui touche de très près à celui qu'on vient d'étudier.

On donne, dans un plan, un triangle ABC et une ponctuelle involutive $u$ du premier ordre telle qu'aucun de ses points doubles ne soit situé sur l'un des côtés du triangle et que $u$ ne passe par aucun de ses sommets. Circonscrire au triangle une courbe du second ordre telle que les points conjugués de $u$ soient conjugués deux à deux par rapport à la courbe.

On donne, dans un plan, un triangle et un faisceau involutif de rayons du premier ordre S, tel qu'aucun de ses rayons doubles ne passe par l'un des sommets du triangle et que son centre S ne soit situé sur aucun de ses côtés. Inscrire au triangle une courbe du second ordre telle que les rayons conjugués de S soient conjugués deux à deux par rapport à la courbe.

Soient K et M (fig. 82), les points où $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ coupent $u$ et $K_1$ et $M_1$ les points qui leur sont conjugués dans la ponctuelle involutive $u$; soit de plus $K_2$ le point de $\overline{AB}$ qui est harmoniquement séparé de K par les points A et B de la courbe et $M_2$ le point de $\overline{BC}$ qui est harmoniquement séparé de M par B et C.

Par rapport à la courbe cherchée, $\overline{K_1K_2}$ est alors la polaire de K, puisque $K_1$ et $K_2$ sont conjugués à K ; et de même $\overline{M_1M_2}$ est la polaire de M. Soit aussi C′ le point harmoniquement séparé de C par K et $\overline{K_1K_2}$ et A′ le point harmoniquement séparé de A par M et $\overline{M_1M_2}$; la courbe

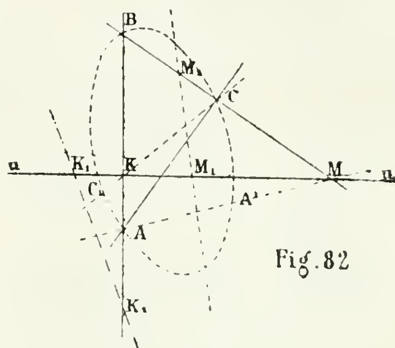


Fig. 82

cherchée passe par les cinq points A,B,C,A′,C′. En effet, conformément aux conditions imposées, les points K et $K_1$ (comme M et $M_1$) sont conjugués l'un à l'autre par rapport à la courbe, puisque K est harmoniquement séparé de la droite $\overline{K_1K_2}$ aussi bien par les points A et B de la courbe que par C et C′ ; par conséquent ce point est le pôle de $\overline{K_1K_2}$.

Les problèmes que nous venons de résoudre peuvent aussi s'énoncer sous la forme suivante (voir page 177) :

| | |
|---|---|
| Faire passer une courbe du second ordre par cinq points d'un plan dont trois sont réels, dont les deux autres peuvent être ou réels, ou imaginaires conjugués, et dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite. | Inscrire une courbe du second ordre dans un pentagone plan dont trois côtés sont réels et dont les deux autres peuvent être réels ou imaginaires conjugués. |

Chacun de ces deux problèmes a une solution réelle.

# QUINZIÈME LEÇON.

## Axes principaux, plans de symétrie, axes focaux et plans cycliques d'une surface conique du second ordre.

La théorie des polaires pour les surfaces coniques du second ordre découle immédiatement, comme nous l'avons déjà vu (page 106), de celle des courbes du second ordre. Mais il n'en est plus de même pour les théorèmes de la géométrie métrique qu'on déduit de cette même théorie ; on ne peut plus les étendre des courbes aux surfaces coniques du second ordre par la méthode des projections et des sections ; ils sont, en partie, d'une nature différente pour les surfaces coniques et doivent être spécialement établis pour elles. Cependant, nous prendrons principalement comme types les recherches qui précèdent.

Si l'on considère dans la gerbe de rayons une surface conique du second ordre, un plan quelconque $\varepsilon$ a pour conjugués par rapport à cette surface tous les plans qui passent par le rayon polaire $e$ de $\varepsilon$. Joignons $e$ au rayon de la gerbe qui est perpendiculaire à $\varepsilon$ ; nous obtenons un plan $\varepsilon'$, qui est conjugué à $\varepsilon$ et qui en même temps lui est normal. En général, il n'y a qu'un seul plan $\varepsilon'$ qui soit *conjugué normal* à un plan $\varepsilon$ de la gerbe ; c'est seulement dans le cas où un plan $\alpha$ est normal à son rayon polaire $a$ que tous les plans $\alpha'$ conjugués à $\alpha$ lui sont normaux. Dans ce cas, $\alpha$ et $a$ bissectent les angles que font entre eux deux rayons de la surface conique situés dans un même plan avec $a$ ; car $a$ et $\alpha$ sont perpendiculaires l'un à l'autre et séparent harmoniquement les deux rayons (pages 106 et 45).

Les rayons de la surface du second ordre sont alors symétriques

deux à deux par rapport au plan $\alpha$, que nous pouvons appeler un *plan de symétrie de la surface conique;* on donne habituellement à son rayon polaire $a$ le nom d'*axe principal* de la surface. Chaque plan de symétrie de la surface conique est donc perpendiculaire à l'axe principal qui lui est conjugué, c'est-à-dire à son rayon polaire.

Lorsqu'un plan $\varepsilon$ pivote autour d'un rayon $s$ de la gerbe, son rayon polaire $e$ décrit un faisceau de rayons dans le plan polaire de $s$ et le rayon qui est normal à $\varepsilon$ décrit un faisceau de rayons dans le plan de la gerbe qui est normal à $s$. Ces deux faisceaux ainsi décrits sont projectifs au faisceau de plans $s$; par conséquent ils sont aussi projectifs entre eux et engendrent en général un faisceau de plans du second ordre. Donc :

*Si l'on considère deux plans conjugués normaux de la gerbe et si l'un d'eux* $\varepsilon$ *tourne autour d'un axe* s, *l'autre* $\varepsilon'$ *décrit en général un faisceau de plans du second ordre, qui contient le plan polaire de* s *par rapport à la surface conique donnée et le plan de la gerbe normal à* s.

Le plan $\varepsilon'$, ne tourne autour d'un axe $s'$ que si les deux faisceaux projectifs de rayons sont en perspective et si par conséquent ils ont un rayon $a$ correspondant commun. Dans ce cas, $s$ se trouve dans un plan de symétrie $\alpha$, dont $a$ est le rayon polaire (l'axe principal conjugué); et comme $\alpha$ est le plan normal conjugué de $\overline{sa}$, $s'$ doit aussi être situé dans $\alpha$. Donc :

*Dans un plan de symétrie* $\alpha$ *d'une surface conique du second ordre, à chaque rayon* s *de la gerbe correspond un rayon* s' *et ces rayons sont tels que les plans des faisceaux* s *et* s', *qui sont normaux entre eux, sont conjugués par rapport à la surface conique.*

Ce théorème est analogue à celui qui nous a conduits précédemment aux foyers d'une courbe du second ordre (page 165). Il nous mènera de même à la notion de ce qu'on appelle les axes focaux d'une surface conique du second ordre ; mais auparavant nous devons examiner si une surface de ce genre a plusieurs plans de symétrie et quel en est le nombre. Nous allons d'abord démontrer que la surface conique possède au moins un plan de symétrie.

Soit $\Sigma$ le faisceau de plans que forment les plans conjugués normaux à tous les plans passant par un rayon quelconque $s$ de la gerbe. S'il est du premier ordre, l'existence d'un plan de symétrie se trouve établie à l'avance (voir ci-dessus); nous admettrons donc que $\Sigma$ est du second

ordre. A ce faisceau appartient chaque plan de symétrie de la surface conique donnée, parce qu'il est conjugué normal au plan qui passe par $s$ et par l'axe principal correspondant. Ceci posé, tous les plans $\eta$, qui coupent suivant deux rayons la surface conique enveloppée par $\Sigma$, sont séparés des autres plans $\varphi$ de la gerbe de rayons par les plans tangents à cette surface conique (voir page 98). Soit donc $t$ la droite suivant laquelle se coupent les plans conjugués normaux à un plan $\eta$ et un plan $\varphi$, les plans normaux conjugués à tous les plans qui passent par $t$ forment un faisceau de plans T du premier ou du second ordre qui a au moins deux plans réels communs avec $\Sigma$ et qui en a au plus quatre. L'un de ces plans communs est le plan conjugué normal à $\overline{st}$; au contraire, tout autre de ces plans est normal à deux plans différents, qui lui sont conjugués et appartiennent l'un au faisceau $s$ l'autre à $t$; il est donc aussi normal à son rayon polaire, suivant lequel ces deux plans se coupent. Et comme tout plan normal à son rayon polaire est un plan de symétrie de la surface conique donnée du second ordre, il existe donc au moins un de ces plans, et en général il y en a au plus trois.

Ainsi toute surface conique du second ordre possède au moins un plan de symétrie $\alpha$, avec l'axe principal $a$ qui lui est conjugué; il est facile de démontrer que, dans tous les cas, il y a encore deux plans de symétrie qui se coupent rectangulairement suivant $a$. En effet si, dans le plan de symétrie $\alpha$, on fait correspondre deux à deux les rayons de la gerbe qui sont conjugués par rapport à la surface conique du second ordre, on obtient un faisceau involutif de rayons, dont les axes $b$ et $c$ sont deux axes principaux de la surface; car le rayon $b$, par exemple, est en même temps conjugué et normal à $c$ et $a$; conséquemment son plan polaire $\overline{ca}$ est normal à $b$ et constitue par suite un plan de symétrie de la surface conique. En particulier, si le faisceau involutif de rayon $\alpha$ est rectangulaire, chacun de ses rayons est un axe principal et chaque plan passant par $a$ est un plan de symétrie. On reconnaît facilement que, dans ce cas spécial, la surface conique du second ordre est une surface de révolution (un cône circulaire droit) dont $a$ est l'axe de révolution. Ce qui précède démontre donc que :

*Une surface conique du second ordre a en général trois plans de symétrie qui se coupent rectangulairement suivant les trois axes principaux* a, b, c *et qui constituent par conséquent un trièdre polaire trirectangle de la surface. La surface conique de révolution n'a pas*

*seulement trois plans de symétrie; elle en a une infinité qui tous, excepté un, passent par l'axe de révolution.*

Revenons maintenant au théorème qui nous a rappelé plus haut la théorie des foyers des courbes du second ordre. Établissons d'abord la définition qui suit :

*L'axe* f *de tout un faisceau de plans du premier ordre tel que ses plans perpendiculaires entre eux soient conjugués deux à deux par rapport à une surface conique du second ordre, s'appelle un* axe focal *de la surface.*

Si donc un plan tourne autour d'un axe focal $f$, son plan conjugué normal décrit de même le faisceau $f$ et l'axe $f$ doit par conséquent (page 188) se trouver dans un plan de symétrie de la surface conique. Comme on le voit facilement, un axe principal n'est en même temps un axe focal de la surface que si cette dernière est de révolution et si l'axe principal en question est l'axe de révolution. Les surfaces coniques de révolution n'ont d'ailleurs qu'un seul axe focal, qui est leur axe de révolution ; nous les exclurons de nos considérations à l'avenir.

Le plan qui réunit deux axes focaux réels $f$ et $f'$ est un plan de symétrie de la surface, parce qu'il est conjugué aux deux plans qui passent par $f$ et $f'$ et qui lui sont normaux. Par aucun axe focal, on ne peut mener de plans tangents réels à la surface conique (voir page 162).

Deux plans conjugués normaux quelconques coupent un plan de symétrie $\alpha$ de la surface conique du second ordre suivant deux rayons $s$ et $s'$ tels que tout plan passant par $s$ est conjugué et normal à un plan passant par $s'$. Les deux faisceaux $s$ et $s'$ de plans conjugués normaux sont projectifs et sont coupés par un second plan de symétrie $\beta$ suivant deux faisceaux projectifs de rayons. Ces derniers sont en involution, parce que les rayons homologues sont deux à deux dans la même relation l'un par rapport à l'autre que $s$ et $s'$ et les rayons doubles du faisceau involutif de rayons $\beta$ sont les axes focaux de la surface. Si ces deux rayons doubles sont imaginaires, il existe (voir page 162) deux axes, d'où le faisceau $\beta$ sera projeté par deux faisceaux rectangulaires de plans et qui sont deux axes focaux réels de la surface conique. La surface ne peut avoir plus de deux axes focaux réels, parce que le plan qui joint deux axes focaux réels est toujours un plan de symétrie et qu'il ne peut contenir plus de deux de ces axes, et parce que c'est seulement dans les surfaces de révolution qu'un axe focal est en même temps axe principal.

Les deux axes focaux réels $f$ et $f'$ d'une surface conique du second ordre séparent harmoniquement les plans qui sont conjugués normaux deux à deux; en effet, ces plans coupent le plan de symétrie $\overline{ff'}$ suivant deux rayons conjugués du faisceau involutif dont $f$ et $f'$ sont les rayons doubles. En particulier, les deux autres plans de symétrie sont harmoniquement séparés par $f$ et $f'$ et les angles formés par $f$ et $f'$ sont par conséquent bissectés par deux axes principaux. D'après cela, nous pouvons distinguer les trois axes principaux de la surface ainsi qu'il suit : le premier est perpendiculaire au plan $\overline{ff'}$ et extérieur à la surface, le second et le troisième sont situés dans le plan $\overline{ff'}$ et l'un est intérieur et l'autre extérieur à la surface. Le premier des trois plans de symétrie contient les deux rayons focaux $f$ et $f'$, le second est tout entier à l'extérieur de la surface et le troisième, de même que le premier, la coupe suivant deux *rayons-sommets ;* le deuxième et le troisième plan de symétrie renferment chacun deux axes focaux imaginaires conjugués de la surface conique.

Les plans bissecteurs du dièdre formé par deux plans tangents quelconques de la surface conique sont des plans conjugués normaux; ils sont par conséquent séparés harmoniquement par les deux axes focaux réels $f$ et $f'$; ils bissectent donc aussi le dièdre formé par les deux plans tangents. Nous avons ainsi ce théorème (comp. page 165) :

*Tout plan tangent à une surface conique du second ordre fait des angles égaux avec les deux plans qui joignent son rayon de contact aux axes focaux réels de la surface.*

Soient $g$ le rayon symétrique de $f$ par rapport à l'un des deux plans tangents qui se coupent suivant un rayon $t$, et $g'$ le symétrique de $f'$ par rapport à l'autre plan tangent; les plans $\overline{tg}$ et $\overline{tf'}$ font entre eux le même angle que les plans $\overline{tf}$ et $\overline{tg'}$; comme de plus $\angle tg = \angle tf$ et $\angle tf' = tg'$, les deux angles triarètes $gtf'$ et $ftg'$ sont congruents et peuvent être amenés à se superposer par rotation autour de leur arête commune $t$. Les angles des faces $gf'$ et $fg'$ sont donc égaux. L'un d'eux change seulement de position, mais pas de grandeur quand l'un des deux plans tangents se déplace en roulant sur la surface. Il en résulte que :

*Les rayons symétriques d'un axe focal* f *par rapport à tous les plans tangents d'une surface conique du second ordre sont situés sur un cône de révolution qui a l'autre axe focal* f' *pour axe de révolution.*

D'après le théorème précédent, chacun de ces rayons symétriques

doit se trouver dans un même plan avec l'autre axe focal et le rayon de contact du plan tangent correspondant ; et comme le rayon de contact fait avec le premier axe focal le même angle qu'avec son symétrique, il s'ensuit encore que :

*La somme ou la différence des deux angles, qu'un rayon quelconque de la surface conique fait avec les deux axes focaux réels* f *et* f', *est constante.*

Suivant que nous considérerons l'un ou l'autre des deux angles adjacents que le rayon fait avec l'un des axes focaux, nous aurons une somme ou une différence constante. Il découle de ce théorème que la surface intercepte un plus grand angle sur son premier plan de symétrie $\overline{ff'}$ que sur le troisième.

Un plan normal à l'axe focal *f* coupera la surface suivant une courbe du second ordre, dont un foyer sera situé sur *f*; car deux rayons quelconques passant par ce point et conjugués l'un à l'autre par rapport à la courbe sont perpendiculaires entre eux, puisqu'ils sont situés dans deux plans conjugués normaux de *f*. Nous pouvons, d'après cela, étendre immédiatement aux surfaces coniques du second ordre deux théorèmes démontrés antérieurement (pages 167 et 172) et les énoncer ainsi :

*Si l'on joint un axe focal* f *d'une surface conique du second ordre aux rayons de contact et à la droite d'intersection de deux plans tangents, le plan déterminé par* f *et par cette dernière droite fait des angles égaux avec les deux précédents.*

*Les faisceaux projectifs de rayons suivant lesquels deux plans tangents d'une surface conique du second ordre sont coupés par tous les autres plans tangents de cette surface sont projetés d'un axe focal* f *suivant deux faisceaux de plans égaux et concordants.*

Nous allons nous occuper maintenant des *plans cycliques* de la surface conique du second ordre, plans qui à un certain point de vue sont réciproques aux axes focaux et qu'on peut définir comme il suit :

*On appelle* plan cyclique *d'une surface conique du second ordre le plan de tout faisceau de rayons du premier ordre tel que deux quelconques de ses rayons perpendiculaires entre eux soient conjugués par rapport à la surface.*

On ajoute à ces plans l'épithète de *cycliques*, parce que toute courbe d'intersection de la surface par un plan parallèle est un cercle ; en effet, le centre d'une pareille courbe est situé sur le rayon polaire du plan cy-

clique et deux diamètres conjugués quelconques de la courbe sont perpendiculaires entre eux, parce qu'ils sont parallèles à deux rayons conjugués du faisceau de rayons dont il est question dans la définition. D'après cela, un plan de symétrie n'est en même temps plan cyclique de la surface que si celle-ci est de révolution et que si son axe de révolution est l'axe principal normal à ce plan de symétrie. Les surfaces coniques de révolution, que nous exclurons encore ici de nos considérations, n'ont du reste que ce seul plan cyclique.

Un plan cyclique ne peut avoir aucun rayon réel commun avec la surface, car sans cela un rayon réel du plan serait conjugué à lui-même. Deux plans cycliques réels se coupent suivant un axe principal c'est-à-dire suivant une droite à laquelle un rayon de chaque plan est conjugué et normal. D'une manière générale, nous appellerons *rayons conjugués normaux* deux rayons de la gerbe, dont fait partie la surface conique, qui sont perpendiculaires l'un à l'autre et conjugués par rapport à la surface ; il est facile de voir que tout rayon $l$ de la gerbe (les trois axes principaux exceptés) n'a qu'un seul rayon conjugué normal $l'$. En effet $l'$ est l'intersection du plan polaire et du plan normal du rayon $l$.

Si maintenant le rayon $l$ de la gerbe décrit un faisceau quelconque de rayons $\varepsilon$, son plan polaire et son plan normal décrivent en même temps deux faisceaux de plans projectifs à $\varepsilon$ et l'on en déduit que :

*Si un rayon* l *de la gerbe se meut dans un plan* $\varepsilon$, *son rayon conjugué normal* l' *décrit en général une surface conique du second ordre qui passe par le rayon polaire et par le rayon normal du plan* $\varepsilon$, *et qui contient de plus les trois axes principaux de la surface conique donnée. Le rayon* l' *ne décrit un faisceau de rayons du premier ordre* $\varepsilon'$ *que si* $\varepsilon$ *passe par l'un des trois axes principaux, et dans ce cas* $\varepsilon'$ *contient aussi cet axe.*

En effet, dans ce cas particulier les deux faisceaux de plans projectifs à $\varepsilon$ sont perspectifs. La relation qui existe entre les rayons conjugués normaux de la gerbe est donc involutive et du second degré ; comme celle qui lie les plans conjugués normaux, elle aurait pu être employée pour déterminer les axes principaux de la surface conique du second ordre. Elle conduit à tous les plans cycliques des surfaces coniques, c'est-à-dire à tous les plans $\varepsilon$ qui coïncident avec leurs conjugués $\varepsilon'$.

Les plans passant par un axe principal $a$ sont accouplés entre eux

de telle sorte que deux rayons conjugués normaux $l$ et $l'$ sont toujours situés dans deux plans homologues $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ et les deux faisceaux $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ de rayons conjugués normaux sont projectifs entre eux, ainsi que cela résulte de ce qui précède. Ces faisceaux sont projetés d'un second axe principal $b$ suivant deux faisceaux projectifs de plans qui sont en involution; en effet leurs plans homologues sont deux à deux dans la même relation réciproque que les plans $\varepsilon$ et $\varepsilon'$. Les deux plans doubles de ce faisceau involutif $b$ sont les plans cycliques de la surface conique donnée du second ordre, comme on le voit immédiatement.

Par chacun des trois axes principaux passent donc deux plans cycliques de la surface conique; pour deux de ces axes, ils sont imaginaires conjugués, et c'est seulement suivant le troisième axe que se coupent deux plans cycliques réels $\varkappa$ et $\varkappa'$. En effet, s'il y en avait plus de deux, s'il existait par exemple trois plans cycliques réels, ils devraient se couper suivant les trois axes principaux et coïncider avec les plans de symétrie, ce qui est impossible d'après les remarques précédentes. Donc :

*Il existe deux faisceaux de plans parallèles qui coupent, suivant des cercles, une surface conique quelconque du second ordre; ces faisceaux passant par les plans cycliques réels $\varkappa$ et $\varkappa'$ de la surface.*

Les plans $\varkappa$ et $\varkappa'$ séparent harmoniquement deux axes principaux et en général deux rayons conjugués normaux; en effet ces rayons sont situés dans deux plans conjugués du faisceau involutif dont $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont les éléments doubles. Par conséquent, deux des trois plans de symétrie de la surface bissectent les dièdres formés par les plans cycliques $\varkappa$ et $\varkappa'$, et le troisième est normal à ces derniers.

Comme les bissectrices des angles que font entre eux deux rayons quelconques de la surface conique sont deux rayons conjugués normaux et que, par suite, ils sont harmoniquement séparés par $\varkappa$ et $\varkappa'$, on a ce théorème :

*Si l'on coupe le plan qui joint deux rayons quelconques de la surface par les plans cycliques, l'une des droites d'intersection fait avec l'un des rayons le même angle que l'autre rayon avec l'autre droite d'intersection.*

Il est également facile de démontrer que :

*L'angle plan que les plans cycliques déterminent sur un plan tangent quelconque de la surface conique est bissecté par le rayon de contact.*

Deux rayons conjugués normaux sont harmoniquement séparés par les plans tangents de deux rayons quelconques de la surface qui sont situés dans un même plan avec l'un d'eux. On en déduit sans peine cette conséquence :

*Si l'on cherche les intersections d'un plan cyclique avec deux plans tangents de la surface conique et avec le plan qui joint leurs rayons de contact, cette dernière droite d'intersection fait des angles égaux avec les deux premières.*

Considérons encore un troisième plan tangent mobile, nous pouvons conclure (par analogie avec les théorèmes de la page 172) que :

*Les plans, qui projettent un rayon mobile d'une surface conique du second ordre de deux rayons fixes de cette surface, déterminent sur chacun des plans cycliques des angles de grandeur constante. Par conséquent, deux faisceaux projectifs de rayons, qui engendrent la surface conique, sont coupés par chaque plan cyclique suivant deux faisceaux de rayons projectifs et égaux.*

La plupart de ces théorèmes sur les plans cycliques, et bien d'autres encore, peuvent se déduire de théorèmes analogues sur les axes focaux des surfaces coniques du second degré, au moyen de gerbes de rayons rapportées rectangulairement les unes aux autres. Nous dirons que deux gerbes S et $S_1$ sont rapportées rectangulairement l'une à l'autre, quand à chaque plan de l'une on fait correspondre le rayon de l'autre qui lui est normal, et quand par suite à chaque faisceau de plans de l'une correspond dans l'autre un faisceau de rayons qui lui est projectif et dont le plan est normal à l'axe du faisceau de plans. A quatre plans harmoniques de l'un des faisceaux correspondent donc quatre rayons harmoniques de l'autre, qui sont respectivement normaux à ces plans. Deux éléments de la gerbe S font entre eux le même angle que les éléments correspondants de la gerbe $S_1$.

Aux rayons d'une surface conique du second ordre dans la gerbe S correspondent ainsi les plans tangents d'une surface conique du second ordre dans $S_1$ ; si nous imaginons que l'une d'elles soit engendrée par deux faisceaux projectifs de plans, l'autre se présentera comme la forme à laquelle donnent naissance deux faisceaux projectifs de rayons. Deux rayons harmoniquement séparés par l'une auront pour correspondants dans l'autre deux plans harmoniquement séparés par deux plans tangents à cette autre surface, d'où il résulte qu'en général deux éléments conjugués ont toujours pour correspondants deux éléments con-

jugués. A deux rayons ou plans normaux l'un à l'autre et conjugués par rapport à l'une des surfaces correspondent, d'après cela, deux plans ou rayons normaux l'un à l'autre et conjugués par rapport à l'autre surface. De même à chaque plan cyclique d'une de ces surfaces coniques correspond un axe focal de l'autre et à chaque plan de symétrie un axe principal. Toute propriété des axes focaux peut donc se traduire immédiatement en une propriété correspondante des plans cycliques d'une surface conique du second ordre; par exemple, nous obtenons de la sorte ce théorème (comp. page 192) :

*La somme ou la différence des deux angles qu'un plan tangent quelconque de la surface fait avec les deux plans cycliques réels est constante.*

Étant données deux surfaces coniques du second ordre ainsi rapportées rectangulairement l'une à l'autre, à toute portion de plan limitée par l'une d'elles correspond un rayon limité par l'autre. Si donc le plus grand de tous les angles plans compris à l'intérieur de la deuxième surface est celui qui contient les deux axes focaux $f, f'$, le plus grand des angles dièdres compris dans la première est celui qui contient ses plans cycliques réels. Comme par le fait une surface conique du second ordre intercepte un plus grand angle sur son premier plan de symétrie $\overline{ff'}$ que sur son troisième (page 192), nous trouvons que :

*Les plans cycliques réels $\varkappa$ et $\varkappa'$ d'une surface conique du second ordre se coupent suivant le troisième axe principal qui est situé dans un même plan avec le second axe principal et les deux axes focaux réels, mais qui est en dehors de la surface.*

Les deux premiers plans de symétrie de la surface conique bissectent donc le dièdre formé par $\varkappa$ et $\varkappa'$, tandis que le troisième plan de symétrie est normal à ces deux plans $\varkappa$ et $\varkappa'$.

# PROBLÈMES DE CONSTRUCTION ET THÉORÈMES.

---

### FORMES HARMONIQUES

1. Construire le quatrième élément harmonique à trois éléments d'une forme fondamentale uniforme (pages 40 et 45).

2. Par le point d'intersection (inaccessible) de deux droites mener une troisième droite qui passe par un point donné de leur plan (pages 3 et 43).

3. Diviser en deux parties égales un segment AC, sans se servir du compas, mais connaissant une parallèle à $\overline{AC}$ (page 45).

4. On donne dans un plan un parallélogramme et un segment quelconque AC; on demande de diviser AC en deux parties égales, sans se servir du compas, de mener une parallèle à $\overline{AC}$, de construire un segment égal à $n$ fois AC ou de diviser AC en $n$ parties égales (page 45).

5. Soient A,B,C,D quatre points harmoniques; sur AC comme diamètre on décrit un cercle dont S est un point quelconque; l'arc de cercle qui sous-tend l'angle BSD est bissecté par A ou C (page 45).

6. Entre les côtés $a,b$ d'un angle mener une droite AB, qui soit bissectée par un point donné P ou qui soit telle que le point A soit le milieu du segment PB (page 45).

---

### PROJECTIVITÉ DES FORMES FONDAMENTALES UNIFORMES.

7. Deux ponctuelles $u,u_1$ sont rapportées perspectivement l'une à l'autre, puis amenées en position oblique, c'est-à-dire déplacées d'une

manière quelconque l'une par rapport à l'autre. Tracer les droites qui joignent leurs points homologues, c'est-à-dire le faisceau de rayons du second ordre engendré par $u$ et $u_1$.

8. Deux faisceaux de rayons sont rapportés perspectivement l'un à l'autre, puis amenés en position oblique, c'est-à-dire déplacés d'une manière quelconque l'un par rapport à l'autre. Tracer la courbe du second ordre qu'ils engendrent et sur laquelle sont situés les points d'intersection de leurs rayons homologues.

9. Deux ponctuelles $u$ et $u_1$ sont perspectives à une troisième ponctuelle $u_2$. Tracer le faisceau de rayons du second ordre qu'elles engendrent.

10. Deux faisceaux de rayons S et $S_1$ sont perspectifs à un troisième $S_2$. Tracer la courbe du second ordre qu'ils engendrent.

11. On donne trois couples de points correspondants A et $A_1$, B et $B_1$, C et $C_1$ de deux ponctuelles projectives $u$ et $u_1$ ; construire le point $D_1$ de $u_1$ qui correspond au point D de $u$ (pages 60 et 72) et, en général, tracer le faisceau de rayons du premier ou du second ordre engendré par $u$ et $u_1$. Résoudre la première partie du problème quand $u$ et $u_1$ sont situées sur la même droite.

12. Énoncer et résoudre le problème réciproque du précédent (page 72).

13. Si les sommets d'un hexagone simple $AC_1BA_1CB_1$ sont alternativement situés sur deux droites $u$ et $u_1$, par exemple A,B,C sur $u$ et $A_1$, $B_1$, $C_1$ sur $u_1$, les points d'intersection $A_2$, $B_2$, $C_2$ des trois couples de côtés opposés sont aussi situés sur une même droite $u_2$ (page 85).

La figure qui élucide ce théorème, de même que la figure 3 dont il a été question (page 5), mérite de fixer l'attention à cause de sa symétrie; en effet, elle se compose de neuf points, situés trois à trois sur neuf droites, et ces neuf droites passent trois à trois par ces neuf points. La même figure s'applique aussi au théorème réciproque. Comment s'énonce-t-il ?

14. Étant donnés deux faisceaux perspectifs de rayons, construire dans l'un deux rayons rectangulaires qui aient pour correspondants dans l'autre faisceau deux rayons également rectangulaires. De la solution de ce problème il résulte que :

15. Dans deux faisceaux projectifs de rayons, dont les centres ne sont pas à l'infini, il y a toujours deux angles droits qui se correspondent.

16. Étant donnés un faisceau de rayons S et un faisceau de plans $u$ en perspective, l'axe de ce dernier faisceau est perpendiculaire à l'un des deux rayons de S qui sont rectangulaires et auxquels correspondent dans $u$ deux plans rectangulaires entre eux. En partant de cette remarque, on trouve que les deux problèmes suivants ont chacun deux solutions :

17. Étant donnés un faisceau de rayons S et un faisceau de plans $u$ qui lui est projectif, on demande :

1° De mener par un point quelconque un plan qui coupe le faisceau de plans $u$ suivant un faisceau de rayons congruent avec S ;

2° De déterminer un axe d'où le faisceau S soit projeté suivant un faisceau de plans congruent avec $u$.

18. Placer un faisceau de rayons S et un faisceau de plans $u$ dans une position relative telle que trois plans donnés $\alpha,\beta,\gamma$ de $u$ passent par trois rayons donnés $a,b,c$ de $s$ (problème 17).

19. Couper la surface d'un prisme triangulaire $\alpha\ \beta\ \gamma$ suivant un triangle $a\ b\ c$, semblable à un triangle donné $a_1 b_1 c_1$. Ce problème peut se ramener au précédent.

---

## COURBES, FAISCEAUX ET SURFACES CONIQUES DU SECOND ORDRE.

20. On donne cinq points d'une courbe du second ordre, ou quatre points et la tangente en l'un d'eux, ou trois points et les tangentes en deux d'entre eux ; construire la courbe au moyen de faisceaux projectifs de rayons (pages 72 et 74).

21. On donne cinq rayons d'un faisceau de rayons du second ordre, ou quatre rayons et le point de contact de l'un d'eux, ou trois rayons et les points de contact de deux d'entre eux ; construire le faisceau au moyen de ponctuelles projectives (pages 72 et 74).

22. Résoudre les trois problèmes 20 au moyen du théorème de Pascal et, en particulier,

1° Trouver le second point de la courbe, qui se trouve sur une droite quelconque passant déjà par un point connu de cette courbe ;

2° Mener la tangente en un point donné ou construit de la courbe (page 83).

23. Résoudre les trois problèmes 21 au moyen du théorème de Brianchon, et, en particulier :

1° Par un point quelconque d'un rayon déjà connu mener le second du faisceau du second ordre;

2° Déterminer le point de contact d'un rayon déjà donné ou qu'on construit (page 83).

Remarques. *Non seulement les problèmes 22 et 23 renferment un grand nombre de problèmes particuliers, mais de plus chacun d'eux peut se résoudre de différentes manières, puisqu'on peut y utiliser non seulement les théorèmes sur l'hexagone, mais encore ceux relatifs aux pentagones, aux quadrilatères et aux triangles. Comme cas particuliers des problèmes 22 et 23, nous indiquons les trois suivants :*

24. Construire une hyperbole dont on donne les deux asymptotes et un point ou une tangente.

25. Construire une parabole, connaissant quatre de ses tangentes, ou trois tangentes et le point de contact de l'une d'elles, ou deux tangentes et leurs points de contact.

26. Construire une hyperbole, connaissant trois points de la courbe et la direction de ses asymptotes.

Quelle est la dépendance des problèmes 24, 25, 26 avec les problèmes 20 et 21?

27. Démontrer que le cercle est une courbe du second ordre, et que ses tangentes forment un faisceau du second ordre. Sous quel angle voit-on du centre le segment d'une tangente mobile compris entre deux tangentes données?

28. Une ponctuelle $u$ et un faisceau S de rayons du premier ordre sont situés dans un même plan et rapportés projectivement l'un à l'autre. Les perpendiculaires abaissées de $u$ sur les rayons correspondants de S enveloppent une parabole, quand elles ne passent pas toutes par un même point (voir page 93). La parabole est aussi tangente à $u$.

29. Lorsqu'un angle de grandeur donnée se meut dans un plan de telle sorte que son sommet décrive une droite fixe $u$ et que l'un de ses côtés pivote autour d'un point fixe, l'autre côté enveloppe une parabole; cette courbe est tangente à $u$.

30. Un triangle variable $ASA_1$ se meut dans un plan de telle manière que les extrémités A et $A_1$ de sa base décrivent deux droites fixes $u$ et $u_1$ et que l'angle au sommet S pivote autour d'un point fixe sans changer de grandeur. La droite $\overline{AA_1}$ enveloppe une courbe du second degré tangente à $u$ et $u_1$. (D'après les théorèmes de la page 172. S est un foyer de cette courbe.)

31. La base $AA_1$ d'un triangle variable $APA_1$ est donnée de grandeur et glisse sur un droite fixe $u$, tandis que ses deux autres côtés $\overline{PA}$ et $\overline{PA_1}$ pivotent autour de deux points fixes S et $S_1$. Le sommet P décrit une hyperbole, qui passe par S et $S_1$ et qui a la droite $u$ pour asymptote.

32. Les sommets de deux angles $ab$ et $a_1b_1$ de grandeur donnée, situés dans un même plan, pivotent autour de deux points fixes S et $S_1$ tandis que le point de rencontre $aa_1$ de deux de leurs côtés décrit une droite; chacun des trois autres points $bb_1$, $ab_1$, $a_1b$ où se coupent leurs côtés se meut sur une courbe du second ordre qui passe par S et $S_1$ (Description organique des coniques de Newton).

33. D'un point quelconque P on abaisse des perpendiculaires sur les plans d'un faisceau de plans $a$ ; leurs pieds sont situés sur un cercle qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée de P sur $a$ et dont le plan est perpendiculaire à $a$. On en conclut que :

34. Si par les côtés $a,a_1$ d'un angle aigu on mène tous les couples possibles de plans perpendiculaires entre eux, ces plans se coupent suivant les rayons d'une surface conique du second ordre qui passe par $a$ et $a_1$. Tout plan normal à $a$ ou $a_1$ coupe cette surface suivant un cercle, et tout plan normal à $aa_1$ la coupe suivant une courbe du second ordre qui a l'un de ses axes dans le plan $aa_1$

35. On obtient encore la surface conique dont il vient d'être question au moyen d'un plan $\alpha$ perpendiculaire à $a_1$ et passant par le point $aa_1$. En effet, si un angle droit, ayant son sommet en $a\alpha$, se meut de telle sorte que son plan passe toujours par la droite $a$ et qu'un de ses côtés décrive le plan $\alpha$, son autre côté décrira la surface conique du second ordre dont il s'agit.

36. Si deux faisceaux de rayons concentriques, dont les plans se coupent obliquement, sont rapportés l'un à l'autre de telle manière que leurs rayons homologues soient perpendiculaires deux à deux, ils engendrent un faisceau de plans du second ordre. Ou en d'autres termes : si un angle droit pivote autour de son sommet et que ses deux côtés se meuvent dans deux plans fixes, son plan enveloppe une surface conique du second ordre tangente aux deux plans fixes.

37. D'un point quelconque on abaisse des perpendiculaires sur tous les plans tangents d'une surface conique du second ordre; ces droites sont elles-mêmes situées sur une surface conique du second ordre. En effet, les plans tangents à la première surface sont engendrés par deux

faisceaux projectifs de rayons, et de ces derniers on peut immédiatement déduire deux faisceaux projectifs de plans du premier ordre qui engendrent la seconde surface.

38. Le lieu géométrique d'un point S d'où un quadrilatère plan KLMN est projeté suivant un faisceau harmonique de rayons S (KLMN) est une courbe du second ordre circonscrite au quadrilatère (page 77). Si l'on construit le rayon $n$ conjugué harmonique à $\overline{NK}$, $\overline{NL}$ et $\overline{NM}$, il est tangent en N à la courbe en question et l'on peut, d'après cela, la tracer facilement.

39. Le lieu géométrique d'une droite $u$ qui est coupée par un quadrilatère plan $klmn$ suivant une ponctuelle harmonique $u(klmn)$ est un faisceau de rayons du second ordre auquel appartiennent les quatre droites $k$, $l$, $m$, $n$ (page 77). Le point du contact du rayon $n$ est harmoniquement séparé de $nl$ par $nk$ et $nm$.

40. Nous donnerons, avec Von Staudt, le nom de *groupe* ou *homozygie* (*Wurf*) [1] à un ensemble formé de quatre éléments A, B, C, D d'une forme fondamentale uniforme qui se suivent dans un ordre déterminé. Deux groupes ABCD et $abcd$ seront dits *projectifs* quand les deux formes fondamentales auxquelles ils appartiennent sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'aux éléments A, B, C, D de l'une correspondent les éléments $a$, $b$, $c$, $d$ de l'autre.

Les théorèmes 38 et 39 peuvent se généraliser comme il suit :

41. Soit $abcd$ un groupe donné (composé par exemple de quatre rayons d'un faisceau du premier ordre) ; tous les points S qui projettent un quadrilatère plan quelconque KLMN suivant un groupe S (KLMN) projectif à $abcd$, sont situés sur une courbe du second ordre circonscrite au quadrilatère. Comment construit-on la tangente au point N? (Voir n° 38.)

42. Soit ABCD un groupe donné ; toutes les droites $u$ qui sont coupées par un quadrilatère plan $klmn$ suivent un groupe $u$ ($klmn$) projectif à ABCD, sont tangentes à une courbe du second ordre inscrite au quadrilatère. Comment construit-on le point de contact de $n$ avec cette courbe? (Voir n° 39.)

43. Quand deux triangles ABC et $D_1E_1F_1$ sont inscrits dans une courbe $k^2$ du second ordre, ils sont aussi circonscrits à une même

1. Cette expression, *homozygie*, est due à M. Stéphanos.

courbe du second ordre et réciproquement. En effet les groupes A ($BCE_1F_1$) et $D_1$ ($BCE_1F_1$) sont projectifs, puisqu'ils se correspondent dans les faisceaux projectifs de rayons A et $D_1$ qui engendrent la courbe $k^2$. Soit maintenant $B_1C_1E_1F_1$ la section du faisceau A($BCE_1F_1$) par la droite $E_1F_1$, et BCEF celle du faisceau $D_1$($BCE_1F_1$) par la droite BC; $B_1C_1E_1F_1$ et BCEF sont aussi des groupes projectifs; par suite les six côtés des triangles à savoir : $\overline{BC}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{E_1F_1}$, $\overline{EE_1}$ et $\overline{FF_1}$ sont bien six rayons d'un faisceau du second ordre.

La réciproque de ce théorème se démontre d'une manière analogue.

---

### PÔLES ET POLAIRES ; DIAMÈTRES DES COURBES DU SECOND ORDRE.

44. Tracer la figure polaire, par rapport à une courbe du second ordre, d'une figure donnée quelconque, c'est-à-dire construire les polaires de ses points et les pôles de ses droites (page 96). Comme exemples, prendre un polygone et une courbe quelconque.

45. D'un point quelconque mener des tangentes à une courbe donnée du second ordre sans se servir du compas (page 96).

46. Deux tangentes mobiles d'une courbe du second ordre se meuvent de manière que

la droite qui joint leurs points de contact enveloppe une deuxième courbe du second ordre ; leur point d'intersection décrit alors une troisième courbe du second ordre.

que leur point d'intersection décrive une deuxième courbe du second ordre; la droite qui joint leurs points de contact enveloppe une troisième courbe du second ordre (page 101).

47. Déterminer au moyen de constructions linéaires la polaire d'un point ou le pôle d'une droite, par rapport à une courbe du second ordre définie par cinq conditions [par exemple, par cinq points ou cinq tangentes], mais qui n'est pas tracée. (Voir nos 20-25.)

48. Une courbe du second ordre est donnée par cinq conditions, par exemple, par quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles, ou par trois points et les tangentes en deux d'entre eux. Construire un nombre quelconque de diamètres et le centre de la courbe (n° 47).

49. Dans une courbe donnée du second ordre, mener une corde qui soit divisée en deux parties égales par un point donné P.

50. Toutes les cordes d'une courbe du second ordre, qui sont bissectées par une corde donnée quelconque, enveloppent une parabole (page 95).

51. On donne deux couples de diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole et un point ou une tangente; construire autant de points ou de tangentes de la courbe qu'on voudra (pages 110 et 111).

52. On donne deux points ou deux tangentes et un couple de diamètres conjugués d'une courbe du second ordre; ou bien trois points ou trois tangentes et le centre; construire la courbe (pages 110 et 111).

53. Construire une parabole, connaissant deux points ou deux tangentes et la direction des diamètres (page 109), ou bien deux points ou deux tangentes et l'axe.

54. Une parabole est définie par quatre tangentes; construire son axe.

55. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant trois points ou trois tangentes et un axe.

56. Construire une hyperbole, connaissant ses asymptotes et un point ou une tangente (pages 114 et 115).

57. Tracer les axes d'une courbe du second degré donnée (page 113).

58. D'un point S on abaisse des perpendiculaires sur tous les diamètres d'une courbe $k^2$ du second ordre; ces perpendiculaires coupent les diamètres conjugués respectifs en des points appartenant à une hyperbole équilatère qui passe par S et par le centre de $k^2$, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de $k^2$. Les pieds de toutes les normales à $k^2$ passant par S sont situés sur cette hyperbole. D'un point pris dans le plan d'une courbe quelconque du second ordre, on ne peut donc mener plus de quatre normales à cette courbe.

59. Soient S et $S_1$ deux points d'une courbe du second ordre, situés sur un diamètre quelconque, et $u$ et $u_1$ deux droites du plan qui sont parallèles à deux diamètres conjugués quelconques de la courbe. Si l'on projette la courbe de S et $S_1$ sur $u$ et $u_1$, on obtient (page 110) deux ponctuelles projectives semblables $u$ et $u_1$ qui sont par suite divisées en parties proportionnelles. Ce théorème sert de base à une construction connue et très simple de l'ellipse ou de l'hyperbole.

60. Si l'on projette en même temps une parabole de l'un de ses points sur un diamètre quelconque $u$ et de son point à l'infini sur une

droite quelconque $u_1$, on obtient sur $u$ et $u_1$ deux ponctuelles projectives semblables. On déduit de là une construction très simple de la parabole.

61. Étant données deux courbes du second ordre dans un même plan, tout point A du plan a deux polaires par rapport à ces courbes et nous pouvons faire correspondre le point $A_1$ d'intersection de ces polaires avec le point A. Les deux polaires de $A_1$ passent alors par le point A et les points homologues, comme A et $A_1$, sont conjugués deux à deux par rapport aux deux courbes. Nous pouvons de même faire correspondre deux à deux les rayons du plan qui sont conjugués par rapport aux deux courbes du second ordre. Je dis que (voir page 101) :

Aux points d'une droite correspondent en général ceux d'une courbe du second ordre. Toutes les courbes du second ordre qui correspondent de la sorte aux droites du plan, ont au moins un point commun et au plus trois points U, V, W communs. Les deux polaires de chaque point commun se confondent, de sorte qu'à ce point correspondent tous les points d'une droite.

Aux rayons passant par un point correspondent en général les tangentes d'une courbe du second ordre. Toutes les courbes du second ordre dont les tangentes correspondent ainsi aux rayons passant par chaque point, ont au moins une tangente commune et au plus trois tangentes $u$, $v$, $w$ communes. Les deux pôles de chaque tangente commune se confondent, de sorte qu'à cette tangente correspondent tous les rayons passant par un point.

Si les courbes données du second ordre sont circonscrites à un quadrilatère, les trois couples de côtés opposés de ce dernier se coupent aux points U, V, W. Ces trois points sont les sommets, et les droites $u$, $v$, $w$ sont les côtés d'un triangle polaire commun aux deux courbes.

62. Dans le plan d'une courbe $k^2$ du second ordre, on peut faire correspondre deux à deux les rayons qui sont rectangulaires et qui en même temps sont conjugués par rapport à $k^2$. Aux rayons passant par un point propre S, qui n'est situé sur aucun des axes de la courbe (page 165), correspondent alors les tangentes d'une parabole (n° 28) qui est tangente à la polaire du point S et aux axes de la courbe $k^2$. Toute tangente commune à la parabole et à la courbe $k^2$ sera tangente à cette

dernière au pied de la normale abaissée de S sur $k^2$ (voir n° 58).

63. Dans une gerbe de rayons, on donne une surface conique $k^2$ du second ordre et un rayon déterminé $u$ ; on peut faire correspondre deux à deux les rayons $a$, $a_1$ qui sont conjugués par rapport à $k^2$ et qui sont dans un même plan avec $u$. Si $a$ décrit un plan $\alpha$, $a_1$ décrit une surface conique du second ordre, qui passe par $u$ et par le rayon polaire de $\alpha$ et qui a en commun avec $k^2$ tous les rayons de $k^2$ situés dans $\alpha$ et dans le plan polaire de $u$ (voir page 103). Comment s'énonce le théorème réciproque ?

64. Les relations géométriques établies dans les n$^{os}$ 61, 62, 63 sont des cas de la *correspondance géométrique du second ordre*, dont il sera plus longuement question dans la seconde partie de cet ouvrage ; elles peuvent être employées pour transformer des formes simples en de plus compliquées. Parmi celles-ci, la transformation connue sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques* mérite une place à part ; elle a la plus grande importance non seulement pour la géométrie synthétique, mais aussi pour certaines recherches de la physique mathématique et de la théorie des fonctions. Comme on le verra bientôt, cette transformation n'est qu'un cas très particulier d'une correspondance géométrique du second degré indiquée précédemment (page 103).

---

TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES[1].

65. Soit un cercle de rayon $r$ et de centre M ; nous considérerons deux points P, $P_1$ du plan comme rapportés l'un à l'autre, quand ils seront situés sur une droite passant par M et conjugués par rapport au cercle. P et $P_1$ sont alors harmoniquement séparés par les extrémités d'un diamètre du cercle et l'on a par conséquent (page 48).

$$MP.MP_1 = r^2, \quad \text{ou} \quad MP = \frac{r^2}{MP_1}.$$

Le produit des rayons vecteurs de deux points correspondants est donc constant, ou le rayon vecteur d'un point quelconque P est inver-

1. Pour une étude plus complète de cette théorie voir l'ouvrage de GEISER, *Einleitung in die synthetische Geometrie*. Leipzig, 1869, pages 159-183.

sement proportionnel à celui de son point correspondant $P_1$. C'est pour cette raison que Mr Liouville [1] a donné à cette transformation le nom de *principe des rayons vecteurs réciproques*. M est dit le *centre* et $r^2$ la *puissance* de la transformation par rayons vecteurs réciproques. A chaque point situé à l'intérieur du cercle correspond un point extérieur et à chaque point situé à l'infini dans le plan correspond le centre M. Les points de la circonférence du cercle coïncident avec leurs correspondants.

66. La polaire d'un point P par rapport au cercle donné est la perpendiculaire à M P qui passe par le point correspondant $P_1$. On trouvera donc les points $P_1$, $Q_1$, $R_1$....... qui correspondent aux points P, Q, R....... d'une droite quelconque $g$ en abaissant du pôle G de $g$ des perpendiculaires sur les droites $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$........ Il résulte de là que :

*A une droite quelconque* g *correspond une circonférence de cercle* $\gamma$ *dont le diamètre perpendiculaire à* g *est limité par M et par le pôle G de la droite.*

Réciproquement, à toute circonférence de cercle $\gamma$ passant par le point M correspond une droite $g$ ; en effet, la droite qui joint deux points A, B, dont les correspondats $A_1$, $B_1$ sont situés sur $\gamma$, a pour correspondante une circonférence de cercle qui passe par $A_1$, $B_1$ et M et qui par conséquent est identique avec $\gamma$.

C'est en raison de cette propriété que Mobius [2] a donné à la correspondance du second degré dont il s'agit le nom de *correspondance circulaire*.

67. Par le centre M de transformation menons une parallèle à la droite $g$ ; elle est tangente en M au cercle $\gamma$ correspondant à $g$, parce qu'elle est comme $g$ perpendiculaire au diamètre MG de $\gamma$. Nous en concluons que :

*Deux droites quelconques* f *et* g *du plan se coupent sous le même angle que les circonférences* $\varphi$ *et* $\gamma$ *qui leur correspondent.*

Deux triangles infiniment petits qui se correspondent ont donc leurs angles égaux et sont semblables ; ou en d'autres termes :

*A l'aide des rayons vecteurs réciproques, le plan est représenté ou*

---

1. LIOUVILLE. *Journal de mathématiques*, 1re série, tome XII, page 265.

2. MÖBIUS. *Mémoires de la Société royale des sciences de Saxe*. Leipzig, 1855 tome II, pages 531-595, et comptes rendus des séances de la même Société, 1853, pages 14-24.

*transformé sur lui-même d'une manière conforme, de telle sorte que les portions infiniment petites de deux figures correspondantes sont semblables entre elles.*

Ce théorème ne cesse d'être applicable que pour la région infiniment petite du plan qui avoisine le point M.

68. Une droite pouvant être considérée comme un cercle de rayon infiniment grand, le théorème qui exprime qu'à tout cercle passant par M correspond une droite, et réciproquement (n° 66), peut être regardé comme un cas particulier de la proposition suivante :

*Toute circonférence de cercle $\varkappa$ est transformée par rayons vecteurs réciproques en une circonférence de cercle $\varkappa_1$; M est un centre de similitude de $\varkappa$ et $\varkappa_1$.*

Pour démontrer cette proposition plus générale, prenons sur $\varkappa$ un point fixe P et un point mobile Q; désignons par $P_1$ et $Q_1$ les deux points qui leur correspondent et soient $P'$ et $Q'$ les points où les sécantes MP et MQ rencontrent respectivement $\varkappa$ pour la seconde fois. Le théorème sur les segments qu'un cercle intercepte sur des sécantes nous donne :

$$MP.MP' = MQ.MQ'.$$

Mais en vertu du principe des rayons vecteurs réciproques, on a :

$$MP.MP_1 = MQ.MQ_1 = r^2.$$

Par suite :

$$\frac{MP'}{MP_1} = \frac{MQ'}{MQ_1}$$

et les triangles $MP'Q'$ et $MP_1Q_1$ sont semblables (ce qui peut se représenter par $\Delta\, MP'Q' \backsim \Delta\, M\, P_1Q_1$, le signe $\backsim$ indiquant la similitude).

Si donc Q, et par suite $Q'$, parcourt la circonférence $\varkappa$, $Q_1$ décrit une courbe semblable à $\varkappa$ et semblablement placée, c'est-à-dire une circonférence de cercle $\varkappa_1$. M est le centre de similitude extérieure, et $Q'$ et $Q_1$ de même que $P'$ et $P_1$ sont des points *homologues* des deux circonférences $\varkappa$ et $\varkappa_1$; les points correspondants deux à deux, comme Q et $Q_1$ ou P et $P_1$ sont donc situés *inversement* par rapport à M sur $\varkappa$ et $\varkappa_1$.

69. *Toute circonférence de cercle, qui passe par un couple de points correspondants $P, P_1$, se correspond à elle-même, et elle coupe orthogo-*

*nalement le premier cercle dont les points coïncident avec leurs correspondants.*

En effet, elle a en commun avec la circonférence qui lui correspond les points $P$, $P_1$, et deux autres points qui se correspondent à eux-mêmes; et elle est tangente en ces deux derniers points à deux droites issues de M, parce que l'on a : $MP.MP_1 = \overline{R}^2$

70. Imaginons qu'on ait dans le plan deux systèmes de points $P, Q, R\ldots$ et $P_1, Q_1, R_1\ldots$ qui se correspondent suivant le principe qu'on vient d'exposer; faisons pivoter l'un des systèmes autour de M, jusqu'à ce que chacun de ses points ait décrit une demi-circonférence, deux points correspondants, tels que P et $P_1$, Q et $Q_1$... seront encore sur une même droite avec M, mais de part et d'autre de ce point et l'on aura, comme précédemment,

$$MP.\,MP_1 = MQ.\,MQ_1 = MR.\,MR_1 = \ldots = \text{constante}.$$

La *puissance*, c'est-à-dire le produit constant des rayons vecteurs des points correspondants aura une valeur non plus positive mais négative. Nous obtenons ainsi un second cas de transformation par rayons vecteurs réciproques, qui se distingue du premier en ce qu'aucun point ne coïncide avec son correspondant. Dans ce cas, le plan est représenté ou transformé sur lui-même d'une manière conforme; à chaque droite correspond un cercle passant par M et, en général, à chaque cercle $\varkappa$ correspond un cercle $\varkappa_1$; le centre M est encore un centre de similitude de deux cercles correspondants, mais c'est le centre de similitude intérieure.

71. Les points de l'espace peuvent aussi être accouplés deux à deux, d'après le principe des rayons vecteurs réciproques, en prenant à volonté le centre M et la valeur positive ou négative de la puissance. Cette généralisation peut s'effectuer de la manière la plus simple en accouplant d'abord deux à deux les points d'un plan quelconque mené par M et en faisant ensuite tourner ce plan autour d'un axe passant par M. Pour chaque position du plan, deux des points correspondants qu'il contient donnent deux points correspondants de l'espace.

72. Faisons tourner le plan autour de la ligne des centres de deux cercles correspondants, qui passe par M; ces deux courbes décrivent deux surfaces sphériques, Donc :

*Toute sphère $\varkappa$ se transforme par rayons vecteurs réciproques en une*

*sphère $\varkappa_1$ et M est un centre de similitude de $\varkappa$ et $\varkappa_1$ (n° 68). A tout plan Γ correspond une sphère passant par M, qui est tangente en M à un plan parallèle à Γ.*

La dernière partie de ce théorème doit être regardée comme un cas particulier de la première; cependant on peut facilement la démontrer séparément. On voit de plus que :

*Deux plans quelconques de l'espace se coupent sous le même angle que les sphères qui leur correspondent.*

Deux tétraèdres infiniment petits, dont les sommets se correspondent, ont d'après cela leurs angles plans et leurs dièdres égaux; comme un peu de réflexion le démontre, ils sont directement semblables, quand la puissance de transformation est négative, et symétriquement semblables, quand elle est positive. Comme leurs faces homologues sont semblables dans tous les cas, on voit que :

*Deux surfaces correspondantes sont représentées d'une manière conforme l'une sur l'autre au moyen des rayons vecteurs réciproques.*

73. D'après cela, pour représenter d'une manière conforme une sphère $\varkappa$ sur un plan quelconque Σ, on choisira pour centre de transformation M l'un des deux points de $\varkappa$ où les plans tangents sont parallèles à Σ et l'on prendra pour puissanee de la transformation le produit des deux segments MP et $MP_1$ que $\varkappa$ et Σ déterminent sur une droite quelconque menée par M. Au plan Σ correspond ainsi une sphère qui a en commun avec la sphère donnée $\varkappa$ les points P et M, ainsi que le plan tangent en M, et qui par suite coïncide avec $\varkappa$. Donc :

*Si l'on projette (stéréographiquement) une sphère $\varkappa$ de l'un de ses points M sur un plan Σ parallèle au plan tangent en M, la surface $\varkappa$ sera représentée d'une manière conforme sur le plan Σ.*

On fait un fréquent usage de cette projection stéréographique de la sphère pour la construction des cartes géographiques. On arrive ainsi à conserver aux angles sur la carte la même grandeur que celle des angles qui leur correspondent à la surface de la terre; les longueurs des différentes lignes de la surface sont au contraire représentées par des longueurs différentes, parce qu'une sphère ne peut se représenter sans défiguration sur un plan.

74. *A un cercle correspond toujours un cercle dans la transformation par rayons vecteurs réciproques.*

En effet, les deux sphères dont les correspondantes passent par le premier cercle se coupent toujours suivant le second. En particulier,

si l'un d'eux passe par M, l'autre dégénère en une droite (n° 68). Les méridiens et les parallèles de la surface de la terre se transforment d'après cela en deux systèmes de cercles orthogonaux ; les projections des méridiens sont des cercles qui se coupent en deux points (les projections du pôle Nord et du pôle Sud) et les projections des parallèles sont des cercles orthogonaux aux précédents qui n'ont aucun point réel commun. Les cercles de la sphère qui passent par M sont les seuls qui soient représentés par des droites sur le plan de projection.

En particulier, si l'on place le centre M de projection au pôle Nord ou au pôle Sud, les parallèles sont représentés par des cercles concentriques et les méridiens par des diamètres de ces cercles.

75. Étant données trois sphères arbitraires, on peut en général construire un cercle qui leur soit orthogonal, c'est-à-dire qui les coupe à angle droit ; ce cercle est situé dans le plan passant par les centres des sphères, et son centre est un point d'égale puissance par rapport à ces trois surfaces. La construction n'est impossible que si un point du plan des centres est situé à l'intérieur ou sur la surface de chacune des trois sphères. Prenons un point de ce cercle pour centre des vecteurs réciproques, le cercle se transformera en une ligne droite et les trois sphères en trois autres sphères qui seront coupées normalement par la droite et dont les centres seront situés sur elle. Donc trois sphères qui ne passent pas par un seul et même point peuvent toujours être transformées par rayons vecteurs réciproques en trois autres sphères dont les centres sont sur une même droite.

76. Un système de sphères, engendré par le mouvement continu d'une sphère variable, est en général enveloppé par une surface F qui possède un système de lignes de courbure circulaire. En effet, chaque sphère du système est tangente à F le long du cercle qui lui est commun avec la sphère immédiatement voisine du système ; et comme les normales à F, aux points de cette ligne, se coupent au centre de la sphère, le cercle en question est une ligne de courbure de F. Si maintenant la surface F est transformée par rayons vecteurs réciproques en une autre surface $F_1$, les lignes de courbure circulaire de F se transforment en lignes de courbure circulaire de $F_1$, puisque $F_1$ est l'enveloppe du système des sphères qui correspondent à celles dont F est l'enveloppe. Donc toutes les surfaces, qui peuvent être transformées en surfaces de révolution par rayons vecteurs réciproques, possèdent comme ces dernières un système de lignes de courbure circulaire.

77. L'une des plus remarquables parmi ces surfaces est la *Cyclide* découverte par Dupin. Elle est l'enveloppe d'une sphère variable qui, dans son mouvement continu, reste constamment tangente à trois sphères données. D'après ce qui précède, on peut facilement établir la théorie de la cyclide en démontrant les théorèmes suivants :

Une cyclide de Dupin se transforme toujours par rayons vecteurs réciproques en une autre cyclide; quand on choisit convenablement le centre de transformation, on peut avoir une cyclide de révolution qui est l'enveloppe d'une sphère tournant autour d'une droite (N° 75). La cyclide possède deux systèmes de lignes de courbure circulaire et est touchée suivant celles-ci par deux systèmes de sphères; les centres de ces sphères et les lignes de courbure sont situés avec deux quelconques de ces dernières dans deux plans de symétrie de la cyclide, normaux entre eux. Chaque sphère d'un système est tangente à toutes les sphères de l'autre système suivant les points d'une ligne de courbure circulaire. Deux lignes de courbure peuvent être réunies par une même sphère, quand elles font partie d'un même système; dans l'autre cas, elles ont un point commun et se coupent à angle droit en ce point.

78. La cyclide n'a aucun point double (réel), ou elle a deux points nodaux où se coupent toutes les lignes de courbure d'un même système, ou bien elle a un point cuspidal où elles sont tangentes entre elles. On obtient des formes essentiellement différentes pour ces trois espèces principales, si l'on transforme la cyclide de révolution correspondante par rayons vecteurs réciproques, en prenant le centre de transformation à l'intérieur de la cyclide de révolution, sur cette surface ou à l'extérieur. Les deux dernières espèces peuvent être représentées d'une manière conforme sur un cône droit ou un cylindre au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Les plans, dans lesquels se trouvent (deux à deux) les lignes de courbure de l'un ou de l'autre système, se coupent suivant une seule et même droite; elle est située dans l'un des plans de symétrie et est perpendiculaire à l'autre.

La cyclide est touchée par deux plans déterminés en tous les points d'un cercle. Si l'on joint par des sphères les lignes de courbure de l'un ou de l'autre système avec un point quelconque M, ces surfaces se coupent toutes suivant un cercle.

Lorsqu'une cyclide s'étend à l'infini (ce qui peut avoir lieu pour les trois genres de ces surfaces), elle possède deux lignes de courbure rec-

tiligne qui se coupent orthogonalement. Les plans de toutes les autres lignes de courbure passent en partie par l'une, en partie par l'autre de ces deux droites [1].

Remarque. — *Une surface F est touchée en un point quelconque P par une infinité de sphères; elle est coupée en même temps par ces surfaces suivant des courbes qui passent deux fois par P et ont deux tangentes en ce point. On trouve par un calcul très simple que ces couples de tangentes sont symétriques par rapport aux tangentes aux deux lignes de courbure de la surface F qui passent par P et que, par conséquent, les angles formés par chacun de ces couples de tangentes sont bissectés par les lignes de courbure. Lorsque la sphère tangente est une sphère de courbure de la surface F, c'est-à-dire lorsque son centre coïncide avec l'un des deux centres de courbure du point P, les deux tangentes à la courbe d'intersection se confondent avec celles des lignes de courbure de F, et P est un point de rebroussement de la courbe d'intersection. Il résulte immédiatement de là que :*

*Si l'on transforme une surface F par rayons vecteurs réciproques en une autre surface $F_1$, les sphères qui lui sont tangentes, et en particulier les sphères de courbure, se transforment respectivement en sphères tangentes ou en sphères de courbure de $F_1$. Et comme la transformation n'altère pas les angles, les lignes de courbure de F seront transformées en lignes de courbure de $F_1$.*

*La dernière partie de ce théorème a été démontrée par M. Liouville.*

---

## SYSTÈMES RÉGLÉS ET SURFACES RÉGLÉES DU SECOND ORDRE.

79. Les sommets de toutes les surfaces coniques du second ordre, tangentes aux six côtés d'un hexagone gauche quelconque, ont pour lieu géométrique une surface réglée; cette dernière passe par les trois diagonales principales de l'hexagone. (Voir pages 89-90.)

80. Les trois diagonales principales d'un hexagone gauche, dont les six côtés sont situés sur une surface réglée du second ordre, se coupent en un même point.

81. Une ponctuelle $u$ et un faisceau S de rayons du premier ordre,

---

1. Pour plus de détails, consulter REYE, *Synthetische Geometrie der Kugeln*. Leipzig, 1879, pages 58 à 64.

qui ne sont pas situés dans des plans parallèles, sont rapportés projectivement l'un à l'autre ; les rayons qu'on peut mener par les points de *u* parallèlement aux rayons correspondants de S, constituent l'un des systèmes réglés d'un paraboloïde hyperbolique (voir page 93).

82. Une ponctuelle *u* et un faisceau de plans *v* sont projectifs et leurs lieux ne sont pas perpendiculaires l'un à l'autre ; les normales qu'on peut abaisser des points de *u* sur les plans correspondants de *v* constituent l'un des systèmes réglés d'un paraboloïde hyperbolique (n° 81).

83. On mène les normales à une surface réglée en tous les points d'une de ses génératrices ; elles constituent l'un des systèmes réglés d'un paraboloïde hyperbolique équilatère (n° 82 ; voir page 124).

84. Par un point quelconque, on mène des plans perpendiculaires à tous les rayons d'un système réglé ; ces plans forment un faisceau de plans du premier ou du second ordre suivant que le système réglé appartient à un paraboloïde hyperbolique ou à un hyperboloïde à une nappe. (page 126).

85. Tous les plans qui passent par un point fixe et coupent un hyperboloïde à une nappe donné suivant des paraboles, enveloppent une surface conique du second ordre, parallèle au cône asymptotique.

86. Construire une surface réglée, connaissant deux rayons *a* et *b* non situés dans le même plan et trois points en dehors de *a* et *b*, ou trois plans tangents ne passant pas par *a* et *b*.

87. Quel est le lieu d'un point qui est harmoniquement séparé d'un point donné A par une surface réglée. Quelle ligne ce lieu géométrique a-t-il en commun avec un plan passant par A ?

---

### FORMES ÉLÉMENTAIRES PROJECTIVES ; SURFACES RÉGLÉES DU TROISIÈME ORDRE.

88. Construire le quatrième élément harmonique à trois éléments donnés d'une forme élémentaire du second ordre ; par exemple, étant donnés trois points d'une courbe du second ordre, construire le quatrième harmonique.

89. Un faisceau de rayons du premier ordre et un faisceau du second ordre sont situés dans un même plan et rapportés projectivement l'un à l'autre. Tracer la courbe du troisième ordre sur laquelle sont situés tous les points d'intersection des rayons homologues des faisceaux (page 136).

90. Le problème réciproque du n° 89 donne un faisceau de rayons du troisième ordre; on demande de le construire.

91. Construire la courbe du quatrième ordre, engendrée par deux faisceaux projectifs de rayons du second ordre (page 142).

92. Tracer le faisceau de rayons du quatrième ordre engendré par deux courbes projectives du second ordre.

93. Sur une courbe du second ordre est placé le sommet S d'un angle de grandeur constante qui détermine une corde $\overline{AB}$ de la courbe. Si l'on fait pivoter cet angle autour de S, la corde $\overline{AB}$ décrit un faisceau de rayons du second ordre (page 138). Si l'angle donné est droit, $\overline{AB}$ tourne autour d'un point fixe (page 162).

94. On circonscrit à une courbe du second ordre un triangle ABP dont la base AB est située sur une tangente donnée $u$ de la courbe et a une longueur constante. Si cette base se déplace en glissant sur $u$, le sommet P du triangle décrit une nouvelle courbe du second ordre (page 138). En particulier on déduit de là que :

95. Si un angle de grandeur donnée est circonscrit à une parabole et si ses deux côtés se déplacent en restant constamment tangents à cette courbe, son sommet décrit une hyperbole, et la droite qui joint les deux points de contact engendre un faisceau de rayons du second ordre. L'angle droit seul fait exception (Théorème 105).

96. On donne une surface conique du second ordre et deux droites $a$ et $b$ ne se coupant pas, qui sont ou parallèles à deux rayons de la surface conique ou perpendiculaires à deux de ses plans tangents. Si une troisième droite se meut de telle manière qu'elle rencontre les droites $a$ et $b$ et soit toujours parallèle à un rayon de la surface conique ou (dans le second cas) toujours normale à un plan tangent de cette surface, elle décrit un hyperboloïde à une nappe (pages 136-137).

97. Une ponctuelle rectiligne du premier ordre $u$ et une ponctuelle $k^2$ du second ordre projectivement rapportées entre elles, mais qui ne sont pas dans un même plan et qui n'ont pas de point correspondant commun, engendrent un système de droites que nous appellerons *un système réglé* du troisième ordre [1]. Une droite $g$ coupe au moins un rayon de ce système et au plus trois, comme on le voit facilement (page 134) en projetant la ponctuelle $u$ de l'axe $g$ suivant un faisceau de

1. Voir la thèse de M. BENNO KLEIN. *Sur la surface réglée du troisième ordre et sa représentation sur un plan.* 1876.

plans. Le système réglé du troisième ordre sera en général projeté d'un point quelconque suivant un faisceau de plans du troisième ordre. (Voir page 135.)

98. Tout plan passant par $u$, qui coupe la courbe $k^2$, contient deux rayons du système réglé du troisième ordre. Si maintenant l'on projette les deux ponctuelles projectives $u$ et $k^2$ du point d'intersection D de deux rayons de cette espèce, on obtient un faisceau de rayons du premier ordre et une surface conique du second ordre, qui sont projectifs, qui ont deux rayons correspondants communs et qui par conséquent (page 156) engendrent un faisceau de plans $d$ du premier ordre. Tous les couples de rayons du système réglé, qui sont situés dans les plans passant par $u$, se coupent donc suivant les points d'une droite $d$ et de chacun de ces points le système réglé est projeté suivant un faisceau de plans du premier ordre perspectif à $u$ et $k^2$. Nous pouvons donner aux deux droites $u$ et $d$ le nom de *directrices* du système réglé du troisième ordre, puisque tous les rayons du système les rencontrent. La droite $d$ ne coïncide avec $u$ que si $u$ coupe la courbe $k^2$ ; dans ce cas particulier, la directrice $u$ est en même temps un rayon du système réglé.

99. Soit S un point appartenant à un rayon $a$ du système réglé du troisième ordre, mais qui n'est situé sur aucune des directrices $u$ et $d$. Les ponctuelles projectives $u$ et $k^2$ seront projetées de ce point suivant un faisceau de rayons du premier ordre et une surface conique du second ordre qui ont le rayon $a$ correspondant commun et qui, par suite (page 158) engendrent un faisceau de plans du second ordre perspectif à $u$ et à $k^2$. Le système réglé du troisième ordre sera donc projeté de l'un quelconque S de ses points suivant ce faisceau de plans du second ordre. Mais comme ce dernier est projectif au faisceau de plans $d$, qui est lui-même perspectif aux ponctuelles $u$ et $k^2$, il en résulte que :

100. Le système réglé du troisième ordre sera aussi engendré par le faisceau de plans du premier ordre $d$, sur l'axe duquel les rayons du système se coupent deux à deux, et par un faisceau de plans du second ordre projectif à $d$, dont le sommet peut être pris à volonté sur le système réglé. Ce second mode de génération est réciproque au premier qu'on a indiqué, et par conséquent le système réglé du troisième ordre est réciproque à lui-même. Si nous partons du second mode de génération du système, nous arrivons à des théorèmes, réciproques de ceux qu'on a démontrés précédemment. Citons entre autres les suivants :

| | |
|---|---|
| Le système réglé du troisième ordre est projeté d'un point quelconque, situé sur l'un de ses rayons, suivant un faisceau de plans du second ordre, | Le système réglé du troisième ordre est coupé par un plan quelconque, passant par l'un de ses rayons, suivant une courbe du second ordre, |

et tous ces faisceaux projetants de plans et ces courbes d'intersection du second ordre sont projectifs entre eux, à la ponctuelle $u$ du premier ordre et au faisceau de plans $d$ du premier ordre. Les courbes d'intersection du second ordre sont perspectives au faisceau $d$ et à tous les faisceaux projetants de plans du second ordre.

101. Le système réglé du troisième ordre est situé sur une surface réglée $F^3$ du troisième ordre, qui est rencontrée par une droite quelconque en trois points au plus et qui est coupée par un plan quelconque suivant une courbe du troisième ordre. La surface $F^3$ passe deux fois par la directrice $d$, qui contient un point double propre ou isolé de toute section plane de la surface. Les plans qui passent par les rayons du système réglé du troisième ordre coupent chacun la surface $F^3$ suivant le rayon qu'ils contiennent et suivant une courbe du second ordre; ces courbes sont rencontrées chacune par le rayon correspondant du système réglé en deux points, dont l'un est situé sur la ligne double $d$, tandis que l'autre est le point de contact du plan de la courbe avec la surface $F^3$. Les plans qui passent par les rayons du système réglé sont donc des plans tangents de la surface $F^3$; les plans passant par la directrice $u$, dans lesquels ces rayons sont situés deux à deux, sont des plans tangents doubles de $F^3$.

102. Nous distinguons trois espèces de surfaces réglées du troisième ordre. En effet, une des courbes du second ordre $k^2$ situées sur $F^3$ peut comprendre dans son intérieur le point où son plan coupe l'axe $u$ des plans tangents doubles; ou bien ce point peut lui être extérieur, ou bien enfin elle peut passer par lui; et il est de même pour toutes les autres courbes $k^2$ de la surface. Dans le premier cas (comme cela résulte du premier mode de génération, n° 97), chaque plan passant par $u$ contient deux rayons du système réglé du troisième ordre et en même temps deux de ses rayons se coupent en chaque point de $d$. Dans le second cas, les deux plans cuspidaux de la surface qui passent par $u$ et sont tangents aux courbes du second ordre $k^2$, séparent les plans tangents doubles propres et les points doubles propres de la surface des

plans tangents et points doubles isolés qui, comme les précédents, passent par $u$ ou sont situés sur $d$. Enfin le troisième cas peut être considéré comme le cas limite des deux premiers; quand il se réalise, les deux directrices $u$ et $d$ coïncident (et il en est de même des deux plans cuspidaux).

103. Une droite se meut en s'appuyant constamment sur deux droites $u$, $d$ (qui ne se rencontrent pas) et sur une courbe du second ordre $k^2$ qui est coupée par $d$, mais qui n'est dans un même plan ni avec $d$, ni avec $u$; elle décrit une surface réglée du troisième ordre (nº 97) dont les points doubles sont situés sur $d$ et dont les plans tangents doubles passent par $u$. Comment s'énonce le théorème réciproque?

---

### FORMES ÉLÉMENTAIRES EN INVOLUTION.

104. Si l'on prend une ponctuelle involutive sur une tangente d'une conique, et si de deux points conjugués quelconques l'on mène deux nouvelles tangentes à la courbe, ces dernières se coupent sur une droite déterminée (page 147). Il en résulte en particulier que :

105. Les sommets de tous les angles droits, qu'on peut circonscrire à une parabole, sont situés sur une même droite; il en est de même pour les sommets de tous les triangles isocèles circonscrits dont la base est située sur une tangente donnée de la parabole.

106. Les sommets de tous les triangles circonscrits à une conique, dont les bases sont situées sur une tangente donnée et sont bissectées par son point de contact A, sont (d'après le nº 104) situés sur une même droite, qui est le diamètre de la courbe passant par A. Les droites qui joignent dans chaque triangle les points de contact des deux autres côtés, sont parallèles à la base.

107. Deux plans tournent autour de deux droites fixes $u$, $u_1$ de manière à être constamment parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique; leur droite d'intersection décrit un cône ou une surface réglée du second ordre qui passe par $u$ et $u_1$.

108. Amener en position involutive deux faisceaux projectifs de rayons ou de plans du premier ordre (voir nº 15).

109. On donne deux couples de points $A, A_1$ et $B, B_1$ d'une ponctuelle involutive; construire au moyen du quadrilatère complet le point $C_1$ con-

jugué à un cinquième point C (page 155) et, en particulier, déterminer *le point central* de la ponctuelle dont le conjugué est à l'infini.

110. On connaît deux couples de diamètres conjugués d'une conique. Construire le diamètre conjugué à un cinquième diamètre quelconque (pages 148 et 153).

111. Si par un point quelconque on mène des parallèles aux trois couples de côtés opposés d'un quadrilatère complet, on obtient trois couples de rayons d'une involution (page 153); on en déduit que :

112. Si deux couples de côtés opposés d'un quadrilatère complet se coupent normalement, les deux autres côtés opposés restants sont aussi perpendiculaires l'un sur l'autre (page 162). Ou : les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point, *le centre des hauteurs* du triangle.

113. Toutes les courbes du second ordre, qui passent par les sommets et le centre des hauteurs d'un triangle quelconque, sont des hyperboles équilatères dont les asymptotes sont perpendiculaires l'une à l'autre (page 155 et n° 112). On peut toujours circonscrire une hyperbole équilatère à un quadrilatère quelconque; cette courbe passe par les centres des hauteurs des quatre triangles formés avec les sommets du quadrilatère.

114. Les côtés d'un triangle constituent avec la ligne de l'infini un quadrilatère complet, dont les trois couples de sommets opposés sont projetés du centre des hauteurs suivant trois couples de rayons perpendiculaires entre eux. Il résulte de là (voir page 155 et 156) que :

115. Deux tangentes d'une parabole se coupent rectangulairement au centre des hauteurs de tout triangle formé de tangentes à cette courbe. Par conséquent, les centres des hauteurs de tous ces triangles sont situés sur une même droite (n° 105). En particulier, les centres des hauteurs des quatre triangles, compris dans un quadrilatère complet quelconque, sont situés sur une même droite.

116. Soit ABCD un rectangle circonscrit à une ellipse ou à une hyperbole; deux tangentes de la courbe se coupent rectangulairement en tout point S, qui est situé sur un même cercle avec les sommets A, B, C, D (page 156); en effet, les deux couples de sommets opposés du rectangle sont projetés de S par deux couples de rayons rectangulaires. Nous déduisons de là que : les sommets de tous les angles droits qu'on peut circonscrire à une ellipse ou à une hyperbole sont situés sur un cercle.

Ce théorème peut être regardé comme un cas particulier du suivant :

117. Deux tangentes d'une courbe $k$ du second ordre, qui passent par deux points conjugués d'une ponctuelle involutive $u$, se coupent en général sur une autre courbe du second ordre.

Deux points d'une courbe du second ordre, par lesquels passent deux rayons conjugués d'un faisceau S en involution, sont situés en général sur un rayon d'un faisceau du second ordre.

Il y a exception quand la courbe $k$ est tangente à la droite $u$ (n° 104). En général, on peut circonscrire à la courbe un quadrilatère *abcd* dont deux sommets opposés *a c* et *bd* coïncident avec deux points conjugués P, P de $u$. Soit S un point où se coupent deux tangentes de $k$ qui passent par deux autres points conjugués Q, $Q_1$ de $u$ ; ces tangentes $\overline{SQ}$, $\overline{SQ_1}$, les rayons $\overline{SP}$, $\overline{SP_1}$, et le troisième couple de rayons qui projettent de S deux sommets R, $R_1$ du quadrilatère *abcd* différents de P et $P_1$, forment une involution (page 154) et par conséquent les rayons $\overline{SR}$, $\overline{SR_1}$, passent aussi par deux points conjugués de $u$. Rapportons les faisceaux de rayons R et $R_1$ projectivement l'un à l'autre de telle manière que deux rayons homologues passent par deux points conjugués de $u$, ils engendrent une courbe du second ordre qui est le lieu géométrique du point S. On peut donc encore dire : *Les couples de tangentes d'une courbe du second ordre qui sont harmoniquement séparées par deux points donnés se coupent en général sur une courbe du second ordre*. Sous cette forme, le théorème de gauche est un cas particulier du suivant dont nous ne donnons pas la démonstration :

Les couples de tangentes d'une courbe du second ordre, qui sont conjuguées par rapport à une seconde courbe du second ordre, se coupent en général en des points appartenant à une troisième courbe du même ordre.

Les couples de points d'une courbe du second ordre, qui sont conjugués par rapport à une seconde courbe du second ordre, sont situés en général sur les tangentes d'une troisième courbe du même ordre.

On trouve facilement que la troisième courbe (théorème de gauche) passe par chacun des points de contact de toute tangente commune aux deux premières courbes.

118. Si parmi les trois cercles, construits sur les diagonales d'un

quadrilatère complet comme diamètres, deux quelconques se coupent, le troisième passe aussi par leurs deux points d'intersection. Les côtés de tout angle droit qui a l'un de ces points d'intersection pour sommet sont tangents à une courbe du second ordre inscrite dans le quadrilatère.

119. Toutes les hyperboles circonscrites à un quadrilatère inscriptible dans un cercle ont leurs axes parallèles ; les directions de ces axes sont les bissectrices des angles que font entre eux les côtés opposés du quadrilatère. En effet, les rayons doubles d'un faisceau involutif de rayons, dont trois couples de rayons conjugués sont parallèles aux trois couples de côtés parallèles du quadrilatère inscriptible, sont perpendiculaires l'un à l'autre.

120. Par le point milieu M d'une corde d'une courbe du second degré on mène deux sécantes ; ces droites déterminent un quadrilatère complet inscrit dans la courbe, les deux autres couples de côtés opposés de ce quadrilatère interceptent sur la corde deux segments qui ont aussi le point M comme point milieu.

---

## FOYERS DES COURBES DU SECOND ORDRE.

121. Construire le foyer F d'une parabole.

1° Le foyer F est situé sur la perpendiculaire élevée à chaque tangente par son point de rencontre avec la tangente au sommet (page 170).

2° Le foyer bissecte le segment de l'axe compris entre deux droites conjuguées perpendiculaires l'une sur l'autre, par exemple la tangente et la normale en un point de la parabole (page 165).

3° Chaque tangente à la parabole fait avec un diamètre le même angle que la droite qui joint son point de contact au foyer F (page 165).

4° Tous les cercles circonscrits à des triangles formés de tangentes à la parabole passent par le foyer F (page 172).

122. Construire la directrice $f$ d'une parabole.

1° La directrice est la polaire du foyer.

2° Deux tangentes rectangulaires se coupent sur la directrice (page 165).

3° Les centres des hauteurs de tous les triangles formés de tangentes à la parabole sont situés sur la directrice $f$ (n° 115).

123. Les directrices de toutes les paraboles inscrites dans un triangle passent par le centre des hauteurs de ce triangle, et leurs foyers sont situés sur le cercle circonscrit au triangle. Si d'un point quelconque de ce cercle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du triangle, leurs trois pieds sont situés sur une même droite, qui est la tangente au sommet de l'une des paraboles inscrites.

124. Construire les foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole :

1° En les regardant comme des points doubles d'une ponctuelle en involution située sur l'axe principal (page 164).

2° Au moyen des tangentes au sommet de l'axe principal. Ces tangentes déterminent sur une troisième tangente quelconque un segment qui est projeté de chacun des foyers suivant un angle droit (page 171).

3° Au moyen du cercle qui est tangent à la courbe aux deux extrémités de l'axe principal. Si l'on élève sur chaque tangente à la courbe des perpendiculaires aux points où elle rencontre ce cercle, ces droites coupent l'axe principal aux deux foyers (page 170).

4° En circonscrivant un cercle à un triangle rectangle dont les côtés sont conjugués l'un à l'autre et dont l'hypoténuse est située sur l'axe conjugué. Ce cercle coupe l'axe principal aux deux foyers (page 164).

5° Au moyen du théorème sur la constance de la somme ou de la différence des rayons qui joignent un point de la courbe aux foyers. (page 169).

125. Construire une courbe du second ordre, connaissant un foyer, la directrice correspondante et un point ou une tangente (pages 165-167).

126. Construire une courbe du second ordre connaissant un foyer et trois tangentes, ou deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles (page 171). Dans l'un et l'autre cas, construire immédiatement l'autre foyer (page 165).

127. Si l'on fait correspondre entre eux les foyers de toutes les courbes du second ordre inscrites dans un triangle ABC, on obtiendra entre les points du plan une correspondance involutive du second degré, dont A, B, C sont les trois points principaux; c'est-à-dire que si l'un des foyers décrit une droite $u$ quelconque, l'autre décrit une courbe du second ordre passant par A, B, C et projective à $u$ (page 165). Les bissectrices des angles du triangle se correspondent à elles-mêmes. Toute droite du plan est un axe de l'une des courbes du second ordre inscrites.

128. Construire une courbe du second ordre, connaissant les deux foyers et un point ou une tangente (pages 169 et 170).

129. Les angles formés par les tangentes qu'on peut mener à des courbes homofocales du second ordre par un point quelconque P de leur plan, sont bissectés par deux droites déterminées qui se coupent orthogonalement en P (page 165); ce sont les tangentes aux deux courbes qui passent par P.

130. Les pôles d'une droite $g$, par rapport à des courbes homofocales du second ordre, sont situés sur une droite perpendiculaire à $g$, qui est harmoniquement séparée de $g$ par les deux foyers.

131. Les côtés opposés d'un quadrilatère formé par un triangle polaire et le point de rencontre de ses hauteurs sont harmoniquement séparés deux à deux par les foyers de la courbe.

132. On donne deux points A, B et un foyer F d'une courbe du second ordre; l'autre foyer $F_1$ est situé sur une conique passant par F et qui a A et B pour foyers. En effet puisque $AF \pm BF$ est donné, $AF_1 \pm BF_1$, doit avoir une grandeur constante (voir page 169). La directrice qui correspond à F coupe la droite $\overline{AB}$ en l'un des deux points par lesquels passent les bissectrices des angles formés par $\overline{FA}$ et $\overline{FB}$ (page 167).

133. Construire une courbe du second ordre, connaissant un foyer, le centre et un point ou une tangente (nº 128).

134. Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles d'une ellipse ou d'une hyperbole est constant (page 168). Il en est de même pour le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque.

135. Construire une ellipse connaissant les longueurs de ses axes.

1º En prenant pour point de départ le théorème du nº 59.

2º En se servant des quatre tangentes aux sommets (nºs 20 et 21).

3º A l'aide des foyers qu'on construira au moyen des longueurs des axes.

136. Construire une parabole, connaissant le foyer et la directrice (page 168); ou bien le foyer, l'axe et un point ou une tangente.

137. Les centres de tous les cercles tangents à deux cercles donnés sont situés sur deux courbes homofocales du second degré (voir page 169).

Les centres des cercles donnés sont les foyers de ces courbes.

158. Tous les points du plan équidistants d'une droite et d'un cercle sont situés sur deux paraboles (voir n° 157).

159. Étant donné un angle de grandeur constante dont un côté reste constamment tangent à une courbe du second ordre, tandis que l'autre côté pivote autour de l'un des foyers, son sommet décrit un cercle doublement tangent à la courbe (page 169). Si la courbe est une parabole, le lieu du sommet de l'angle est une tangente à cette courbe.

---

## PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

140. Inscrire dans une courbe du second ordre un $n$-angle (polygone simple à $n$ sommets), dont les côtés passent respectivement par $n$ points donnés non situés sur la courbe.

141. Circonscrire à une courbe du second degré un $n$-angle simple dont les sommets soient respectivement situés sur $n$ droites données qui ne sont pas tangentes à la courbe.

142. On donne un pentagone simple dans un plan; on demande d'en déterminer un second qui soit en même temps inscrit et circonscrit au pentagone donné.

143. Mener par un point donné deux rayons qui interceptent sur deux droites données $u$, $v$ deux segments de longueur donnée.

144. Entre deux droites $u$, $v$ mener une droite qui soit vue de deux points donnés sous des angles droits.

145. Déterminer sur une droite donnée un segment qui soit vu de deux points donnés sous des angles donnés.

146. Par un point donné, mener une droite qui divise un triangle en deux parties équivalentes ou qui forme avec deux droites données un triangle de surface donnée.

147. Circonscrire à un triangle donné un triangle dont un côté soit limité par deux droites données et dont les deux autres côtés comprennent entre eux un angle de grandeur donnée.

148. Construire les côtés de deux angles droits qui se correspondent dans deux faisceaux projectifs de rayons (n° 15).

149. Étant données deux ponctuelles projectives situées sur la même droite, trouver deux points homologues qui soient à une distance donnée l'un de l'autre; ou déterminer dans deux faisceaux de rayons con-

centriques et projectifs deux rayons homologues comprenant entre eux un angle de grandeur donnée.

150. Étant données deux ponctuelles rectilignes projectives, déterminer sur elles deux segments homologues de longueur donnée.

151. Une courbe du second ordre a en général un couple de diamètres conjugués parallèle à un couple de diamètres conjugués d'une autre courbe du second ordre située dans le même plan. Les hyperboles dont les directions asymptotiques sont séparées les unes par les autres font seules exception (page 181).

152. Circonscrire à un quadrilatère une courbe du second ordre tangente à une droite donnée (page 155); ou inscrire dans un quadrilatère une courbe du second ordre passant par un point donné.

153. Dans le plan qui contient deux courbes du second ordre, il existe au moins un point réel U qui a une seule et même polaire $u$ par rapport aux deux courbes (n° 61). Les deux points réels ou imaginaires conjugués de $u$ par rapport à chacune des deux courbes (voir page 181) forment avec U un triangle polaire commun aux deux courbes. D'après cela, deux courbes du second ordre, situées dans le même plan, ont en général un triangle polaire commmun; ce dernier a au moins un sommet et un côté réels.

---

## AXES FOCAUX ET PLANS CYCLIQUES DES SURFACES CONIQUES DU SECOND ORDRE.

154. Si un dièdre donné tourne autour de son arête $s$, le plan qui unit les deux droites suivant lesquelles ses faces sont respectivement coupées par deux plans passant par un point de $s$ enveloppe une surface conique du second ordre, dont $s$ est un axe focal (page 192). Comment s'énonce le théorème réciproque?

155. L'angle plan déterminé sur un plan tangent quelconque d'une surface conique du second ordre par les plans tangents perpendiculaires au plan qui contient les deux axes focaux réels $f$ et $f'$ est projeté de chacun de ces axes suivant un angle dièdre droit.

156. Les plans cycliques réels $\varkappa$ et $\varkappa'$ d'une surface conique du second ordre coupent suivant deux angles droits tout angle dièdre formé en joignant un rayon quelconque de la surface aux deux rayons de cette surface perpendiculaires à $\overline{\varkappa\varkappa'}$.

157. Deux surfaces coniques homofocales se coupent normalement suivant chaque rayon qui leur est commun (page 191).

158. Deux surfaces coniques du second ordre *concycliques* sont touchées par tout plan tangent commun suivant deux rayons perpendiculaires entre eux (n° 157 ; voir aussi page 195).

159. Tous les dièdres qu'on peut circonscrire à deux surfaces coniques homofocales du second ordre passant par un point quelconque P, sont bissectés par deux plans déterminés qui se coupent rectangulairement au point P (n° 129).

160. Étant donnés des surfaces coniques homofocales du second ordre et un plan passant par leur sommet, tous les angles contenus dans ce plan et inscrits dans les différentes surfaces sont bissectés par deux rayons déterminés, perpendiculaires l'un à l'autre (n° 159).

161. Une surface conique du second ordre et une sphère qui lui est concentrique ont pour courbe commune une *conique sphérique*. La sphère coupe chaque plan de symétrie du cône suivant un *axe* de la conique sphérique, chaque plan cyclique suivant une *ligne cyclique*, chaque plan tangent suivant une *tangente*, chaque axe principal suivant deux *centres* et chaque axe focal de la surface conique suivant deux *foyers* de la conique sphérique.

162. La conique sphérique est une courbe jumelle, c'est-à-dire qu'elle se compose de deux lignes séparées dont les points sont diamétralement opposés sur la surface de la sphère. Elle a en général trois couples de centres où ses trois axes se coupent rectangulairement ; elle a de plus deux lignes cycliques réelles et deux couples de foyers réels. Le premier axe passe par ces foyers et par les points d'intersection des deux lignes cycliques ; le second est tout entier à l'extérieur de la conique ; enfin le troisième coupe normalement les lignes cycliques réelles et a par conséquent, comme le premier, deux couples de *sommets* réels (pages 191 et 196). Dans un cas particulier, la conique sphérique se compose de deux cercles de la sphère.

163. Transporter aux coniques sphériques toutes les propriétés des surfaces coniques du second degré relatives aux plans de symétrie, axes principaux, axes focaux et plans cycliques.

164. Si l'un des côtés d'un triangle sphérique se meut de telle manière que la surface de ce triangle reste constante, ce côté enveloppe une conique sphérique, qui a pour lignes cycliques les deux autres côtés du triangle. Si l'un des sommets d'un triangle sphérique se meut sur

la sphère de telle sorte que le périmètre du triangle reste constant, ce sommet décrit une conique sphérique qui a pour foyers les deux autres sommets (page 192).

---

## QUADRANGLES ET QUADRILATÈRES POLAIRES DES CONIQUES.

165. Nous appellerons *quadrangle polaire* d'une conique $\gamma^2$ un quadrangle complet dans lequel chacun des six côtés est le conjugué, par rapport à $\gamma^2$, du côté qui lui est opposé. Nous donnerons de même le nom de *quadrilatère polaire* de la conique à un quadrilatère complet tel que chacun de ses six sommets est le conjugué du sommet qui lui est opposé. Les polaires des sommets d'un quadrangle polaire forment un quadrilatère polaire; et les six côtés du quadrangle passent par les xsi côtés du quadrilatère.

166. Lorsque deux couples de côtés opposés d'un quadrangle complet sont formés de rayons conjugués, il en est de même pour le troisième couple et le quadrangle est un quadrangle polaire de la conique $\gamma^2$. En effet la polaire d'un sommet quelconque coupe le quadrangle en une involution de points (page 154); elle rencontre les deux premiers couples de côtés opposés en des couples de points conjugués; il en est donc de même pour le troisième, ce qui démontre le théorème. On établirait de même le théorème réciproque : un quadrilatère complet est un quadrilatère polaire de $\gamma^2$, quand deux couples de ses sommets opposés sont deux couples de points conjugués.

167. Si l'on joint les sommets A, B, C d'un triangle aux pôles des côtés qui leur sont opposés, les trois droites ainsi obtenues passent par un point D, qui constitue avec A, B et C un quadrangle polaire de la conique $\gamma^2$ (n° 166). Trois sommets A, B, C d'un quadrangle polaire pris arbitrairement déterminent donc le quatrième D; en particulier, si A et B sont conjugués par rapport à $\gamma^2$, ils forment avec D un triangle polaire de $\gamma^2$. Tout quadrangle, composé d'un triangle polaire de $\gamma^2$ et d'un point quelconque du plan est un quadrangle polaire de $\gamma^2$ (n° 165).

Il existe aussi des quadrangles polaires impropres dont trois sommets sont situés sur une même droite, ou dont deux sommets coïncident.

168. Si l'on prolonge les côtés $a$, $b$, $c$ d'un triangle jusqu'à ce qu'ils

rencontrent les polaires des sommets qui leur sont opposés, on obtient trois points situés sur une même droite $d$ qui forme avec $a$, $b$ et $c$ un quadrilatère polaire de la conique $\gamma^2$ (nº 166). Trois côtés d'un quadrilatère polaire déterminent donc le quatrième; c'est seulement dans le cas où ils forment un triangle polaire de $\gamma^2$, que le quatrième côté peut coïncider avec une droite quelconque du plan.

169. Lorsque deux quadrangles polaires ABCD et ABC'D' de $\gamma^2$ ont deux sommets A et B communs, leurs six sommets sont situés sur une même courbe du second ordre, qui dans certains cas peut se décomposer en deux droites $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$.

Lorsque deux quadrilatères polaires ont deux côtés communs, leurs six côtés enveloppent une courbe de seconde classe (c'est-à-dire appartiennent à un même faisceau du second ordre) qui peut aussi se réduire à deux points.

En effet, comme les faisceaux de rayons A et B seront projectivement rapportés l'un à l'autre si l'on fait correspondre à chaque rayon de A son conjugué dans B, il s'ensuit que A (CDC'D') $\overline{\wedge}$ B (DCD'C'). On déduit de là (d'après la page 150) A (CDC'D') $\overline{\wedge}$ B (CDC'D'), comme l'énonce le théorème de gauche.

170. Comme un triangle polaire de $\gamma^2$ devient un quadrangle polaire par l'adjonction d'un point quelconque du plan, on déduit immédiatement du double théorème ci-dessus les propositions qui suivent :

Lorsqu'un triangle polaire et un quadrangle polaire de $\gamma^2$ ont un sommet commun, leurs six sommets sont situés sur une courbe du second ordre.

Quand un triangle polaire et un quadrilatère polaire de $\gamma^2$ ont un côté commun, leurs six côtés sont tangents à une courbe de seconde classe.

Deux triangles polaires d'une conique $\gamma^2$ peuvent donc être inscrits à une courbe du second ordre et circonscrits à une courbe de seconde classe (voir aussi page 151). Ces courbes peuvent respectivement se réduire à deux droites ou à deux points.

171. Deux coniques $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$, situées dans le même plan, ont une infinité de quadrangles et de quadrilatères polaires communs. On peut prendre à volonté deux côtés $a$, $b$ d'un pareil quadrangle polaire; les

côtés $a_1$, $b_1$ qui leur sont opposés joignent respectivement les deux pôles de $a$ et $b$ par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1$.

Lorsque deux quadrangles polaires ABCD, AB'C'D' communs à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ ont un sommet A commun, leurs sept sommets sont situés sur une même courbe du second ordre.

Lorsque deux quadrilatères polaires communs à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ ont un côté commun, leurs sept côtés sont tangents à une courbe de seconde classe.

En effet, soit ABB'P un quadrangle polaire de $\gamma^2$ et ABB'Q un quadrangle polaire de $\gamma_1^2$ ; les deux courbes du second ordre (ABCDB'P) et (ABCDB'Q) ont cinq points communs et par suite coïncident avec la conique (ABB'PQ) ; de même alors les courbes du second ordre (AB'C'D'BP) et (AB'C'D'BQ) coïncident avec (ABB'PQ).

172. Étant données trois coniques quelconques $\gamma^2$, $\gamma_1^2$, $\gamma_2^2$ dans un même plan, une droite $a$ a en général par rapport à elles trois pôles qui ne sont pas situés sur une même droite. Si $a$ décrit un faisceau de rayons U, ces pôles décrivent trois ponctuelles $u$, $u_1$, $u_2$, projectives à U et par conséquent projectives entre elles. Parmi les rayons qui joignent les points correspondants de $u$ et $u_1$, il y en a au plus trois (et au moins un) qui passent par les points correspondants de $u_2$ (page 156) et chacun d'eux fournit un rayon qui est conjugué à un rayon de U par rapport aux trois coniques $\gamma^2$, $\gamma_1^2$, $\gamma_2^2$.

Ce résultat nous donne ainsi une partie du double théorème qui suit :

Il existe dans le plan une infinité de couples de rayons qui sont conjugués par rapport à trois coniques quelconques données. Ces couples de rayons enveloppent en général une courbe de troisième classe, et deux quelconques d'entre eux constituent deux couples de côtés opposés d'un quadrangle polaire commun aux trois coniques (nº 166). Les trois tangentes qu'on peut mener d'un point quelconque

Il existe dans le plan une infinité de couples de points qui sont conjugués par rapport à trois coniques quelconques données. Le lieu de ces couples de points est en général une courbe du troisième ordre, et deux quelconques d'entre eux constituent deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère polaire commun aux trois coniques. Les trois points, où une droite quelconque coupe

à la courbe de troisième classe forment avec les tangentes qui leur sont conjuguées les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle polaire commun aux trois coniques.

la courbe du troisième ordre, constituent avec les points de la courbe qui leur sont conjugués les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère polaire commun aux trois coniques.

---

### SYSTÈMES LINÉAIRES PONCTUELS ET TANGENTIELS DE CONIQUES.

173. Lorsqu'on circonscrit une conique $k^2$ à un quadrangle polaire d'une conique $\gamma^2$, les deux courbes $\gamma^2$ et $k^2$ ont entre elles les relations remarquables qui suivent :

1° Trois points quelconques de $k^2$ déterminent un quadrangle polaire de $\gamma^2$ (n° 167) dont le quatrième sommet est également situé sur $k^2$.

2° Si l'on coupe $k^2$ par deux droites qui soient conjuguées par rapport à $\gamma^2$, on obtient comme points d'intersection les quatre sommets d'un quadrangle polaire de $\gamma^2$.

3° On peut donc inscrire dans la courbe $k^2$ une infinité de quadrangles polaires et en général aussi une infinité de triangles polaires réels de $\gamma^2$.

Tout point de la courbe $k^2$ renfermé à l'intérieur de $\gamma^2$ est un sommet de l'un de ces triangles polaires.

4° La polaire d'un point de $k^2$ par rapport à $\gamma^2$ coupe l'une ou chacune des deux courbes en deux

$1°_a$ Trois tangentes quelconques de $\gamma^2$ déterminent un quadrilatère polaire de $k^2$, dont le quatrième côté est également une tangente de $\gamma^2$.

$2°_a$ Si l'on mène des tangentes à $\gamma^2$ de deux points conjugués par rapport à $k^2$, on obtient les quatre côtés d'un quadrilatère polaire de $k^2$.

$3°_a$ On peut donc circonscrire à la courbe $\gamma^2$ une infinité de quadrilatères polaires, et en général aussi une infinité de triangles polaires réels de $k^2$.

Toute tangente de $\gamma^2$ située à l'extérieur de $k^2$ est un côté de l'un de ces triangles polaires.

$4°_a$ Par le pôle d'une tangente de $\gamma^2$ par rapport à $k^2$ passent deux tangentes réelles à l'une ou à chacune des deux courbes; ces tan-

points réels qui sont conjugués par rapport à l'autre courbe.

5° Deux tangentes de $\gamma^2$ dont les points de contact sont conjugués par rapport à $k^2$, se coupent toujours en un point de $k^2$.

gentes sont conjuguées par rapport à l'autre courbe.

$5°_a$ Deux points de $k^2$, dont les tangentes sont conjuguées par rapport à $\gamma^2$, sont toujours situés sur une même tangente de $\gamma^2$.

6° La courbe $k^2$ est située ou bien tout entière à l'extérieur de $\gamma^2$, ou bien partie à l'intérieur, partie à l'extérieur; elle ne peut jamais être tout entière à l'intérieur de $\gamma^2$.

174. Les considérations qui suivent servent à démontrer ces théorèmes.

Deux sommets du quadrangle polaire de $\gamma^2$, auquel est circonscrite la conique $k^2$, déterminent avec un troisième point quelconque de $k^2$ un second quadrangle polaire de $\gamma^2$ inscrit à $k^2$ (n$^{os}$ 167 et 169); de même, de ce second quadrangle on peut en déduire un troisième dont deux sommets A, B peuvent être pris arbitrairement sur $k^2$; enfin ce troisième quadrangle nous conduit à un quatrième quadrangle polaire de $\gamma^2$ inscrit à $k^2$ qui a pour sommets trois points A,B,C choisis à volonté sur $k^2$. Le théorème 1° se trouve ainsi démontré et le théorème 2° s'en déduit immédiatement.

Soit $a$ la polaire de A par rapport à $\gamma^2$, et supposons que cette droite n'ait aucun point commun avec $\gamma^2$ et que par suite A soit intérieur à $\gamma^2$. $a$ coupe alors les côtés opposés du quadrangle polaire de $\gamma^2$, qui ont A pour point de rencontre, en un couple de points conjugués par rapport à $\gamma^2$ (n° 166) et la ponctuelle involutive $a$ ainsi engendrée n'a pas de points doubles réels. Toutes les coniques qu'on peut circonscrire à l'un de ces quadrangles polaires doivent donc couper chacune la droite $a$ en deux points conjugués réels qui forment avec A un triangle polaire réel de $\gamma^2$; en effet, ces coniques se succèdent d'une manière continue, un nombre infini d'entre elles ont avec la ponctuelle involutive $a$ deux points conjugués réels communs (page 155) et il n'est pas possible que l'une d'elles ait avec $a$ deux points imaginaires communs, car sans cela il existerait entre celle-ci et les précédentes une autre courbe qui serait tangente à $a$ en un point double réel. Ceci démontre les théorèmes 3° et 4° et les théorèmes 5° et 6° s'en déduisent facilement.

175. Les théorèmes de droite $1°_a$ jusqu'à 6° du n° 173 peuvent se démontrer comme on vient de le faire pour ceux de gauche, du moment qu'on

aura prouvé qu'on peut circonscrire à la conique $\gamma^2$ un quadrilatère polaire quelconque de $k^2$. Pour le démontrer, prenons sur $k^2$ trois points P, Q, R dont les droites de jonction soient extérieures à $\gamma^2$, ce qui est toujours possible (nº 175, 6º). Ces points déterminent un quadrangle polaire PQRS de $\gamma^2$ inscrit dans $k^2$, dont les côtés opposés se coupent en trois points U, V, W extérieurs à $\gamma^2$; ces trois points sont conjugués deux à deux par rapport à $k^2$ et deux d'entre eux, U et V, sont extérieurs à $k^2$. Menons maintenant par U et V des couples de tangentes à $\gamma^2$, elles séparent harmoniquement deux quelconques des côtés opposés du quadrangle polaire PQRS (page 102). Ces quatre tangentes forment donc un quadrilatère dont les sommets opposés sont deux à deux séparés harmoniquement par chaque couple de côtés opposés du quadrangle PQRS et comme un des six sommets du quadrilatère est intérieur à $k^2$, comme on le voit facilement, il est aussi harmoniquement séparé par $k^2$ du sommet qui lui est opposé (page 155). Parmi les sommets opposés du quadrilatère, il y en a donc deux couples qui sont conjugués par rapport à $k^2$ ; ce quadrilatère circonscrit à $\gamma^2$ est donc un quadrilatère polaire de $k^2$, ce qu'il fallait démontrer.

176. Étant données deux coniques $k^2$ et $\gamma^2$ dont l'une $k^2$ est circonscrite à un quadrangle polaire de l'autre $\gamma^2$, ou dont la dernière $\gamma^2$ est inscrite dans un quadrilatère polaire de la première, nous dirons que [1] *la courbe* k² *du second ordre* soutient *ou* porte *la courbe de seconde classe* $\gamma^2$ ; *et que réciproquement* $\gamma^2$ *est* soutenue *par* k² *ou* repose *sur* $k^2$. Lorsque $k^2$ se réduit à deux rayons ou $\gamma^2$ à deux points, nous dirons d'après cela que :

Un couple de rayons porte la courbe de seconde classe $\gamma^2$ lorsque ces rayons sont conjugués par rapport à $\gamma^2$.

Un couple de deux points repose sur la courbe du second ordre $k^2$, quand ces points sont conjugués par rapport à $k^2$.

Et comme une droite n'est conjuguée à elle-même par rapport à $\gamma^2$ que lorsqu'elle est tangente à $\gamma^2$, nous ajouterons :

Une droite double porte la courbe de seconde classe $\gamma^2$ quand elle est tangente à $\gamma^2$.

Un point double repose sur la courbe du second ordre $k^2$, quand il est situé sur $k^2$.

---

1. Voir mes recherches analytico-géométriques dans le *Journal de Crelle*, t. LXXXII.

177. Toutes les coniques, qui portent une courbe donnée de seconde classe $\gamma^2$ et qui passent par trois points pris arbitrairement, sont circonscrites au quadrangle polaire de $\gamma^2$ déterminé par ces points (n° 175, 1°). Il ne passe donc qu'une seule de ces courbes par un quatrième point pris arbitrairement dans le plan. Donc :

Toutes coniques $k^2$ qui portent une courbe donnée de seconde classe $\gamma^2$, constituent un système à quatre dimensions que nous appellerons *un système linéaire ponctuel de coniques de quatrième espèce*. A un quadrangle quelconque, on ne peut en général circonscrire qu'une conique de ce système; en effet, le quadrangle est un quadrangle polaire de $\gamma^2$ et alors toutes les coniques qui lui sont circonscrites appartiennent au système, si deux quelconques d'entre elles portent la courbe $\gamma^2$.

Toutes les coniques $\gamma^2$ qui reposent sur une courbe du second ordre donnée $k^2$, constituent un système à quatre dimensions que nous appellerons *un système linéaire tangentiel de coniques de quatrième espèce*. Dans un quadrilatère quelconque, on ne peut en général inscrire qu'une conique du système ; en effet, le quadrilatère est un quadrilatère polaire de $k^2$ et alors toutes les coniques qui lui sont inscrites appartiennent au système, si deux quelconques d'entre elles reposent sur la courbe $k^2$.

178. Parmi les coniques, qui portent deux courbes données de seconde classe $\gamma^2$, $\gamma_1^2$, il n'y en a en général qu'une seule qui passe par trois points quelconques A, B, C, du plan ; cette courbe contient aussi les deux points qui, joints à A, B, C, forment un quadrangle polaire de $\gamma^2$ et un de $\gamma_1^2$. Nous pouvons donc dire en général :

Toutes les coniques $k^2$, qui portent deux ou trois ou quatre courbes de seconde classe prises arbitrairement dans le plan, constituent un système ponctuel triplement, doublement ou simplement infini, que nous appellerons un *système linéaire ponctuel de coniques de troisième, de seconde ou de première espèce*.

Toutes les coniques $\gamma^2$, qui reposent en même temps sur deux, trois ou quatre courbes du second ordre prises arbitrairement dans le plan, constituent un système tangentiel triplement, doublement ou simplement infini, que nous appellerons un *système tangentiel linéaire de coniques de troisième, de seconde ou de première espèce*.

Pour des situations particulières des courbes données les unes par rapport aux autres, ces théorèmes sont sujets à des exceptions qui se présenteront d'elles-mêmes dans la suite. Le nombre relatif à l'espèce n'indique pas seulement quelles sont les dimensions du système ponctuel ou tangentiel de coniques; mais, comme nous le verrons plus loin (nos 189 et 195), il fait connaître le nombre des points ou des tangentes qui déterminent complètement une des coniques du système auquel il se rapporte.

179. Les systèmes linéaires ponctuels de coniques de première et de seconde espèce, sont généralement appelés respectivement des *faisceaux de coniques* et des *réseaux de coniques ;* de même les formes qui leur sont réciproques portent les noms de *faisceaux tangentiels* et *réseaux tangentiels* de coniques. On définit encore d'une autre manière les faisceaux ponctuels et les faisceaux tangentiels de coniques en les considérant comme l'ensemble de toutes les coniques qui sont respectivement circonscrites ou inscrites à un quadrilatère; mais ces définitions sont renfermées dans les précédentes, comme le montre le théorème suivant :

Lorsque deux coniques d'un système linéaire ponctuel de coniques sont circonscrites à un quadrangle, ce quadrangle est un quadrangle polaire commun à toutes les courbes de seconde classe qui reposent sur le système (n° 177) et par conséquent toutes les coniques circonscrites au quadrangle font partie du système ponctuel.

Lorsque deux coniques d'un système linéaire tangentiel de coniques sont inscrites dans un quadrilatère, celui-ci est un quadrilatère polaire commun à toutes les courbes du second ordre qui portent le système (n° 177) et par conséquent toutes les coniques inscrites au quadrilatère appartiennent au système tangentiel.

180. La théorie du système ponctuel linéaire de coniques de quatrième espèce n'est pas essentiellement différente de la théorie des polaires de la courbe de seconde classe $\gamma^2$ qui repose sur toutes les coniques du système. Nous ferons seulement remarquer que le système se particularise, quand $\gamma^2$ se réduit à deux points P et Q ou à un point double P. Ainsi :

Toutes les coniques du plan qui

Toutes les coniques du plan qui

passent par un point donné P, ou par rapport auxquelles deux points P et Q sont conjugués l'un à l'autre, forment un système ponctuel linéaire particulier de coniques, de quatrième espèce.

sont tangentes à une droite donnée, ou par rapport auxquelles deux droites sont conjuguées l'une à l'autre, forment un système tangentiel linéaire particulier de coniques, de quatrième espèce.

Par exemple, toutes les paraboles du plan forment un système tangentiel particulier de coniques et toutes les hyperboles équilatères constituent un système ponctuel particulier de coniques, tous deux de la quatrième classe. Quels sont les deux points imaginaires auxquels se réduit la courbe $\gamma^2$ qui repose sur toutes les hyperboles équilatères?

---

### SYSTÈMES LINÉAIRES PONCTUELS ET TANGENTIELS DE TROISIÈME ET DE PREMIÈRE ESPÈCE[1].

181. Étant donnés deux sommets A,B d'un quadrangle polaire d'une courbe de seconde classe $\gamma^2$, ainsi que le côté $u$ conjugué à $\overline{AB}$ sur lequel les deux autres sommets C et D sont situés, ces derniers constituent un couple quelconque de points conjugués d'une ponctuelle involutive $u$.

On obtient cette ponctuelle en faisant correspondre à tout rayon $\overline{AC}$ ou $\overline{AD}$ passant par A le rayon $\overline{BD}$ ou $\overline{BC}$ qui lui est conjugué et en coupant par $u$ les faisceaux de rayons A et B ainsi rapportés projectivement. Si l'on veut maintenant construire un quadrangle polaire commun à deux courbes $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$ de seconde classe et qui ait les points A et B pour sommets, il faut que la droite $u$ qui contient les deux autres sommets B et D, passe par les deux pôles de $\overline{AB}$ par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$; quant aux points C et D, ils se correspondent l'un à l'autre dans deux ponctuelles involutives situées sur $u$ et sont par conséquent complètement déterminés (page 180), si les deux ponctuelles ne sont pas identiques l'une avec l'autre. Les deux points doubles de ces ponctuelles involutives sont conjugués par rapport à toutes les coniques circonscrites au quadrangle polaire ABCD; et comme nous l'avons démontré plus haut (page 186), il passe toujours une de ces coniques par un point quel-

---

1. Voir SCHRÖTER, *Théorie des coniques*, 2e édition, pages 224-403 (Leipzig, 1876).

conque P, même quand C et D sont imaginaires. Nous en concluons (voir nº 178) que :

182. Toutes les coniques, qui portent deux courbes $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ de seconde classe et qui passent par deux points réels, sont circonscrites à un quadrangle polaire commun à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$, dont les deux autres sommets peuvent aussi être imaginaires conjugués.

Toutes les coniques qui reposent sur deux courbes $k^2$ et $k_1^2$ du second ordre et qui sont tangentes à deux droites réelles, sont inscrites dans un quadrangle commun à $k^2$ et $k_1^2$, dont les deux autres côtés peuvent aussi être imaginaires conjugués.

Nous pouvons (page 177) considérer ce quadrangle polaire comme donné, si, en outre de ses deux points réels A et B, nous connaissons une conique qui lui est circonscrite ainsi que la droite $u$ sur laquelle sont situés les deux autres sommets. Si l'on donne deux coniques circonscrites, nous projetterons de A et de B tous les points de l'une sur l'autre; nous aurons ainsi sur cette dernière deux ponctuelles projectives qui auront pour points correspondants communs les deux autres sommets C,D du quadrangle polaire ; on obtient la droite $\overline{CD}$ ou $u$, au moyen d'une construction connue (page 174), même quand C et D sont imaginaires. Le quadrangle polaire est donc également déterminé complètement par deux coniques qui lui sont circonscrites; toutes les coniques qui lui sont circonscrites portent donc $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$.

183. En nous appuyant sur ces remarques et sur les théorèmes du nº 179, nous pouvons maintenant démontrer l'important théorème qui suit; il lie entre eux de la manière la plus intime les systèmes ponctuels et tangentiels de coniques de troisième espèce avec ceux de première espèce[1].

*Un faisceau tangentiel de coniques est toujours lié à un système ponctuel linéaire de coniques de troisième espèce de telle manière que chaque courbe du faisceau*

*Un faisceau ponctuel de coniques est toujours lié à un système tangentiel linéaire de coniques de troisième espèce de telle manière que chaque courbe du faisceau*

1. Ce théorème est dû à M. H. J. Stephen Smith; voir le mémoire de M. Rosanes, *sur des systèmes de coniques* (Mathematische Annalen, t. VI, page 264).

*tangentiel repose sur chacune des courbes du système.*

*porte toutes les courbes du système.*

Soient $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$ les deux courbes de seconde classe qui reposent sur toutes les coniques du système ponctuel linéaire de troisième espèce et qui le déterminent (n° 178). Dans le système, nous choisissons quatre coniques $k,l,m,n$ de telle sorte que $k,l$ et $m$ passent par un point réel quelconque P et se coupent deux à deux suivant trois quadrangles polaires communs à $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$, différents les uns des autres $(kl)$, $(km)$, $(lm)$ ; et que la quatrième conique $n$ ne passe pas par P, mais soit coupée par $k$ suivant un quadrangle polaire $(kn)$ commun à $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$, ayant deux ou quatre sommets réels. Enfin nous désignons par $\delta^2$ une conique quelconque du faisceau tangentiel, différente de $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$, qui repose sur $k,l,m,n$ (nos 178 et 179). Nous démontrerons le théorème de gauche, en prouvant que toute conique du système ponctuel linéaire de troisième espèce, par exemple celle qui passe par trois points réels quelconques A,B,C (n° 178) porte toujours la courbe $\delta^2$ indépendamment de $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$.

184. Les quadrangles $(kl)$, $(km)$, $(lm)$ et $(kn)$ sont aussi des quadrangles polaires de $\delta^2$, puisque $\delta^2$ repose sur chacune des quatre coniques $k,l,m,n$ ; $\delta^2$ repose donc aussi sur les quatre coniques qui sont circonscrites à ces quatre quadrangles polaires et qui passent par le point arbitraire A. Trois de ces nouvelles coniques sont circonscrites au quadrangle polaire de $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$ déterminé par P et A (n° 182) ; la quatrième ne passe pas par P, si, comme nous pouvons le supposer, A n'est pas situé sur $k$; elle coupe donc les trois premières suivant trois quadrangles polaires différents communs à $\gamma^2,\gamma_1{}^2$ et $\delta^2$. Parmi les quatre coniques qui passent par le point B et qui sont circonscrites à ces trois quadrangles polaires et au quadrangle polaire de $\gamma^2,\gamma_1{}^2$ et $\delta^2$, déterminé par A et P, il y en a au moins deux, différentes entre elles, qui portent les courbes $\gamma^2,\gamma_1{}^2$ et $\delta^2$ ; elles se coupent suivant le quadrangle polaire commun de $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$ dont A et B sont deux sommets réels et qui est aussi un quadrangle polaire de $\delta^2$ ; et la conique, passant par le point C et circonscrite à ce dernier quadrangle polaire, porte donc aussi la courbe $\delta^2$. Le théorème de gauche (n° 183) se trouve ainsi démontré.

185. Deux courbes de seconde classe $\gamma^2$ et $\gamma_1{}^2$ du plan déterminent

Deux courbes du second ordre $k^2$ et $k_1{}^2$ du plan déterminent non

non seulement un système ponctuel linéaire de coniques de troisième espèce, mais encore un faisceau tangentiel de coniques, dont elles font partie, et dont les courbes reposent sur toutes les courbes du système.

seulement un système tangentiel linéaire de coniques de troisième espèce, mais encore un faisceau ponctuel de coniques dont elles font partie, et sur les courbes duquel reposent toutes les courbes du système.

Le système renferme un nombre infini de coniques qui se décomposent en couples de rayons ; une droite quelconque $s$ du plan et la droite $s'$ qui joint les pôles de $s$ par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$, constitue un de ces couples de rayons $s,s'$. Elle porte toutes les courbes du faisceau tangentiel de coniques et ses rayons sont conjugués par rapport à chacune de ces courbes (n° 176). De là résulte que :

Les pôles d'une droite $s$ par rapport à toutes les courbes d'un faisceau tangentiel de coniques sont situés sur une droite $s'$ ; cette dernière forme avec $s$ un couple de rayons appartenant au système ponctuel linéaire de coniques du troisième ordre correspondant.

Les polaires d'un point S par rapport à toutes les courbes d'un faisceau ponctuel de coniques passent par un même point S' ; ce dernier forme avec S un couple de points appartenant au système tangentiel linéaire de coniques du troisième ordre correspondant.

En particulier, les centres de toutes les coniques du faisceau tangentiel sont situés sur une même droite.

186. Soit $s$ une tangente commune à $\gamma_1^2$ et $\gamma^2$ ; elle coïncide avec $s'$, c'est donc une droite double du système et elle est conjuguée à elle-même par rapport à toutes les courbes du faisceau tangentiel. Donc :

Une droite tangente à deux coniques quelconques du faisceau tangentiel est une tangente commune à toutes les courbes de ce faisceau et une droite double du système ponctuel linéaire correspondant de troisième espèce. Toutes les coniques inscrites dans un même qua-

Un point par lequel passent deux coniques quelconques du faisceau ponctuel est un point commun à toutes les courbes de ce faisceau et un point double du système tangentiel linéaire correspondant de troisième espèce. Toutes les coniques circonscrites à un

drilatère constituent un faisceau tangentiel de coniques ; le système ponctuel correspondant de troisième espèce contient toutes les coniques pour lesquelles le quadrilatère en question est un quadrilatère polaire (n° 179).

même quadrangle constituent un faisceau ponctuel de coniques ; le système tangentiel correspondant de troisième espèce contient toutes les coniques pour lesquelles le quadrangle en question est un quadrangle polaire.

187. Lorsqu'une droite $s$ pivote autour d'un point A, ses pôles par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ décrivent deux ponctuelles $a$ et $a_1$ projectives au faisceau A et la droite $s'$ qui joint ces pôles décrit en général un faisceau de rayons du second ordre. Ce faisceau renferme tous les rayons conjugués aux rayons de A par rapport au faisceau tangentiel de coniques (n° 185) ; il contient aussi les polaires $a$, $a_1$... de A par rapport à $\gamma^2$, $\gamma_1^2$ et par rapport à toute autre courbe du faisceau tangentiel. On peut construire ces polaires en déterminant les pôles de deux rayons $g$ et $h$ de A par rapport à chacune des courbes du faisceau tangentiel et en joignant ces pôles. Comme les droites ainsi déterminées appartiennent à un faisceau de rayons du second ordre, ainsi qu'on vient de le faire voir, il en résulte que (n° 185) :

Les pôles de deux droites quelconques $g$, $h$, par rapport à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel de coniques, sont des points homologues de deux ponctuelles projectives du premier ordre, $g_1$, $h_1$ ; les polaires d'un point A sont situées en général sur un faisceau de rayons du second ordre, dont les rayons sont conjugués à ceux de A par rapport au faisceau tangentiel de coniques.

Les polaires de deux points quelconques par rapport à chacune des courbes d'un faisceau ponctuel de coniques sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs de rayons du premier ordre ; les pôles d'une droite $a$ sont situés en général sur une courbe du second ordre, dont les points sont conjugués à ceux de la droite $a$ par rapport au faisceau ponctuel de coniques.

D'après cela, les centres de toutes les courbes appartenant à un faisceau ponctuel de coniques sont situés en général sur une courbe du second ordre.

En vertu de ces théorèmes, nous pouvons poser les définitions suivantes :

Quatre coniques d'un faisceau tangentiel sont dites *harmoniques* quand les pôles d'une droite quelconque par rapport à ces courbes sont quatre points harmoniques.

Quatre coniques d'un faisceau ponctuel sont dites *harmoniques*, quand les polaires d'un point quelconque par rapport à ces courbes sont quatre rayons harmoniques.

On peut d'après cela rapporter projectivement les faisceaux tangentiels et ponctuels de coniques entre eux et avec les formes élémentaires.

188. Par un point A passent en général deux rayons conjugués par rapport au faisceau tangentiel de coniques (n° 187). Il s'ensuit que:

Les couples de tangentes, qu'on peut mener d'un point quelconque A aux courbes d'un faisceau tangentiel de coniques, sont des couples de rayons conjugués d'un faisceau A en involution. Les deux rayons doubles de ce faisceau sont conjugués par rapport au faisceau tangentiel de coniques et sont tangents en A à chaque courbe de ce faisceau tangentiel.

Les couples de points, suivant lesquels une droite quelconque $a$ coupe les courbes d'un faisceau ponctuel de coniques, sont des couples de points conjugués d'une ponctuelle $a$ en involution. Les deux points doubles de cette ponctuelle sont conjugués par rapport au faisceau ponctuel de coniques; et la droite $a$ est tangente en ces points à deux courbes du faisceau.

189. Le faisceau tangentiel de coniques est déterminé par quatre coniques quelconques du système ponctuel linéaire de troisième espèce sur lequel il repose (n$^{os}$ 178, 183) et en particulier par quatre de ses couples de rayons. Si l'on choisit ces couples de rayons de manière que leurs quatre points d'intersection soient situés sur une droite quelconque $l$, on voit immédiatement que $l$ est tangente à une seule courbe du faisceau tangentiel; ce dernier doit en effet être aussi tangent aux quatre droites qui sont harmoniquement séparées de $l$ par les quatre couples de rayons (n° 176). Étant données deux courbes $\gamma^2$ et $\gamma^2$ du faisceau tangentiel, on peut facilement mener de chaque point A de $l$ une tangente à cette troisième courbe en vertu du théorème précédent (n° 188). Donc :

Une droite quelconque n'est tangente qu'à une seule courbe du

Par un point quelconque du plan il ne passe qu'une seule courbe

faisceau tangentiel de coniques; mais par un point quelconque on peut mener deux de ces courbes (n° 188).

du faisceau ponctuel de coniques; mais une droite quelconque est toujours tangente à deux de ces courbes.

Le faisceau tangentiel de coniques renferme donc une parabole, quand toutes ses courbes ne sont pas des paraboles; le faisceau ponctuel de coniques peut comprendre deux paraboles.

190. Une droite $u$, dont les pôles par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ coïncident en un même point U (n° 61), forme avec chaque rayon passant par U un couple de rayons du système ponctuel de coniques de troisième espèce et elle est la polaire de U par rapport à toutes les courbes du faisceau tangentiel de coniques (voir n° 185). En ayant égard au n° 155, il suit de là que :

*Les courbes d'un faisceau tangentiel ou ponctuel de coniques ont en général un triangle polaire commun.*

Ce triangle est réel et facile à construire, quand deux quelconques des coniques ont quatre points ou quatre tangentes réelles communes (pages 100 et 101); dans tous les cas, il a au moins un côté réel $u$ et un sommet réel U.

Lorsque les coniques $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ ne sont pas tangentes, U ne se trouve pas sur sa polaire $u$; lorsque, de plus, le triangle polaire UVW commun à et $\gamma_1^2$ est imaginaire, les deux points V et W de $u$, qui sont conjugués par rapport aux deux coniques, ne peuvent pas être réels. Les couples de points que $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ ont en commun avec $u$ doivent donc, dans ces deux cas, être réels et se séparer mutuellement (page 181) et chacune des coniques $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ comprend dans son intérieur une partie de l'autre. On déduit de là et de ce qui précède, que :

*Lorsque le triangle polaire commun d'un faisceau tangentiel ou ponctuel de coniques est imaginaire, les coniques prises deux à deux ont seulement deux points ou tangentes réelles en commun. Les deux tangentes se coupent sur le côté réel* u *du triangle polaire et les deux points sont situés sur une même droite avec le sommet réel U.*

Car s'il en était autrement, le point où la droite qui joint les deux points est coupée par $u$ serait, par rapport aux deux coniques, conjugué au point U et à un autre point de la droite précédente; il existerait donc un second sommet réel du triangle polaire, et ce triangle serait réel.

191. Si une droite $s$ pivote autour d'un point P de la droite $u$, ses deux pôles par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ décrivent deux ponctuelles projectives qui ont le point U correspondant commun; la droite qui joint ces deux pôles pivote par conséquent autour d'un point P′ et, comme les deux pôles de $\overline{PU}$ sont situés sur $u$, P′ est aussi un point de $u$. Menons maintenant par P une conique quelconque $k^2$ qui porte les deux coniques $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$, elle doit aussi passer par P′; en effet, deux rayons conjugués quelconques de P et P′ la coupent suivant un quadrangle polaire commun à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ (nº 175, 2º) et comme il y a au moins deux côtés de ce quadrangle polaire, différents de $u$, qui passent par P, les côtés opposés qui leur sont conjugués (et par suite aussi $k^2$) doivent passer par P′. Or, comme un faisceau ponctuel de coniques, circonscrit à un quadrangle polaire quelconque de $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$, coupe $u$ suivant une ponctuelle en involution, il en résulte que :

Tout côté réel $u$ du triangle polaire commun à un faisceau tangentiel de coniques coupe les courbes et les couples de rayons du système ponctuel correspondant de coniques de troisième espèce, suivant les couples de points conjugués P, P′ d'une ponctuelle involutive $u$. Les points doubles de cette ponctuelle constituent un couple de points appartenant au faisceau tangentiel de coniques, puisqu'ils sont conjugués par rapport à toutes les courbes du système ponctuel de coniques.

De tout sommet réel U du triangle polaire commun à un faisceau ponctuel de coniques partent les tangentes aux courbes ou les droites passant par les couples de points du système tangentiel correspondant de coniques du troisième ordre; ces couples de droites sont les rayons d'un faisceau U en involution. Les rayons doubles de ce faisceau constituent un couple de rayons appartenant au faisceau ponctuel de coniques, puisqu'ils sont conjugués par rapport à toutes les courbes du système tangentiel de coniques.

192. Les faisceaux de rayons P et P′ (nº 191) sont projectifs, lorsqu'à chaque rayon de l'un on fait correspondre le rayon de l'autre qui lui est conjugué par rapport à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$; ils engendrent une courbe du second ordre qui a $\overline{PU}$ et $\overline{P'U}$ pour tangentes en P et P′. Supposons le triangle polaire réel, cette courbe passe par les points doubles des deux ponctuelles involutives $v$ et $w$ formées sur les deux autres côtés du

triangle polaire; et si les points doubles de la ponctuelle $u$ sont imaginaires, si par suite P et P' sont séparés par $v$ et $w$, l'une des deux ponctuelles $v$ et $w$ a deux points doubles réels communs avec la courbe et l'autre au contraire a deux points doubles imaginaires. Les rayons issus d'un point double réel O de $u$, $v$ ou $w$ sont accouplés involutivement de sorte que deux rayons correspondants dans O sont conjugués par rapport aux deux coniques $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$; et O est le point d'intersection de deux tangentes (réelles ou imaginaires) communes à ces deux coniques; ces tangentes sont les rayons doubles du faisceau involutif de rayons O.

Si le triangle polaire commun de $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ est imaginaire, deux tangentes réelles communes à $\gamma^2$ et $\gamma_1^2$ se coupent en un point O de son côté réel $u$ (n° 190); d'où résulte que, dans ce cas, la ponctuelle involutive $u$ a deux points doubles réels. De tout ceci l'on conclut que:

Le faisceau tangentiel de coniques renferme au moins un couple de points réels et en général au plus trois; ses trois couples de points (même quand deux d'entre eux sont imaginaires) sont situés sur les trois côtés du triangle polaire du faisceau tangentiel et ils constituent les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère réel ou imaginaire, inscrit au faisceau tangentiel de coniques.

Le faisceau ponctuel de coniques renferme au moins un couple de rayons réels, et en général au plus trois; ses trois couples de rayons (même quand deux d'entre eux sont imaginaires) se coupent aux trois sommets du triangle polaire du faisceau ponctuel, et ils constituent les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle réel ou imaginaire, circonscrit au faisceau ponctuel de coniques.

193 En dehors des divers états transitoires des faisceaux, dont les courbes sont tangentes ou osculatrices en un point, nous distinguerons :

Trois variétés principales de faisceaux tangentiels de coniques, suivant que leurs courbes ont en commun quatre tangentes réelles, deux ou pas du tout. Les faisceaux tangentiels de la seconde variété sont les seuls qui aient un triangle polaire imaginaire (n° 190) et ceux

Trois variétés principales de faisceaux ponctuels de coniques, suivant que leurs courbes ont en commun quatre points réels, deux ou pas du tout. Les faisceaux ponctuels de la seconde variété sont les seuls qui aient un triangle polaire imaginaire et ceux de la

de la première variété contiennent seuls trois couples de points réels.

Deux coniques d'un faisceau tangentiel de la première ou de la troisième variété n'ont aucun point d'intersection réel ou elles en ont quatre; deux coniques d'un faisceau tangentiel de la seconde variété ont toujours deux points d'intersection réels (n° 190).

Si toutes les courbes d'un faisceau tangentiel de coniques se décomposent en couples de points, ce qui est possible de deux manières, le faisceau est de nature particulière; il en est de même quand il renferme un point double. Conformément à cela, toutes les coniques qui passent par les points doubles, réels ou imaginaires, d'une ponctuelle involutive, ou par rapport auxquelles un point quelconque a une polaire donnée, constituent un système ponctuel linéaire de coniques de troisième espèce, de nature particulière; un pareil système est encore particularisé, quand toutes ses coniques ont un point commun.

première variété contiennent seuls trois couples de rayons réels.

Deux coniques d'un faisceau ponctuel de la première ou de la troisième variété n'ont aucune tangente commune réelle ou en ont quatre; deux coniques d'un faisceau ponctuel de la seconde variété ont toujours deux tangentes communes réelles.

Si toutes les courbes d'un faisceau ponctuel de coniques se décomposent en couples de rayons, le faisceau est de nature particulière; il en est de même quand il contient une droite double. Conformément à cela, toutes les coniques qui sont tangentes aux rayons doubles, réels ou imaginaires d'un faisceau de rayons en involution, ou par rapport auxquelles une droite quelconque a un pôle donné, constituent un système tangentiel linéaire de coniques de troisième espèce, de nature particulière; un pareil système tangentiel est encore particularisé, quand toutes ses coniques ont une tangente commune.

194. Tous les cercles du plan forment un système ponctuel linéaire de la troisième espèce et de nature particulière; le faisceau tangentiel de coniques correspondant est la ponctuelle involutive, suivant laquelle la droite à l'infini coupe un faisceau rectangulaire de rayons. Des coniques homofocales constituent un faisceau tangentiel de coniques de la troisième variété; leurs deux foyers sont le seul couple de points réels de ce faisceau et le système ponctuel linéaire correspondant de troi-

sième espèce se compose de toutes les hyperboles équilatères par rapport auxquelles les deux foyers sont conjugués. Tous les cercles passant par deux points réels forment un faisceau ponctuel de coniques de la seconde variété; et tous les cercles qui leur sont orthogonaux donnent un faisceau ponctuel de la troisième variété. Toutes les coniques ayant pour foyer un point donné F appartiennent à un système tangentiel particulier de troisième espèce; les coniques du faisceau ponctuel correspondant se décomposent en couples de rayons qui se coupent rectangulairement en F.

---

## SYSTÈMES LINÉAIRES PONCTUELS ET TANGENTIELS DE CONIQUES DE DEUXIÈME ESPÈCE[1].

195. Trois courbes de seconde classe $\gamma^2, \gamma_1^2, \gamma_2^2$, situées dans un même plan, mais n'appartenant pas à un même faisceau tangentiel de coniques, déterminent un système ponctuel linéaire de coniques de seconde espèce (un réseau ponctuel de coniques) sur les courbes duquel elles reposent (n° 178, 179.)

Trois courbes du second ordre, situées dans un même plan, mais n'appartenant pas à un même faisceau ponctuel de coniques, déterminent un système tangentiel linéaire de coniques de seconde espèce (un réseau tangentiel de coniques) dont les courbes reposent sur elles.

Toutes les coniques de ce réseau qui, en dehors de ces trois premières courbes de seconde classe, en portent encore une quatrième prise arbitrairement, par exemple un point double, forment (n° 178) un faisceau ponctuel de coniques.

De là résulte que (voir n° 189) :

Par chaque point du plan passe un faisceau ponctuel de coniques du réseau ponctuel; par deux points quelconques, il ne passe en

A toute droite du plan est tangent un faisceau tangentiel de coniques du réseau tangentiel ; il n'y a en général qu'une seule conique

1. Voir Schröter, *Théorie des coniques*, 2e édition, pages 500-535 (Leipzig, 1876).

général qu'une seule conique du réseau.

du réseau tangente à deux droites quelconques.

196. Les trois courbes $\gamma^2, \gamma_1^2, \gamma_2^2$, prises deux à deux déterminent un système ponctuel linéaire de coniques de troisième espèce, qui contient le réseau ponctuel, et en même temps un faisceau tangentiel de coniques dont les courbes reposent sur toutes les courbes de ce système et par suite aussi sur celles du réseau (n° 185). Le réseau ponctuel porte donc les trois faisceaux tangentiels de coniques déterminés par $\gamma^2, \gamma_1^2, \gamma_2^2$; mais il porte aussi tout quatrième faisceau tangentiel qui contient deux courbes quelconques de ces trois premiers faisceaux. Tous ces faisceaux tangentiels sont compris dans le réseau tangentiel qui est déterminé par trois courbes quelconques du réseau ponctuel, car ils reposent sur chacune de ces trois courbes; on démontre aussi sans difficulté que toute courbe du réseau tangentiel appartient à une infinité de ces faisceaux tangentiels et conséquemment repose sur chaque courbe du réseau ponctuel. On déduit de là ce théorème important :

*Tout réseau tangentiel de coniques est toujours lié avec un réseau ponctuel de coniques (et réciproquement), de telle manière que chaque courbe du réseau tangentiel repose sur chacune des courbes du réseau ponctuel. Trois courbes quelconques du réseau ponctuel ou tangentiel suffisent pour déterminer cet ensemble de coniques.*

Le réseau ponctuel et le réseau tangentiel, dont il va être question dans les théorèmes qui suivent, sont liés entre eux de la manière qu'on vient d'indiquer, en sorte que le réseau tangentiel repose sur le réseau ponctuel.

197. Le réseau ponctuel de coniques contient une infinité de couples de rayons qui, en général, enveloppent une courbe de troisième classe $\Gamma^3$, et qui se coupent deux à deux suivant des quadrangles polaires (communs) de $\gamma^2, \gamma_1^2, \gamma_2^2$ et du réseau tangentiel correspondant (n° 172). Les rayons d'un pareil couple sont conjugués par rapport au réseau tangentiel, c'est-à-dire par rapport à toutes les courbes de ce réseau (n° 176), et les pôles de l'un des rayons par rapport à ces courbes sont, d'après cela, tous situés sur l'autre rayon. Deux quadrangles polaires quelconques du réseau tangentiel sont toujours inscrits dans une courbe du réseau; en effet, la conique qui est circonscrite à l'un des quadrangles polaires et qui passe par un sommet U de l'autre doit appartenir au faisceau ponctuel de coniques passant par U, qui fait

partie du réseau ponctuel et, par conséquent, elle doit aussi passer par les trois autres sommets du second quadrangle polaire. On voit aussi que :

198. Le réseau tangentiel de coniques contient un nombre infini de couples de points; ces points sont en général situés sur une courbe du troisième ordre $C^3$, et deux couples quelconques d'entre eux sont deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère polaire du réseau ponctuel de coniques correspondant. Les points de chacun de ces couples sont conjugués par rapport au réseau ponctuel, c'est-à-dire par rapport à toutes les courbes de ce réseau et les polaires de l'un de ces points par rapport à ces courbes passent toutes par l'autre point. Chaque couple de points du réseau, tangentiel est harmoniquement séparé par chaque couple de rayons du réseau ponctuel. Deux quadrilatères polaires quelconques de ce dernier sont toujours circonscrits à une courbe du réseau tangentiel.

199. Trois couples quelconques de rayons, qui ne constituent pas les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet, déterminent le réseau ponctuel de coniques, conjointement avec le réseau tangentiel correspondant (n° 196). Circonscrivons un faisceau ponctuel de coniques au quadrangle polaire du réseau tangentiel suivant lequel deux de ces couples de rayons se rencontrent et coupons les courbes de ce faisceau par le troisième couple de rayons; nous obtiendrons tous les quadrangles polaires du réseau tangentiel, dont les sommets sont situés sur ce troisième couple de rayons (n° 197), et par suite aussi tous les couples de rayons du réseau ponctuel et la courbe de troisième classe $\Gamma^3$ qu'ils enveloppent. Or, comme ce troisième couple de rayons est l'un quelconque de ceux qui font partie du réseau ponctuel, et comme ses rayons sont coupés par le faisceau ponctuel de coniques suivant deux ponctuelles involutives, on voit que :

*Chaque tangente de la courbe de troisième classe* $\Gamma^3$ *est coupée par les coniques du réseau ponctuel, suivant des couples de points d'une ponctuelle involutive. Les points doubles de cette ponctuelle constituent un couple de points du réseau tangentiel et sont situés sur la courbe* $C^3$. En effet, ils sont conjugués par rapport à toutes les courbes du réseau ponctuel, puisqu'ils sont harmoniquement séparés par trois quelconques d'entre elles.

200. De la même manière, trois couples de points, qui ne constituent pas les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet,

déterminent le réseau tangentiel conjointement avec le réseau ponctuel de coniques et l'on peut en déduire tous les autres couples de points du réseau tangentiel et la courbe du troisième ordre $C^3$ sur laquelle ils sont situés.

*Les couples de tangentes qu'on peut mener d'un point quelconque P de la courbe du troisième ordre $C^3$ aux coniques du réseau tangentiel sont des couples de rayons conjugués d'un faisceau involutif de rayons. Les rayons doubles de ce faisceau constituent un couple de rayons du réseau ponctuel et sont tangents à la courbe $\Gamma^3$.*

Les couples de points du réseau tangentiel sont projetés d'un point quelconque P de $C^3$ suivant des couples de rayons conjugués d'un faisceau involutif.

Une tangente quelconque de $\Gamma^3$ coupe les couples de rayons du réseau ponctuel suivant des couples de points conjugués d'une ponctuelle involutive.

Les points d'intersection de tous les couples de rayons du faisceau ponctuel sont situés sur $C^3$ ; au contraire, $\Gamma^3$ est l'enveloppe de toutes les droites qui joignent les couples de points du réseau tangentiel (voir aussi n° 205).

201. Les points de $C^3$ sont conjugués deux à deux par rapport au réseau ponctuel et les tangentes de $\Gamma^3$ sont conjuguées deux à deux par rapport au réseau tangentiel (n^os^ 197 et 108). Nous dirons que :

Trois points de $C^3$, dont les conjugués sont situés sur une même droite, forment un *terne de points* de $C^3$.

Trois tangentes de $\Gamma^3$, dont les conjuguées passent par un même point, forment un *terne de tangentes* de $\Gamma^3$.

Comme deux couples de points du réseau tangentiel constituent toujours deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère polaire du réseau ponctuel, quadrilatère qu'ils déterminent (n° 198), on voit immédiatement que :

Les trois points de tout terne de $C^3$ constituent avec leurs conjugués les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère polaire du réseau ponctuel ; tout quadrilatère

Les trois tangentes de tout terne de $\Gamma^3$ constituent avec leurs tangentes conjuguées les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle polaire du système tangentiel ; tout

polaire du réseau ponctuel renferme quatre ternes de points de $C^3$. Deux points quelconques de $C^3$ déterminent un terne de points de cette courbe du troisième ordre. Les points de $C^3$ situés deux à deux sur des droites passant par un point donné $P_1$ de $C^3$, forment avec le point P conjugué à $P_1$ un terne de points de $C^3$.

quadrangle polaire du réseau tangentiel renferme quatre ternes de tangentes de $\Gamma^3$. Deux tangentes quelconques de $\Gamma^3$ déterminent un terne de tangentes de cette courbe de troisième classe. Les tangentes de $\Gamma^3$ qui se coupent deux à deux sur une tangente donnée $t_1$ de $\Gamma^3$ forment avec la tangente $t$ conjuguée à $t_1$ un terne de tangentes de $\Gamma^3$.

202. Les deux triangles formés par deux ternes quelconques de $C^3$ sont toujours inscrits à une conique du réseau tangentiel (n° 198), puisqu'ils sont situés sur deux quadrilatères polaires du réseau ponctuel (n° 201). Il résulte de là (n° 45) que :

Deux ternes quelconques de points de $C^3$ sont toujours inscrits dans une même courbe du second ordre. — Si donc une conique est circonscrite à un terne de $C^3$ et passe par deux points P et Q de cette courbe, elle est aussi circonscrite au terne de $C^3$ déterminé par P et Q.

Deux ternes quelconques de tangentes de $\Gamma^3$ sont toujours circonscrits à une courbe de seconde classe. — Si donc une conique est inscrite dans un terne de $\Gamma^3$ et si de plus elle est tangente à deux tangentes quelconques $p$ et $q$ de $\Gamma^3$, elle est aussi inscrite au terne de $\Gamma^3$ déterminé par $p$ et $q$.

203. Le second terne (théorème de gauche) coïncide avec le premier quand P et Q se rapprochent indéfiniment de deux points du premier terne de $C^3$ ; il en résulte alors que :

A tout terne de points de $C^3$ on peut circonscrire une conique qui soit tangente à la courbe $C^3$ aux trois points du terne.

Dans tout terne de tangentes de $\Gamma^3$ on peut inscrire une conique qui soit tangente à la courbe $\Gamma^3$ aux points de contact des trois tangentes du terne.

Le dernier théorème du n° 201 nous donne les corollaires suivants :

Si l'on considère un point Q de

Si l'on considère la tangente $s$ de

$C^3$ qui forme un terne de $C^3$ avec deux points conjugués P, $P_1$, les deux tangentes en P et $P_1$ se coupent au point Q.

$\Gamma^3$ qui forme un terne de $\Gamma^3$ avec deux tangentes conjuguées $t$, $t_1$, les points de contact de $t$ et $t_1$ sont situés sur la tangente $s$.

204. En ayant égard au théorème final du n° 201, on déduit du n° 202 que :

Les couples de points de $C^3$ dont la droite de jonction passe par un point donné $P_1$ de $C^3$ sont situés sur une conique du faisceau ponctuel qui est circonscrit à un terne quelconque de $C^3$ et qui passe par le point P conjugué à $P_1$.

Les couples de tangentes de $\Gamma^3$ qui se coupent sur une tangente donnée $t_1$ de $\Gamma^3$ sont tangentes à une conique du faisceau tangentiel qui est inscrit à un terne quelconque de $\Gamma^2$ et qui est tangent à la tangente $t$ conjuguée à $t_1$.

Le faisceau de rayons $P_1$ et le faisceau ponctuel de coniques (théorème de gauche) sont rapportés projectivement l'un à l'autre par les couples de points de $C^3$ de telle manière qu'ils engendrent la courbe $C^3$. De même, la ponctuelle $t_1$ et le faisceau tangentiel de coniques (théorème de droite), rapportés projectivement l'un à l'autre au moyen des couples de tangentes de $\Gamma^3$, engendrent $\Gamma^3$. Mais ce n'est pas ici le lieu de démontrer l'exactitude de cette remarque faite en passant.

205. Les côtés du quadrangle polaire commun à deux coniques quelconques $k^2$, $k_1{}^2$ du réseau ponctuel appartiennent à un quadrilatère polaire d'une troisième conique quelconque $k_2{}^2$ du réseau, quadrilatère qu'ils déterminent (n° 168). Ce dernier est donc un quadrilatère polaire commun à $k^2$, $k_1{}^2$, $k_2{}^2$ et par conséquent un quadrilatère polaire du réseau ponctuel. Il en résulte (voir n° 201) que :

Le triangle polaire commun à deux coniques quelconques du réseau ponctuel est toujours un terne de points de $C^3$. En particulier, les trois couples de côtés opposés de chaque quadrangle polaire du réseau tangentiel se coupent suivant un terne de points de $C^3$.

Le triangle polaire commun à deux coniques quelconques du réseau tangentiel est toujours un terne de tangentes de $\Gamma^3$. En particulier, les trois couples de sommets opposés de chaque quadrilatère polaire du réseau ponctuel sont situés sur un terne de tangentes de $\Gamma^3$.

La première partie de ce théorème donne lieu à une proposition réciproque. On démontre facilement aussi que tout point dont les polaires, par rapport à deux courbes du réseau ponctuel, coïncident, est situé sur $C^3$ et que toute droite dont les pôles, par rapport à deux courbes du réseau tangentiel, coïncident, est tangente à la courbe $\Gamma^3$.

206. Toutes droites qui coupent trois coniques quelconques données dans un plan suivant une involution de points enveloppent une courbe de troisième classe $\Gamma^3$ (n° 199); cette courbe est aussi tangente aux six sécantes communes de deux quelconques des trois coniques (n° 197).

Tous les points d'où les tangentes menées à trois coniques quelconques données dans le plan forment une involution sont situés sur une courbe du troisième ordre $C^3$ (n° 200); cette courbe passe aussi par les six points d'intersection des tangentes communes à deux quelconques des trois coniques (n° 198).

207. Puisque deux points conjugués $Q, Q_1$ de la courbe $C^3$ sont harmoniquement séparés par deux quelconques des tangentes conjuguées de $\Gamma^3$ (n° 198) et puisque le point $Q_1$ de $C^3$, qui est situé sur la même droite que deux points conjugués $P, P_1$, a pour conjugué le point $Q$ d'intersection des tangentes en $P$ et $P_1$ (n$^{os}$ 203 et 201), il s'ensuit que :

Toute tangente de $C^3$ forme un faisceau harmonique avec les trois tangentes que l'on peut mener de son point de contact à la courbe $\Gamma^3$.

Tout point de $\Gamma^3$ forme une ponctuelle harmonique avec les trois points où sa tangente coupe la courbe $C^3$.

La tangente de $C^3$ est harmoniquement séparée de $\overline{PP_1}$ par deux tangentes conjuguées de la courbe $\Gamma^3$. Si $P_1$ est un point d'inflexion de $C^3$, $Q$ coïncide avec $P_1$ et $\overline{PP_1}$ est tangente à $C^3$ en $P$ et réciproquement.

Or, d'après le théorème de droite, le point où $\overline{PP_1}$ est tangente à $\Gamma^3$, coïncide aussi avec $P$. D'où ce théorème :

*Les courbes $C^3$ et $\Gamma^3$ sont tangentes en tous leurs points communs; la tangente en tout point commun $P$ coupe la courbe $C^3$ en l'un de ses points d'inflexion $P_1$ et est coupée en $P$ par l'une des tangentes de rebroussement de la courbe $\Gamma^3$.*

208. Le réseau tangentiel renferme un faisceau tangentiel de paraboles (n° 195), dont les foyers sont situés sur un cercle et dont les directrices se coupent en un point K (voir n° 125). Le réseau ponctuel contient en général un cercle (dont le centre est K), un faisceau ponctuel d'hyperboles équilatères et une infinité de paraboles, dont il passe au plus deux par un point quelconque (n$^{os}$ 195 et 189).

209. Le réseau tangentiel se particularise quand il renferme un double point Z; ce point est un point double de $C^3$; toutes les coniques du réseau ponctuel correspondant, qui est lui-même particularisé, passent par ce point et la courbe $\Gamma^3$ se décompose dans le faisceau de rayons Z et dans la courbe $\Gamma^2$ de seconde classe dont les tangentes sont conjuguées aux rayons de Z par rapport à deux courbes quelconques du réseau tangentiel. Le faisceau de rayons Z et le faisceau des tangentes de $\Gamma^2$ sont projectifs et engendrent la courbe $C^3$ (n° 200). Les réseaux tangentiel et ponctuel sont aussi d'espèce particulière quand le réseau ponctuel renferme une droite double $z$; cette droite est une tangente double de $\Gamma^3$, elle est tangente à toutes les coniques du réseau tangentiel, et la courbe $C^3$ se décompose en cette droite et en une courbe du second ordre.

210. Le réseau tangentiel est encore d'espèce particulière quand il contient tous les couples de points d'une ponctuelle $u$ en involution. Les coniques du réseau ponctuel passent alors toutes par les deux points doubles de $u$, la courbe $\Gamma^3$ se décompose en ces deux points doubles et le pôle U de $u$ par rapport à une courbe quelconque $\gamma^2$ du réseau tangentiel, et $C^3$ se décompose en la droite $u$ et en une courbe du second ordre (voir n° 117). La droite $u$ est conjuguée à tous les rayons du faisceau U par rapport au réseau tangentiel, et par U passe une sécante commune de deux quelconques des coniques du réseau ponctuel. En particulier, si la ponctuelle involutive $u$ est l'intersection d'un faisceau rectangulaire de rayons par la droite de l'infini, le réseau ponctuel se compose uniquement de cercles (voir n° 194) et l'on trouve que :

211. Tous les cercles qui portent une courbe donnée $\gamma^2$ de seconde classe, c'est-à-dire qui peuvent être circonscrits à ses triangles et quadrangles polaires, forment un réseau ponctuel particulier de coniques. Les sécantes, qui sont communes à ces cercles pris deux à deux, se coupent au centre U de $\gamma^2$ ou sont parallèles, si $\gamma^2$ est une parabole. Si $\gamma^2$ est une ellipse ou une hyperbole, les produits des segments déter-

minés par les cercles sur les sécantes issues du centre U sont constants ; les cercles ont donc même *puissance* en U et il existe un cercle, concentrique à $\gamma^2$, qui coupe orthogonalement tous les cercles du réseau ponctuel (il est imaginaire pour les hyperboles obtusangles). Si au contraire $\gamma^2$ est une parabole, les centres de tous les cercles du réseau ponctuel sont situés sur une même droite. Tout point de cette droite, ou de ce cercle orthogonal concentrique à $\gamma^2$, peut être considéré comme un cercle infiniment petit du réseau et nous en concluons que de ce point l'on peut mener à $\gamma^2$ deux tangentes rectangulaires. Les théorèmes de ce numéro ont été découverts par M. Faure.

212. Les théorèmes réciproques à ceux du n° 210 nous donnent, entre autres, la proposition suivante :

Toutes coniques qui ont pour foyer un point donné F et qui reposent sur une courbe $k^2$ du second ordre, forment un réseau tangentiel particulier. Les deux tangentes réelles, communes à deux quelconques d'entre elles, se coupent toujours sur la polaire $f$ de F par rapport à $k^2$. La courbe $\Gamma^3$ se compose de F et d'une courbe de seconde classe; au contraire $C^3$ se décompose en $f$ et les deux rayons doubles imaginaires du faisceau rectangulaire F. Dans tout quadrangle polaire du réseau tangentiel, deux côtés opposés se coupent rectangulairement en F ; les points d'intersection des deux autres couples de côtés opposés sont situés sur $f$. D'une manière générale, $f$ est la polaire de F par rapport à toutes les coniques du réseau ponctuel qui porte le réseau tangentiel.

213. Toutes les coniques qu'on peut circonscrire à un triangle ABC constituent un réseau ponctuel très particulier; ABC est un triangle polaire commun à toutes les courbes du réseau tangentiel correspondant ; les courbes $\Gamma^3$ et $C^3$ se réduisent respectivement aux trois sommets et aux trois côtés du triangle.

Les coniques, dont ABC est un triangle polaire, ne constituent pas seulement un réseau tangentiel très particulier, mais elles donnent aussi naissance à un réseau ponctuel également particulier; ce dernier porte le réseau tangentiel qui peut être inscrit dans le triangle.

# TABLE DES MATIÈRES



PROBLÈMES DE CONSTRUCTION ET THÉORÈMES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

273. — Paris. Imprimerie A. Lahure, rue de Fleurus, 9.

LEÇONS

SUR LA

# GÉOMÉTRIE DE POSITION

# GÉOMÉTRIE DE POSITION

---

## DEUXIÈME PARTIE.

---

## PREMIÈRE LEÇON.

**Formes fondamentales collinéaires et réciproques de seconde espèce.**

Les systèmes plans et les gerbes peuvent être rapportés les uns aux autres d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour les formes fondamentales uniformes. En particulier, nous pouvons reproduire ici pour les formes fondamentales de seconde espèce nos considérations sur la perspectivité des formes fondamentales de première espèce. Ainsi nous appellerons perspectifs :

1° Un système plan et une gerbe, quand le système plan est une section de la gerbe et, réciproquement, quand la gerbe est une projection du système plan ;

2° Deux systèmes plans, quand ils sont les sections d'une seule et même gerbe ;

3° Deux gerbes, quand elles sont les projections d'un seul et même système plan.

L'image ou la projection qu'un paysage plan envoie à notre œil est, d'après cela, une gerbe perspective à ce paysage. Imaginons que nous coupions cette gerbe par un plan, nous obtenons une représentation perspective du paysage ou un deuxième système plan qui est perspectif à ce paysage. Enfin le paysage, considéré de deux points différents, donne deux projections différentes qui sont évidemment deux gerbes perspectives.

Lorsque, dans une série de formes fondamentales de seconde espèce, chaque forme est rapportée perspectivement à la suivante, la première sera rapportée à la dernière de la même manière que dans les formes fondamentales uniformes, puisqu'à chaque élément de l'une correspond un élément déterminé de l'autre ; mais, en général, ces formes ne sont plus perspectives. Étant données deux formes fondamentales de seconde espèce perspectives, par exemple deux systèmes plans, si l'on déplace l'une d'elles par rapport à l'autre, elles restent encore rapportées l'une à l'autre, mais elles perdent leur relation de perspectivité. Toutefois, elles continuent toujours à conserver entre elles une dépendance particulière que Möbius a nommée *collinéation*. Ainsi, dans deux systèmes plans ainsi rapportés l'un à l'autre, à toute forme linéaire correspond une forme linéaire, à tout faisceau de rayons un faisceau de rayons, à toute courbe avec ses tangentes une courbe avec ses tangentes, à tout $n$ — angle un $n$ — angle, etc.

Nous appellerons donc *collinéaires :*

1° Deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$, quand à tout point P de $\Sigma$ correspond un point $P_1$ de $\Sigma_1$, et à toute droite $g$ de $\Sigma$ passant par P une droite $g_1$ de $\Sigma_1$ passant par $P_1$ ;

2° Un système plan $\Sigma$ et une gerbe $S_1$, quand à tout point P de $\Sigma$ correspond un rayon $p_1$ de $S_1$ et à toute droite $g$ de $\Sigma$ passant par P un plan $\gamma$ de $S_1$ passant par $p_1$ ;

3° Deux gerbes S et $S_1$, quand à tout rayon $p$ de S correspond un rayon $p_1$ de $S_1$ et à tout plan $\gamma$ de S passant par $p$ un plan $\gamma_1$ de $S_1$ passant par $p_1$ ;

Et quand, de plus, à toute série d'éléments se succédant d'une manière continue dans l'une des formes correspond une série d'éléments se succédant d'une manière continue dans l'autre.

Nous pouvons aussi, avec Von Staudt, donner de ces conditions une définition plus courte, applicable aussi aux systèmes de l'espace, en disant :

*Deux formes fondamentales de seconde ou de troisième espèce, rapportées l'une à l'autre, sont dites collinéaires si deux éléments d'espèce différente* P *et* g *de l'une,* P *étant situé sur* g, *correspondent respectivement à deux éléments, d'espèce différente* $P_1$ *et* $g_1$ *de l'autre,* $P_1$ *étant aussi situé sur* $g_1$.

Il résulte immédiatement de cette définition que :

*Des formes fondamentales de seconde espèce, qui sont perspectives,*

*sont collinéaires. Si deux formes fondamentales sont collinéaires à une troisième, elles sont aussi collinéaires l'une à l'autre.*

Il est donc aussi démontré en même temps, que dans une suite de formes fondamentales de seconde espèce, dont chacune est perspective à la suivante, deux quelconques d'entre elles sont collinéaires, et en particulier la première et la dernière.

Le mot *collinéaire* a été employé pour la première fois par *Möbius*, dans son remarquable ouvrage « *Der barycentrische Calcul* », pour spécifier les systèmes plans qui sont rapportés entre eux de la manière qu'on vient d'indiquer; cette expression signifie que non seulement tout point de l'un des systèmes correspond à un point de l'autre, mais aussi que toute droite de l'un correspond à une droite de l'autre. On sait en effet qu'on peut encore rapporter entre eux deux systèmes plans de telle manière, par exemple, qu'à un point de l'un corresponde bien un point de l'autre, tandis qu'une droite a pour correspondante une conique.

La loi de réciprocité ou de dualité déjà énoncée précédemment, mais qu'on n'a pas encore démontrée d'une manière générale, nous conduit aussi à un autre genre de relation simple entre des formes fondamentales d'espèce supérieure, à ce qu'on appelle la *relation de réciprocité*.

En effet, nous appellerons *réciproques* :

1° Deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$, quand à chaque point P de $\Sigma$ correspond une droite $p_1$ de $\Sigma_1$ et à chaque droite $g$ de $\Sigma$ passant par P, un point de $G_1$ de $\Sigma_1$ situé sur $p_1$;

2° Un système plan $\Sigma$ et une gerbe $S_1$, quand à chaque point P de $\Sigma$ correspond un plan $\pi_1$ de $S_1$ et à toute droite $g$ de $\Sigma$ passant par P un rayon $g_1$ de $S_1$ situé dans $\pi_1$;

5° Deux gerbes S et $S_1$, quand à tout rayon $g$ de S correspond un plan $\gamma_1$ de $S_1$ et à tout plan $\varepsilon$ de S passant par $g$ un rayon $e_1$ de $S_1$ situé dans $\gamma_1$;

Et quand, de plus, à toute série d'éléments se succédant d'une manière continue dans l'une des formes correspond une série d'éléments se succédant d'une manière continue dans l'autre.

Nous pouvons donner de cette condition de réciprocité une définition plus courte et applicable aussi aux systèmes de l'espace, en disant :

*Deux formes fondamentales de seconde ou de troisième espèce, rapportées l'une à l'autre, sont dites réciproques, si à deux éléments d'espèce différente* P *et* g *de l'une* P, *étant situé sur* g, *correspondent*

*respectivement deux éléments d'espèce différente, $p_1$ et $G_1$ de l'autre, $p_1$ passant par $G_1$.*

Nous démontrerons qu'une relation de ce genre est possible, car son existence ne ressort pas bien clairement et du premier coup comme pour la collinéation ; il n'y a qu'un cas où nous l'ayons déjà établie : c'est celui où il s'agissait des courbes du second ordre ; nous avons fait voir en effet que, par rapport à une conique, à tout point P du plan correspond une droite, qui est sa polaire $p_1$, et qu'à toute droite du plan passant par P correspond un point situé sur $p_1$, qui est le pôle de cette droite.

La démonstration générale renferme celle de la loi de réciprocité; en effet, puisque dans les systèmes réciproques de l'espace, par exemple, à tout point correspond un plan, toute propriété d'un système de points nous donne immédiatement la propriété correspondante du système de plans qui est réciproque à ce système de points.

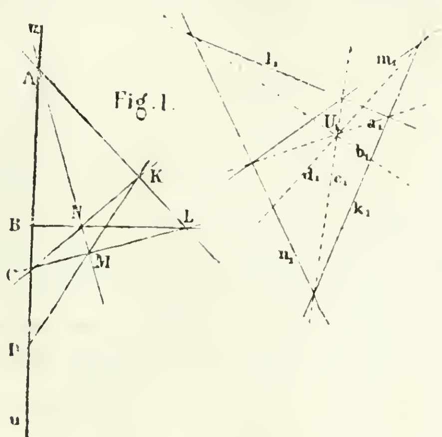
L'étude des formes fondamentales réciproques présente du reste un intérêt et une importance tout particuliers, parce qu'elle comprend celle des formes fondamentales collinéaires, en tant que la situation particulière de ces dernières n'entre pas en jeu. Le théorème suivant fait ressortir cette liaison :

*Lorsque deux formes fondamentales sont réciproques à une troisième, elles sont collinéaires ; et, réciproquement, étant données deux formes fondamentales collinéaires, si l'une d'elles est réciproque à une troisième, il en est aussi de même pour l'autre.*

Supposons, par exemple, que deux systèmes plans $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ soient réciproques à un troisième $\Sigma$; à chaque point P de ce dernier correspond dans chacun des premiers une droite $p_1$ et $p_2$ et à toute droite $g$ de $\Sigma$, passant par P, correspond respectivement dans $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ un point $G_1$ et $G_2$, dont le premier $G_1$ est situé sur $p_1$ et le second $G_2$ sur $p_2$. Donc à toute droite $p_1$ de $\Sigma_1$ correspond une droite $p_2$ de $\Sigma_2$ et à tout point $G_1$ de $\Sigma_1$, situé sur $p_1$, correspond un point $G_2$ de $\Sigma_2$, situé sur $p_2$ ; c'est-à-dire que $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont collinéaires. On étendra d'une manière analogue la première et la seconde partie de ce théorème aux autres cas ; on peut toutefois les ramener immédiatement à celui qu'on vient de traiter, en remarquant qu'à toute gerbe on peut substituer l'une de ses sections planes.

Deux formes fondamentales collinéaires ou réciproques sont aussi appelées *projectives*, parce qu'à toute forme harmonique dans l'une

correspond une forme harmonique dans l'autre. En effet, soient, par exemple, A, B, C, D quatre points harmoniques d'un système plan $\Sigma$, et $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ les quatre rayons correspondants d'un système plan $\Sigma_1$ réciproque à $\Sigma$. Les rayons $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ doivent tout d'abord passer par un même point $U_1$ (fig. 1), puisque A, B, C, D sont situés sur une même droite $u$. Tout quadrangle KLMN de $\Sigma$ dans lequel un couple de côtés opposés se coupent en A et un autre couple en C, tandis que les deux côtés restants passent respectivement par B et D, a pour correspondant dans $\Sigma_1$ un quadrilatère $k_1 l_1 m_1 n_1$, dont deux sommets opposés sont situés sur $a_1$ et $c_1$ et dont les deux autres sont respectivement sur $b_1$ et $d_1$. En conséquence, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ sont réellement quatre rayons harmo-




niques (I, page 45)[1]. Comme exercice, nous conseillons au lecteur de chercher la démonstration correspondante pour les systèmes collinéaires, bien qu'elle soit comprise dans celle que nous venons de donner.

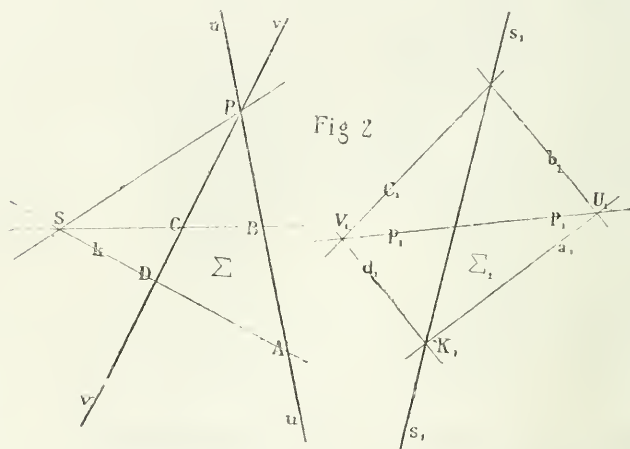
On déduit de ce théorème que :

*Deux formes fondamentales uniformes, qui se correspondent dans des formes fondamentales collinéaires ou réciproques, sont projectives.*

En effet, les deux formes simples se trouvent rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'à quatre éléments harmoniques de l'une correspondent toujours quatre éléments harmoniques de l'autre.

1. Les renvois à la première partie seront tout simplement indiqués par le chiffre I. Le chiffre II s'appliquera à ceux de la seconde.

Ce théorème nous donne un moyen facile de rapporter projectivement l'une à l'autre deux formes fondamentales de seconde espèce. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de rapporter réciproquement entre eux deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ; il faut qu'à tout point de $\Sigma$ corresponde un rayon de $\Sigma_1$, à toute ponctuelle de $\Sigma$ un faisceau projectif de rayons de $\Sigma_1$ et réciproquement. Pour cela, nous prenons dans $\Sigma$ (fig. 2) deux ponctuelles $u$ et $v$ et nous leur faisons correspondre dans $\Sigma_1$ deux faisceaux quelconques de rayons $U_1$ et $V_1$, en rapportant projectivement $u$ à $U_1$ et $v$ à $V_1$ de telle sorte que le point P commun à $u$ et $v$ ait pour correspondant le rayon $p_1$ commun à $U_1$ et $V_1$. Tout rayon $k$ de $\Sigma$, qui ne passe pas par P, coupe alors chacune des droites $u$ et $v$ suivant les points A et D, auxquels correspondent respectivement les rayons $a_1$ et $d_1$ dans




les faisceaux $U_1$ et $V_1$ de $\Sigma_1$ ; et leur point d'intersection $K_1$ est le point qui correspond au rayon $k$. A tous les rayons passant par un point S correspondent tous les points d'une droite $s_1$ ; en effet, les ponctuelles $u$ et $v$ sont rapportées perspectivement l'une à l'autre par le faisceau de rayons S, de telle manière qu'elles ont le point P correspondant commun ; donc les faisceaux de rayons $U_1$ et $V_1$ sont projectifs et ils ont le rayon $p_1$ correspondant commun. Ils sont donc aussi en perspective et engendrent une forme rectiligne $s_1$ qui correspond au faisceau S.

On voit ainsi que, par le moyen de la correspondance établie entre les formes $u$ et $U_1$ et $v$ et $V_1$, à tout rayon $k$ de $\Sigma$ correspond un point $K_1$ de $\Sigma_1$, à tout point S situé sur $k$ un rayon $s_1$ passant par $K_1$ et que par conséquent $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont bien effectivement rapportés réciproquement

entre eux. Comme on peut toujours, d'après ce qui précède, construire la forme plane réciproque à une forme plane quelconque donnée, la loi de réciprocité se trouve démontrée à nouveau pour les systèmes plans ou, comme nous allons le voir, pour les formes fondamentales de seconde espèce.

Pour rapporter collinéairement l'un à l'autre deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$, nous n'aurons qu'à les rapporter réciproquement tous les deux à un troisième, de la manière que nous venons d'indiquer. De là découlent les méthodes directes qui suivent :

1° Nous prenons arbitrairement dans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ deux ponctuelles $u$, $v$ et $u_1$, $v_1$ et nous rapportons projectivement $u$ à $u_1$ et $v$ à $v_1$ de manière que le point commun à $u$ et $v$ corresponde au point commun à $u_1$ et $v_1$.

2° Nous faisons correspondre deux faisceaux quelconques de rayons, U et V, de $\Sigma$ à deux faisceaux arbitraires de rayons, $U_1$ et $V_1$, de $\Sigma_1$ et nous rapportons projectivement U à $U_1$ et V à $V_1$ de telle sorte que le rayon $\overline{UV}$ de $\Sigma$ corresponde au rayon $\overline{U_1V_1}$ de $\Sigma_1$.

On peut donner de ces méthodes une démonstration directe semblable à celle qu'on a indiquée pour les systèmes réciproques.

S'il s'agit de rapporter collinéairement ou réciproquement l'une à l'autre deux gerbes, ou une gerbe et un système plan, on peut facilement imaginer des méthodes semblables aux précédentes et démontrer leur exactitude. Cependant il est plus simple de ramener ces cas à ceux qu'on a déjà traités en remplaçant chaque gerbe par une de ses sections planes. C'est ainsi par exemple qu'on obtient ce théorème :

*Pour rapporter réciproquement entre elles deux gerbes* S *et* $S_1$, *nous pourrons prendre à volonté dans l'une* S *deux faisceaux de rayons* $\alpha$ *et* $\beta$ *et dans l'autre* $S_1$ *deux faisceaux de plans* $a_1$ *et* $b_1$ *et rapporter projectivement* $\alpha$ *à* $a_1$ *et* $\beta$ *à* $b_1$ *de manière que le rayon* $\overline{\alpha\beta}$ *commun aux faisceaux de rayons ait pour correspondant le plan* $\overline{a_1b_1}$ *commun aux deux faisceaux de plans. De cette manière, à chaque élément de la gerbe* S *correspond un élément déterminé de la gerbe* $S_1$.

Cette méthode découle immédiatement de celle que nous avons donnée précédemment pour les systèmes plans.

Pour rapporter réciproquement l'un à l'autre les systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ (fig. 2), nous avons pris d'une manière tout à fait quelconque les droites $u$ et $v$ dans $\Sigma$ et les points correspondants $U_1$ et $V_1$ dans $\Sigma_1$. Nous

pouvions de plus rapporter projectivement $u$ à $U_1$ et $v$ à $V_1$ d'une façon entièrement arbitraire ; il n'y avait qu'une seule condition à remplir, c'était que le point d'intersection $uv$ ou P correspondît à la droite $\overline{U_1 V_1}$ ou $p_1$. Nous pouvons donc encore faire correspondre deux points quelconques A et B de $u$ à deux rayons quelconques $a_1$ et $b_1$ de $U_1$ et de même prendre sur $v$ deux points quelconques C et D et leur faire correspondre deux rayons quelconques $c_1$ et $d_1$ de $V_1$ ; et de cette manière, à chaque élément de $\Sigma$ correspondra un élément déterminé de $\Sigma_1$. Nous pouvons évidemment considérer A B C D comme un quadrangle absolument quelconque du plan $\Sigma$, puisque nous pouvons y prendre à volonté les deux droites $u$ et $v$ et choisir arbitrairement sur ces dernières les points A, B et C, D. De même $a_1 b_1 c_1 d_1$ peut être regardé comme un quadrilatère pris arbitrairement dans $\Sigma_1$. D'où ce théorème :

*Pour rapporter réciproquement l'un à l'autre deux systèmes plans* $\Sigma$ *et* $\Sigma_1$, *on peut faire correspondre arbitrairement les sommets* A, B, C, D *d'un quadrangle quelconque de* $\Sigma$ *aux côtés* $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ *d'un quadrilatère quelconque de* $\Sigma_1$. *A chaque élément de* $\Sigma$ *correspond alors un élément déterminé de* $\Sigma_1$.

On peut de même rapporter deux systèmes plans collinéairement l'un à l'autre, et d'une seule manière, de façon que deux quadrangles ou deux quadrilatères de ces systèmes se correspondent entre eux d'une manière déterminée. Ce théorème peut immédiatement s'étendre d'une manière générale à des formes fondamentales quelconques de seconde espèce, puisque tous les autres cas peuvent se ramener à ceux que nous venons de traiter. Donc :

*Deux formes fondamentales de seconde espèce peuvent toujours être rapportées projectivement l'une à l'autre, arbitrairement et d'une seule manière, de façon que quatre éléments quelconques de même espèce* A, B, C, D *appartenant à l'une d'elles et dont trois ne font jamais partie d'une seule et même forme fondamentale uniforme, aient pour correspondants dans l'autre quatre éléments de même espèce* $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ *soumis à la même condition.*

Deux éléments correspondants, tels que A et $A_1$, sont les lieux de deux formes fondamentales uniformes et celles-ci peuvent et doivent être rapportées projectivement l'une à l'autre de manière que les éléments AB, AC et AD aient respectivement pour correspondants les éléments $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ et $A_1 D_1$. On peut encore démontrer directement de cette manière l'exactitude du théorème.

# DEUXIÈME LEÇON.

**Courbes qui se correspondent les unes aux autres dans les systèmes plans collinéaires et réciproques.**

Les relations de collinéation et de réciprocité peuvent être employées très fructueusement pour transformer des formes données, par exemple des courbes et des surfaces, en d'autres formes. On arrive souvent par leur moyen à généraliser des théorèmes trouvés d'abord sur des formes particulières; c'est ainsi, par exemple, que beaucoup des propriétés du cercle s'étendent par projection aux coniques quelconques. Nous allons faire quelques remarques générales sur cette transformation de formes données en d'autres formes.

Soient $\Sigma$ et $\Sigma_1$ deux systèmes collinéaires plans, P et $P_1$ deux points quelconques qui se correspondent dans ces systèmes. Si P parcourt dans $\Sigma$ une courbe $k$, $P_1$ décrit en même temps dans $\Sigma_1$ une courbe $k_1$ collinéaire à $k$. Si une droite quelconque $g$ coupe la courbe $k$ en $n$ points, $k_1$ doit aussi être rencontrée par la droite correspondante $g_1$ en $n$ points, c'est-à-dire aux points qui correspondent aux points d'intersection de $g$ et $k$. Si deux de ces points d'intersection de $g$ et $k$ coïncident, de manière que la droite $g$ soit tangente à la courbe $k$, les deux points correspondants, où se coupent $g_1$ et $k_1$, coïncident aussi et $g_1$ est tangente à $k_1$ ; en même temps, les deux points de contact sur $g$ et $g_1$ sont deux points correspondants des courbes. Les tangentes en deux points homologues des courbes $k$ et $k_1$ sont donc deux rayons homologues des systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$. A chaque tangente qu'on peut mener d'un point quelconque A à la courbe $k$ correspond une tangente à $k_1$ passant par le point homologue $A_1$ de $\Sigma_1$ ; de sorte qu'on

peut mener autant de tangentes de $A_1$ à $k_1$ que de A à $k$. Si $k$ passe plusieurs fois par un même point de $\Sigma$, $k_1$ passe un nombre égal de fois par le point correspondant de $\Sigma_1$ ; etc.

On distingue habituellement les courbes planes par leur *ordre* et leur *classe*, qu'on définit ainsi :

Une courbe plane du $n^e$ ordre a en général $n$ points communs avec une droite quelconque de son plan et elle ne peut en avoir plus de $n$.

Par un point quelconque pris dans le plan d'une courbe de $n^e$ classe, on peut en général mener $n$ tangentes à la courbe et on ne peut en mener plus de $n$.

Ceci posé, nous pouvons réunir les plus importants des théorèmes qui précèdent, dans l'énoncé suivant :

*Deux courbes* k *et* $k_1$, *qui se correspondent dans deux systèmes collinéaires plans, sont de même ordre et de même classe. A tout point multiple de* k *correspond un point multiple de même ordre sur* $k_1$; *de même, à toute tangente multiple de* k *correspond une tangente multiple semblable de* $k_1$.

Si la courbe plane $k$ est décrite par un point P et si en même temps le faisceau formé par ses tangentes est décrit par la tangente $p$ en ce point, le point P se meut d'une manière continue sur la droite $p$, tandis que $p$ tourne d'une manière continue autour de P dans le plan de la courbe ; la courbe $k_1$ collinéaire à $k$ et son faisceau de tangentes seront décrits de même par le point $P_1$ et la tangente $p_1$ qui correspondent respectivement aux éléments P et $p$. Si, maintenant dans une position déterminée $w$, le sens de la rotation de la tangente $p$ autour de P vient à changer, on dit que $w$ est une *tangente stationnaire tangente d'inflexion* et le point de contact de $w$ a reçu le nom de *point d'inflexion* de la courbe $k$. Si d'autre part le point R. dans une de ses positions R, change le sens de son mouvement sur $p$, on dit que R est un *point stationnaire* ou *un point de rebroussement* de la courbe $k$. A toute tangente d'inflexion et à tout point de rebroussement de $k$ correspondent respectivement une tangente d'inflexion et un point de rebroussement de la courbe $k_1$ collinéaire à $k$.

Si $k$ est une courbe du second ordre, $k_1$ est aussi une courbe du second ordre; il est facile de démontrer que non seulement $k_1$ a en général, comme $k$, deux points communs avec toute droite qui la

coupe, mais encore que ces courbes jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété d'être projectives. En effet, si $k$ est engendrée par deux faisceaux projectifs de rayons A et B, $k_1$ sera engendrée de même par les deux faisceaux correspondants $A_1$ et $B_1$ ; et l'on a : $A_1 \overline{\wedge} B_1$, puisque $A \overline{\wedge} A_1$, $B \overline{\wedge} B_1$ et $A \overline{\wedge} B$, de sorte qu'on peut regarder $k_1$ comme la forme engendrée par deux faisceaux *projectifs* de rayons. On voit d'après cela que :

*Deux courbes du second ordre, qui se correspondent dans des systèmes plans collinéaires, sont projectivement rapportées l'une à l'autre.*

Ce théorème admet aussi une réciproque que voici :

*Deux courbes projectives du second ordre peuvent toujours être considérées comme des courbes homologues de deux systèmes plans collinéaires.*

Soient, en effet, A, B, C trois points de la première courbe $k$ et $A_1$, $B_1$, $C_1$ les trois points qui leur correspondent respectivement sur la seconde courbe $k_1$ ; soit de plus D le pôle de $\overline{AB}$ par rapport à $k$ et $D_1$ celui de $\overline{A_1B_1}$ par rapport à la courbe $k_1$. Si les courbes appartiennent à deux systèmes collinéaires plans qui se correspondent, les tangentes à $k$ en A et B doivent correspondre aux tangentes à $k_1$ en $A_1$ et $B_1$, et par conséquent les points D et $D_1$ sont aussi deux points homologues des systèmes collinéaires. Or, on peut maintenant d'une manière effective rapporter collinéairement l'un à l'autre les systèmes plans dans lesquels se trouvent les courbes, de manière qu'aux quatre points A, B, C, D de l'un d'eux correspondent respectivement les quatre points $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ de l'autre ; à la courbe $k$, qui passe par C et qui est tangente en A et B aux droites $\overline{DA}$ et $\overline{DB}$ correspond ainsi la courbe $k_1$ qui passe par $C_1$ et qui est tangente en $A_1$ et $B_1$ aux droites $\overline{D_1A_1}$ et $\overline{D_1B_1}$. La collinéation des deux systèmes plans se trouve de la sorte établie complètement et d'une seule manière par le moyen des deux courbes projectives ; et deux éléments qui sont conjugués ou rapportés l'un à l'autre par rapport à l'une des courbes ont pour correspondants deux éléments conjugués ou correspondants l'un à l'autre par rapport à l'autre courbe.

Quand deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont rapportés collinéairement entre eux, la droite de l'infini dans l'un d'eux a généralement pour correspondante dans l'autre une droite propre qu'on appelle l'*axe opposé* de l'autre système. A deux droites parallèles de l'un des systèmes plans

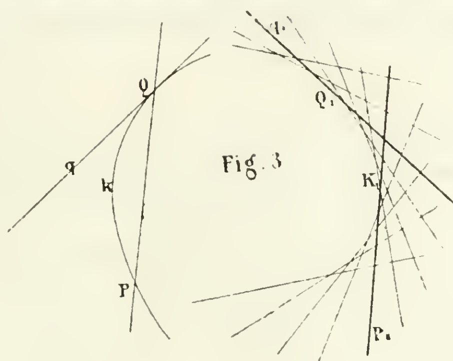
correspondent toujours deux droites qui se coupent sur l'axe opposé de l'autre système plan. Deux courbes collinéaires planes, bien qu'étant du même ordre et de la même classe, peuvent donc différer essentiellement l'une de l'autre en ce qui regarde leurs points à l'infini; en effet, aux points à l'infini de l'une d'elles correspondent les points que l'autre courbe a en commun avec l'axe opposé de son plan, et aux asymptotes d'une courbe, c'est-à-dire aux tangentes à ses points à l'infini, correspondent en général des tangentes propres de l'autre courbe. Par exemple, une ellipse de l'un des plans, coupée par l'axe opposé de ce plan ou tangente à cet axe, aura pour courbe correspondante dans l'autre plan une hyperbole ou une parabole.

Nous donnerons le nom d'*invariant* à toute propriété d'une seule forme géométrique ou à toute relation de différentes formes entre elles qui ne sera pas altérée par une transformation collinéaire. Par exemple, l'ordre et la classe d'une courbe plane sont des invariants; il en est de même pour le nombre de leurs points doubles, de leurs points de rebroussement, de leurs tangentes doubles ou de leurs tangentes d'inflexion. Des points ou des rayons harmoniques ont entre eux une relation d'invariance et la même chose a lieu pour les formes élémentaires projectives. Les relations d'une courbe du second ordre avec son centre et ses foyers ne sont pas invariantes, tandis que celles qui se rapportent aux points ou aux rayons conjugués par rapport à la courbe, ou à un point et à sa polaire, le sont.

Le rapport enharmonique de quatre points d'une droite ou de quatre rayons d'un faisceau du premier ordre est un invariant. Trois couples d'éléments d'une forme élémentaire en involution constituent entre eux une relation invariante; la propriété caractéristique d'un hexagone de Pascal est aussi un invariant. — Poncelet avait reconnu d'une façon bien nette l'importance des propriétés d'invariance des formes géométriques et l'avait fait ressortir d'une manière rigoureuse; il donne à ces propriétés la qualification de projectives, parce qu'elles se transmettent à toutes les formes collinéaires qu'on peut déduire d'une forme donnée par des projections ou des sections.

Soient $\Sigma$ et $\Sigma_1$ deux systèmes plans réciproques ; à tout point P de $\Sigma$ correspond un rayon $p_1$ de $\Sigma_1$. Si P parcourt dans $\Sigma_1$ une courbe quelconque $k$, $p_1$ décrit en même temps dans $\Sigma$ une suite continue de rayons $K_1$ que nous appellerons un *faisceau de rayons*. Si P s'approche d'un point fixe Q de la courbe $k$, $p_1$ s'approche d'un rayon

fixe $q_1$ du faisceau $K_1$, et au rayon $\overline{PQ}$ qui pivote autour de Q correspond le point $p_1 q_1$ qui se déplace sur la droite $q_1$. Enfin, lorsque P s'approchant indéfiniment du point Q, la droite $\overline{PQ}$ (fig. 3) coïncide avec une droite fixe, la tangente $q$ au point Q, le point $p_1\ q_1$ coïncide aussi finalement avec un point fixe, le point de contact $Q_1$ du rayon $q_1$ qui correspond ainsi à la tangente dont il vient d'être question. (Voir I. pages 80-81.) A tout point Q de la courbe $k$ avec sa tangente $q$, correspond un rayon $q_1$ du faisceau $K_1$, avec son point de contact $Q_1$, et à une suite de tangentes de $k$ se succédant d'une manière continue correspondent les points de contact de $K_1$ qui se suivent aussi d'une manière continue. En un mot : au faisceau K de tangentes, qui enveloppent la courbe $k$, correspond une courbe $k_1$ qui est enveloppée par le faisceau $K_1$. Si $k$ a $n$ points communs avec une droite quelconque $g$ de son




plan, les $n$ rayons correspondants du faisceau $K_1$, ou les $n$ tangentes à la courbe $K_1$ passent par le point de Σ qui correspond à la droite $g$. Le théorème suivant a donc lieu d'une manière générale:

*Si deux courbes* k *et* $k_1$ *se correspondent dans des systèmes réciproques, l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre. A tout point de l'une des courbes, avec sa tangente, correspond une tangente de l'autre courbe avec son point de contact ; à tout point multiple de l'une correspond une tangente multiple de l'autre et à tout point d'inflexion de l'une une tangente de rebroussement de l'autre.*

En particulier, si $k$ est une courbe du second ordre, $k_1$ est une courbe de seconde classe qui est enveloppée par un faisceau de rayons du second ordre. Ce faisceau sera engendré par deux ponctuelles projectives $a_1$ et $b_1$ si la courbe est-elle-même engendrée par deux faisceaux

projectifs de rayons A et B ; en effet, puisque $a_1 \overline{\wedge}$ A et $b_1 \overline{\wedge}$ B, et que de plus A $\overline{\wedge}$ B, il s'ensuit aussi que $a_1 \overline{\wedge} b_1$. Nous avons vu antérieurement que toute courbe du second ordre est enveloppée par un faisceau de rayons du second ordre et que par conséquent elle est aussi de seconde classe; pour les courbes d'ordre ou de classe plus élevée, une pareille coïncidence n'existe plus.

Des considérations toutes semblables peuvent s'appliquer aux surfaces coniques qui se correspondent dans des gerbes projectives. Tous les résultats qu'on obtient ainsi pour ces surfaces peuvent aussi se déduire de ceux qu'on vient d'établir, en projetant deux systèmes plans projectifs de deux centres quelconques suivant des gerbes. On voit d'après cela ce qu'il faut entendre par des surfaces coniques de $n^e$ ordre ou de $n^e$ classe. Si, par exemple, on rapporte réciproquement un système plan $\Sigma$ à une gerbe $S_1$, à toute courbe de $n^e$ ordre et de $p^e$ classe dans $\Sigma$ correspond dans $S_1$ une surface conique de $n^e$ classe et de $p^e$ ordre.

---

# TROISIÈME LEÇON.

**Perpectivité des formes fondamentales collinéaires de seconde espèce.**

Nous avons vu que, dans deux formes fondamentales collinéaires ou réciproques, quatre éléments harmoniques de l'une ont toujours pour correspondants quatre éléments harmoniques de l'autre et nous en avons déjà tiré la conclusion que deux formes fondamentales uniformes qui se correspondent dans chacune d'elles doivent être projectives. Si donc deux formes fondamentales collinéaires ou réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont placées de telle manière que non seulement les lieux $a$ et $a_1$ de deux formes fondamentales uniformes correspondantes soient situés l'un sur l'autre, mais encore que trois couples de points homologues de ces dernières formes coïncident, deux éléments correspondants quelconques de $a$ et $a_1$ doivent coïncider (I, page 55) et $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ont tous les éléments correspondants de $a$ et $a_1$ qui leur sont communs.

On a donc en particulier ce théorème :

Si deux systèmes plans collinéaires, non situés dans le même plan, ont trois points de leur droite d'intersection correspondants communs, tout point de cette droite est un point correspondant commun aux deux systèmes.

Si deux gerbes collinéaires, non concentriques ont trois plans correspondants communs, elles ont en commun tous les plans correspondants qui passent par leurs centres.

On peut, en la modifiant légèrement, étendre aussi cette double proposition aux systèmes plans superposés et aux gerbes concentriques.

Lorsque deux systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ situés dans le même plan ont en commun tous les points correspondants de deux droites $u$ et $v$ ou tous les rayons correspondants de deux faisceaux S et T, chaque élément de $\Sigma$ coïncide avec celui qui lui correspond dans $\Sigma_1$. En effet, dans le premier cas, une droite quelconque du plan se correspond à elle-même, puisqu'elle joint deux points qui se correspondent à eux-mêmes, un point de $u$ et un point de $v$ ; et tout point du plan se correspond à lui-même, puisqu'on peut le regarder comme le point d'intersection de deux droites qui se correspondent à elles-mêmes. De même, dans le second cas, tout point du plan se correspond à lui-même, parce qu'il est l'intersection de deux rayons de S et de T qui se correspondent à eux-mêmes et une droite quelconque peut être regardée comme la droite qui joint deux de ces points. Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

*Deux systèmes collinéaires situés dans le même plan ont tous leurs éléments correspondants communs (ou sont identiques), quand ils ont comme éléments correspondants communs les quatre sommets d'un quadrangle ou les quatre côtés d'un quadrilatère.*

*Deux gerbes collinéaires concentriques ont tous leurs éléments correspondants communs (ou sont identiques) quand elles ont pour éléments correspondants communs les arêtes d'un angle quadrarête ou les faces d'un angle tétraèdre.*

Le théorème de droite se ramène immédiatement à celui de gauche en coupant les deux gerbes par un plan. Les systèmes collinéaires situés dans ce plan de section ont comme éléments communs les quatre sommets A, B, C, D d'un quadrangle ou d'un quadrilatère simple ; les rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ sont donc correspondants communs et par suite tout rayon du faisceau A jouit de cette propriété; il en est de même des rayons $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, et par suite de tout rayon du faisceau B ; ce qui démontre le théorème. Deux systèmes collinéaires quelconques, placés l'un sur l'autre, ont donc en général comme éléments correspondants communs au plus trois points et les droites qui les joignent.

Des théorèmes qu'on vient de démontrer on déduit les conséquences

suivantes pour la perspectivité des systèmes et des gerbes collinéaires :

Si deux systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont situés dans des plans différents et si les rayons qui joignent les sommets d'un quadrangle de $\Sigma$ aux points correspondants de $\Sigma_1$ passent par un même point S, les deux systèmes sont perspectifs et sont des sections de la gerbe S. En effet, les deux gerbes collinéaires, qui projettent les systèmes plans de S, sont identiques, puisqu'elles ont un angle quadrarète correspondant commun.

Si deux gerbes collinéaires S et $S_1$ ont des centres différents et si les quatre rayons, suivant lesquels les faces d'un angle tétraèdre de S sont respectivement coupées par les plans correspondants de $S_1$, sont situés dans un même plan $\Sigma$, les deux gerbes sont perspectives et sont des projections du système plan $\Sigma$. En effet, les deux systèmes collinéaires suivant lesquels les gerbes sont coupées par $\Sigma$ sont identiques, puisqu'ils ont un quadrilatère correspondant commun.

On démontre facilement, d'une manière analogue, le théorème qui suit :

*Un système plan $\Sigma$ est perspectif à une gerbe* S, *qui lui est collinéaire, quand les sommets d'un quadrangle de $\Sigma$ sont situés sur les rayons qui leur correspondent dans* S.

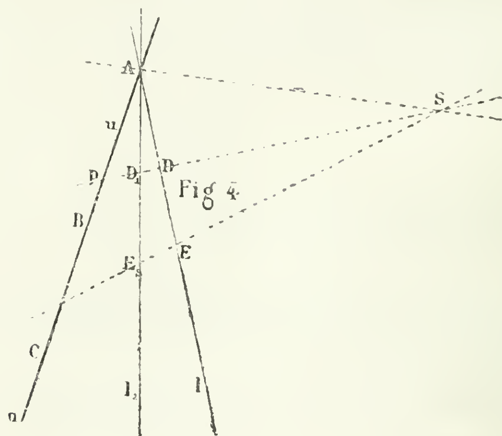
On voit sans peine l'analogie qui existe entre ces théorèmes et ceux que nous avons établis pour les formes fondamentales projectives de première espèce, dans la cinquième leçon de la première partie. On peut faire la même remarque pour la double proposition suivante, dont nous ferons un fréquent usage dans la suite :

Si deux systèmes plans collinéaires ont comme éléments correspondants communs trois points, et par conséquent tous les points d'une ponctuelle $u$, les droites qui joignent deux à deux les points homologues de ces systèmes se coupent toutes en un seul et même point déterminé S.—En effet, deux

Si deux gerbes collinéaires ont comme éléments correspondants communs trois plans, et par conséquent tous les plans d'un faisceau $u$, les droites suivant lesquelles les plans correspondants se coupent deux à deux sont situées dans un seul et même plan déterminé $\Sigma$. — En effet, deux rayons quelconques

droites $l$ et $l_1$ qui se correspondent (fig. 4) doivent avoir pour point correspondant commun un certain point A de $u$, puisque tout point de $u$ se correspond à lui-même.

Toutes les droites $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}$....qui joignent chacune un point (D, E....) de $l$ au point correspondant ($D_1$, $E_1$...) de $l_1$ passent donc par un même point S, puisque les ponctuelles $l$ et $l_1$ ont leur point d'intersection A comme point correspondant commun et par suite sont perspectives. Si les deux systèmes sont situés dans un même plan et si P est le point où un rayon $\overline{DD_1}$ passant par S coupe $u$, la droite $\overline{PD}$ correspond à $\overline{PD_1}$, c'est-à-dire à elle-même puisque P se correspond à lui-même. Tout rayon passant par S coïncide donc avec son correspondant; d'où il résulte que les points homologues sont situés deux à deux sur des rayons passant par S.




$l$ et $l_1$ qui se correspondent doivent se trouver dans un certain plan $\alpha$ de $u$, puisque tout plan de $u$ se correspond à lui-même. — Tous les rayons $\overline{\delta\delta_1}$, $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$,.. suivant lesquels les plans ($\delta$, $\varepsilon$,....) du faisceau $l$ coupent les plans ($\delta_1$, $\varepsilon_1$....) qui leur correspondent dans le faisceau $l_1$ sont donc situés dans un même plan $\Sigma$; car les faisceaux ont le plan $\alpha$ comme plan correspondant commun et par suite sont en position perspective. Si les gerbes ont le même centre et si $\pi$ est le plan qui joint un rayon quelconque $\overline{\delta\delta_1}$ de $\Sigma$ avec l'axe $u$, le rayon $\overline{\pi\delta}$ correspond au rayon $\overline{\pi\delta_1}$, et par suite se correspond à lui-même, puisque $\pi$ se correspond à lui-même. Tout rayon situé dans $\Sigma$ coïncide donc avec son correspondant; d'où il résulte que les plans homologues se coupent deux à deux

Si au contraire les deux systèmes se coupent suivant la droite $u$, il s'ensuit que les droites telles que $\overline{DD_1}$ $\overline{EE_1}$ qui joignent des points homologues, sont situées deux à deux dans un même plan et par conséquent se rencontrent. Mais comme toutes ces droites ne sont pas toutes situées dans un seul et même plan, il faut qu'elles passent par un seul et même point S ; les deux systèmes sont donc des sections de la gerbe S.

suivant des rayons situés dans $\Sigma$ — Si au contraire les deux gerbes ont deux centres différents situés sur $u$, il s'ensuit que les droites d'intersection des plans homologues quelconques, telles que $\overline{\delta\delta_1}$ et $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$, sont deux à deux situées dans un même plan et par conséquent se coupent. Mais comme toutes ces droites ne passent pas toutes par un seul et même point, il faut qu'elles soient situées dans un seul et même plan $\Sigma$ ; les gerbes sont donc les projections du système plan $\Sigma$.

Ces théorèmes remarquables peuvent aussi s'énoncer sous la forme suivante :

Deux systèmes collinéaires plans qui se coupent et qui ont trois points (de leur droite d'intersection) correspondants communs, sont perspectifs.

Si deux systèmes collinéaires situés dans un même plan ont une ponctuelle correspondante commune (c'est-à-dire tous les points de cette ponctuelle correspondants communs), ils ont aussi un faisceau de rayons correspondant commun (c'est-à-dire tous les rayons de ce faisceau correspondants communs).

Deux gerbes collinéaires qui ne sont pas concentriques et qui ont trois plans correspondants communs sont perspectives.

Si deux gerbes collinéaires et concentriques ont un faisceau de plans correspondant commun (c'est-à-dire tous les plans de ce faisceau correspondants communs), ils ont aussi un faisceau de rayons correspondant commun.

Réciproquement, on voit immédiatement que deux systèmes plans perspectifs ont tous les points de leur droite d'intersection comme éléments correspondants communs et que tout plan passant par les sommets de deux gerbes perspectives est un plan qui leur est correspondant commun. Les deux derniers théorèmes eux-mêmes admettent aussi une réciproque, ainsi qu'il suit :

Si deux systèmes collinéaires situés dans un même plan ont un faisceau de rayons correspondant commun, ils ont aussi une ponctuelle correspondante commune.

Si deux gerbes concentriques et collinéaires ont un faisceau de rayons correspondant commun, ils ont aussi un faisceau de plans correspondant commun.

En effet (théorème de gauche), si nous projetons les deux systèmes d'un centre quelconque suivant deux gerbes concentriques, celles-ci auront un faisceau de plans correspondant commun, et par conséquent aussi (d'après le théorème de droite qui précède) un faisceau de rayons correspondant commun, et la ponctuelle, dont il est question dans le théorème, en est une section. On ramènera de même le théorème de droite au théorème de gauche qui précède en coupant les gerbes concentriques par un plan donnant naissance à deux systèmes superposés. On peut du reste démontrer cette double proposition directement et d'une manière analogue à celle qu'on a suivie pour la précédente.

Deux systèmes collinéaires situés dans le même plan, qui ont une ponctuelle $u$ et un faisceau de rayons S correspondants communs seront dits perspectifs, parce qu'ils jouissent de beaucoup de propriétés qui du reste appartiennent aussi aux systèmes perspectifs. Le point S, par lequel passent les droites qui joignent deux à deux les points correspondants, s'appelle le *centre de collinéation* et la droite $u$, sur laquelle se coupent deux à deux les droites homologues, est dite l'*axe de collinéation*. Étant donnés deux systèmes plans perspectifs, imaginons que l'un d'eux tourne autour de sa droite d'intersection avec l'autre système ; les droites qui joignent les points homologues changeront de position, mais elles ne cesseront pas de converger constamment vers un point unique, qui sera lui-même en mouvement, puisque les deux systèmes ont comme éléments correspondants communs tous les points de leur droite d'intersection.

Quand les deux systèmes se superposent, cette situation doit être considérée comme un cas particulier de la perspectivité générale. — On dit aussi que deux gerbes concentriques et collinéaires sont perspectives, quand elles ont un faisceau de rayons et un faisceau de plans correspondants communs.

Pour rapporter perspectivement l'un à l'autre deux systèmes situés dans un même plan, nous pouvons prendre arbitrairement l'axe $u$ et le centre S de collinéation (fig. 4) et faire correspondre l'un à l'autre

deux points quelconques D et $D_1$ situés sur un rayon passant par S. En effet, nous pouvons et nous devons rapporter les deux systèmes collinéairement l'un à l'autre de telle manière que deux faisceaux de rayons D et $D_1$, perspectifs à la ponctuelle $u$, se correspondent et que le faisceau S se corresponde à lui-même ; la collinéation se trouve par là établie complètement et d'une seule manière (II, page 6). Mais comme deux rayons homologues $l$ et $l_1$ de D et $D_1$ se coupent en chaque point A de $u$ et que par A il passe aussi un rayon $a$ du faisceau S qui se correspond à lui-même, il faut que A ou $l\,a$ se corresponde à lui-même, c'est-à-dire corresponde au point $l_1 a$ ; par conséquent, les deux systèmes ont tous les points de $u$ qui leur sont correspondants communs, ainsi que cela était demandé.

Tout rayon passant par D coupe en un point de $u$ le rayon passant par $D_1$ qui lui correspond ; il est donc facile de construire ce dernier. Et comme deux points homologues E et $E_1$ se trouvent à la fois sur des rayons homologues de D et $D_1$ et sur une droite passant par S, il est facile de trouver le point $E_1$ qui correspond à E. Le lecteur fera un exercice utile et instructif en construisant ainsi la courbe qui correspond à une courbe donnée, c'est-à-dire en déterminant un certain nombre de points de la seconde courbe qui correspondent à des points donnés de la première. Dans cette construction, il est intéressant de rechercher où se trouve l'axe opposé d'un des systèmes qui correspond à la droite de l'infini dans l'autre; car c'est essentiellement d'après la position de cet axe qu'on reconnaît si la courbe a des branches infinies et quel en est le nombre. L'axe opposé doit être parallèle à l'axe de collinéation, parce que la droite qui lui correspond doit le rencontrer sur l'axe de collinéation et en un point situé à l'infini.

Si l'axe de collinéation passe à l'infini, les droites homologues deviennent parallèles deux à deux et les systèmes sont dits *perspectivement semblables*. La théorie de la similitude des figures planes nous est connue depuis longtemps grâce à la géométrie des anciens; elle n'est, comme on le voit, qu'un cas particulier de la collinéation.

Deux systèmes plans collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$, dont les droites à l'infini ne se correspondent pas, peuvent être mis en perspective de deux manières différentes. On détermine d'abord les deux axes opposés. Les deux faisceaux de rayons parallèles de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ auxquels appartiennent les axes opposés se correspondent alors entre eux. Au contraire, deux autres parallèles $a$ et $b$ de $\Sigma$ ont pour correspondantes deux droites $a_1$ et $b_1$ de $\Sigma_1$

qui ne sont pas parallèles, puisqu'elles doivent se couper en un point propre de l'axe opposé de $\Sigma_1$. Il existe donc à une distance déterminée de cet axe opposé deux droites, et rien que deux, $u_1$ et $v_1$ qui lui sont parallèles et sur lesquelles $a_1$ et $b_1$ déterminent des segments de longueur égale à ceux que les parallèles $a$ et $b$ interceptent sur les droites correspondantes $u$ et $v$. Les ponctuelles $u_1$ et $v_1$ de $\Sigma_1$ sont les seules qui soient projectivement égales aux ponctuelles $u$ et $v$ qui leur correspondent. Si maintenant on amène les systèmes collinéaires dans une situation telle que les ponctuelles $u$ et $u_1$ (ou $v$ et $v_1$) soient superposées et aient tous leurs points correspondants communs, les systèmes seront perspectifs. Ils resteront encore en perspective si on les fait ensuite tourner autour de leur droite correspondante commune jusqu'à ce que leurs plans coïncident et l'on obtient alors facilement deux faisceaux de rayons dans $\Sigma$ qui sont projectifs et égaux aux faisceaux de rayons qui leur correspondent dans $\Sigma_1$ (II, page 20).

Deux courbes planes collinéaires, dont les points à l'infini ne se correspondent pas, peuvent, d'après ce qui précède, être amenées dans une position telle qu'elles se présentent comme sections d'une même surface conique. L'intuition montre sans grande peine quelles sont les propriétés qui leur sont communes. — Deux courbes du second ordre, sur lesquelles on prend arbitrairement trois points A, B, C et $A_1$, $B_1$, $C_1$ peuvent toujours être mises dans une position telle que par elles et par les trois droites $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ on puisse faire passer une surface conique du second ordre (II, page 11).

# QUATRIÈME LEÇON.

## Collinéation et réciprocité des systèmes de l'espace.

Les développements que nous avons donnés jusqu'ici nous fournissent maintenant le moyen de rapporter collinéairement ou réciproquement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace, c'est-à-dire deux portions de l'espace indéfini, ou même de rapporter l'espace indéfini à lui-même. La définition générale que nous avons donnée de la collinéation ou de la réciprocité nous conduit tout d'abord aux définitions suivantes pour les systèmes de l'espace :

*Deux systèmes de l'espace* $\Sigma$ *et* $\Sigma_1$ *sont rapportés collinéairement l'un à l'autre, lorsqu'à tout point* P *de* $\Sigma$ *correspond un point* $P_1$ *de* $\Sigma_1$ *et qu'à toute droite ou tout plan de* $\Sigma$ *passant par* P *correspond dans* $\Sigma_1$ *une droite ou un plan passant par* $P_1$.

*Deux systèmes de l'espace* $\Sigma$ *et* $\Sigma_1$ *sont rapportés réciproquement l'un à l'autre, lorsqu'à tout point* P *de* $\Sigma$ *correspond un plan* $\pi_1$ *de* $\Sigma_1$ *et qu'à toute droite ou tout plan de* $\Sigma$ *passant par* P *correspond dans* $\Sigma_1$ *un rayon ou un point situé sur* $\pi_1$.

Ici encore on démontre sans peine le théorème général que nous avons déjà énoncé précédemment, à savoir que deux formes fondamentales, qui sont toutes les deux ou collinéaires ou réciproques à une troisième, doivent être collinéaires entre elles. Comme d'après cela la collinéation se déduit de la réciprocité, nous pourrons nous borner le plus souvent à l'étude de cette dernière.

Si dans deux systèmes réciproques de l'espace un point P et un plan $\pi_1$ se correspondent, et par suite aussi la gerbe P et le système

plan $\pi_1$, ces deux dernières formes sont aussi réciproques; car à tout plan $\varepsilon$ de P correspond un point E situé dans $\pi_1$ et à tout rayon passant par P et situé dans $\varepsilon$ correspond un rayon situé dans $\pi_1$ et passant par $E_1$. A quatre éléments harmoniques quelconques de la gerbe P ou, en général, de l'un des systèmes de l'espace correspondent donc toujours quatre éléments harmoniques situés dans $\pi_1$ ou dans l'autre système. Par conséquent, à toute ponctuelle de l'un des systèmes doit correspondre un faisceau projectif de plans dans l'autre système et à tout faisceau de rayons dans l'un un faisceau projectif de rayons dans l'autre. Dans deux systèmes collinéaires de l'espace, à tout système plan correspond un système plan collinéaire, à toute ponctuelle une ponctuelle qui lui est projective, etc. D'après cela, on dira aussi que deux systèmes collinéaires ou réciproques de l'espace, sont projectifs: il en résulte que:

*Si deux systèmes collinéaires ou réciproques de l'espace ont en commun trois éléments d'une forme fondamentale uniforme, ou quatre éléments de même espèce d'une forme fondamentale de seconde espèce, ils ont en commun chacun des éléments de la forme* (II, page 15).

Dans le second cas, nous supposons toutefois que trois des quatre éléments considérés n'appartiennent pas à une seule et même forme fondamentale uniforme.

Nous rapporterons deux systèmes de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ réciproquement l'un à l'autre de la manière la plus simple et la plus intuitive, en procédant comme il suit. Nous prenons dans $\Sigma$ deux gerbes A et B et nous rapportons respectivement chacune d'elles réciproquement à un système plan $\alpha_1$ et $\beta_1$ situé dans $\Sigma_1$, de telle sorte que la droite d'intersection $\overline{\alpha_1\beta_1}$ corresponde à $\overline{AB}$ et que tout plan commun aux gerbes passant par $\overline{AB}$ ait pour correspondant un point commun aux systèmes plans situé sur $\overline{\alpha_1\beta_1}$. Alors, à tout point P de $\Sigma$ correspond un plan $\pi_1$ dans $\Sigma_1$ et à tout rayon $l$ passant par P un rayon $l_1$ situé dans $\pi_1$. En effet, aux rayons $\overline{AP}$ et $\overline{BP}$ qui sont dans un même plan avec $\overline{AB}$ correspondent dans $\alpha_1$ et $\beta_1$ deux rayons qui ont avec $\overline{\alpha_1\beta_1}$ un seul et même point commun et qui par conséquent déterminent un plan $\pi_1$ correspondant au point P; et de même, le rayon $l$ de $\Sigma$, qui est projeté de A et B par deux plans $\overline{Al}$ et $\overline{Bl}$ a pour correspondant un rayon $l_1$ qui est coupé par $\alpha_1$ et $\beta_1$ en deux points $\alpha_1 l_1$ et $\beta_1 l_1$ qui correspondent aux plans. Enfin, si nous avons dans $\Sigma$ un système plan quelconque $\varepsilon$, par le moyen duquel les gerbes A et B soient

rapportées perspectivement l'une à l'autre, de telle manière qu'elles aient ainsi le faisceau de plans $\overline{AB}$ comme élément correspondant commun, les systèmes plans $\alpha_1$ et $\beta_1$ sont par là même rapportés en même temps collinéairement l'un à l'autre (parce que $\alpha_1 \overline{\wedge} A \overline{\wedge} B \overline{\wedge} \beta_1$) de façon à avoir la ponctuelle $\overline{\alpha_1\beta_1}$ correspondante commune. Par conséquent $\alpha_1$ et $\beta_1$ sont perspectifs (II, page 19) et engendrent une gerbe $E_1$ qui correspond au système plan $\varepsilon$ et qui lui est réciproque. Au plan $\varepsilon$ de $\Sigma$, qui passe par une droite $l$ ou un point P, correspond donc un point $E_1$, situé sur la droite correspondante $l_1$ ou dans le plan correspondant $\pi_1$. Au plan à l'infini dans l'un des systèmes correspond de cette manière un point de l'autre système et, en général, c'est un point propre. Donc :

*Deux systèmes de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ peuvent toujours et d'une seule manière être rapportés réciproquement l'un à l'autre de telle façon qu'à deux gerbes* A *et* B *de $\Sigma$ correspondent respectivement dans $\Sigma_1$ deux systèmes plans $\alpha_1$ et $\beta_1$, qui leur soient réciproques. Il suffit d'établir la réciprocité entre* A *et $\alpha_1$ et entre* B *et $\beta_1$ de telle manière qu'à tout plan commun aux gerbes* A *et* B *corresponde un point commun de $\alpha_1$ et $\beta_1$.*

Nous pouvons donc déduire de là que:

*Pour rapporter réciproquement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$, on peut prendre arbitrairement dans le premier cinq points* A, B, C, D, E *dont quatre quelconques ne soient pas un même plan, et leur assigner comme correspondants dans le second cinq plans quelconques $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, $\varepsilon_1$, dont quatre quelconques ne passent pas par un même point. Alors tout élément de $\Sigma_1$ sera rapporté à un élément de $\Sigma$.*

En effet, nous devons et pouvons rapporter réciproquement la gerbe A au système plan d'une seule manière et de telle sorte qu'aux rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ correspondent respectivement les rayons $\overline{\alpha_1\beta_1}$, $\overline{\alpha_1\gamma_1}$, $\overline{\alpha_1\delta_1}$, $\overline{\alpha_1\varepsilon_1}$ (II, page 8); nous établirons de même entre la gerbe B et le système plan $\beta_1$ une relation réciproque, telle que les quatre couples de rayons $\overline{BA}$ et $\overline{\beta_1\alpha_1}$, $\overline{BC}$ et $\overline{\beta_1\gamma_1}$, $\overline{BD}$ et $\overline{\beta_1\delta_1}$, $\overline{BE}$ et $\overline{\beta_1\varepsilon_1}$ se composent de rayons homologues. Comme les trois plans $\overline{ABC}$, $\overline{ABD}$, $\overline{ABE}$, communs aux faisceaux A et B, ont respectivement pour correspondants les points $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta_1\delta_1$, $\alpha_1\beta_1\varepsilon_1$ communs aux systèmes plans $\alpha_1$ et $\beta_1$, à tout plan du faisceau $\overline{AB}$ correspond un seul point de la ponctuelle $\overline{\alpha_1\beta_1}$. Le théorème se trouve ainsi ramené au précédent.

Il résulte de ce qui précède qu'on a de même la proposition suivante pour les systèmes collinéaires de l'espace :

*Pour rapporter collinéairement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$, on peut prendre à volonté dans l'un cinq points, dont quatre quelconques ne soient pas situés dans un même plan, et leur assigner pour correspondants dans l'autre cinq points quelconques, assujettis à la même condition. De cette manière, chaque élément de $\Sigma$ sera rapporté à un élément de $\Sigma_1$.*

On peut démontrer directement ce théorème d'une manière analogue à celle qui a été employée pour les systèmes réciproques; ou plus simplement, on peut ramener ce cas aux précédents en remarquant que deux systèmes réciproques à un troisième doivent être collinéaires. En effet, nous pouvons rapporter réciproquement les deux systèmes donnés au troisième de telle façon, que cinq plans quelconques de ce dernier aient respectivement pour correspondants les cinq points donnés dans chacun des deux premiers. De cette manière, la collinéation sera établie entre ces deux systèmes. Au lieu de cinq points, on peut faire correspondre entre eux, deux à deux, cinq plans pris dans chaque système et dont quatre quelconques ne passent pas par un même point. Le théorème a encore lieu dans ce cas. On voit en même temps que:

*Si deux systèmes collinéaires de l'espace ont comme éléments correspondants communs cinq points, dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan, ou cinq plans, dont quatre quelconques ne passent pas par un même point, ils ont tous leurs éléments correspondants communs et sont identiques.*

Le résultat principal de toute notre étude est la démonstration, maintenant complète, de la loi de réciprocité. En effet, si deux espaces peuvent être rapportés réciproquement l'un à l'autre, on peut aussi, étant donnée une forme quelconque de l'espace, construire une forme qui lui soit réciproque et dont les propriétés se déduisent de la première. Aussi nous contenterons-nous à l'avenir, étant données deux propositions réciproques, de démontrer seulement l'une d'elles. Nous engageons le lecteur à chercher directement la démonstration de l'autre au lieu de la déduire de la loi de réciprocité.

Entre les formes de l'espace, par exemple entre les courbes ou les surfaces qui se correspondent dans des systèmes collinéaires ou réciproques, il existe des relations remarquables. Elles sont particulièrement

intéressantes quand il s'agit de *courbes à double courbure* ou de *courbes gauches*, c'est-à-dire de courbes dont aucune portion finie n'est contenue dans un plan. Avant d'étudier ces relations, nous allons faire quelques remarques sur les courbes gauches.

Étant donnés deux points quelconques P et Q d'une courbe gauche, joignons-les par une droite $\overline{PQ}$; si l'un d'eux Q se meut sur la courbe, la corde $\overline{PQ}$ décrit une surface conique qui a son sommet en P et qui projette la courbe de ce point. Si Q s'approche de plus en plus de P, la droite $\overline{PQ}$ s'approche de plus en plus d'une droite fixe $p$, avec laquelle elle se confond finalement, quand Q coïncide avec P. La droite $p$ est la *tangente* à la courbe au point P; et l'on dit que tout plan qui passe par $p$ est *tangent* à la courbe au point P. Un plan tangent, joignant la tangente $p$ à un point variable R de la courbe, décrit un faisceau de plans $p$ qui projette la courbe, quand R se déplace sur cette dernière; ce plan tangent s'approche d'un plan fixe $\pi$, avec lequel il finit par coïncider, quand R s'approchant de plus en plus de P finit par coïncider avec ce point. Ce plan $\pi$ s'appelle le *plan osculateur* ou le *plan de courbure* de la courbe en P; il est tangent suivant la droite $p$ à la surface conique par laquelle la courbe est projetée du point P, parce qu'il a en commun avec cette surface deux rayons qui se réunissent suivant $p$. On peut regarder une tangente quelconque comme la droite qui unit deux points qui se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, et un plan osculateur comme le plan qui passe par trois points qui se rapprochent indéfiniment les uns des autres. Réciproquement, la droite commune à deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe se confond avec une tangente à la courbe et le point d'intersection de trois plans osculateurs infiniment voisins est à la limite un point de la courbe. Toutes les tangentes d'une courbe gauche forment dans l'espace un faisceau de rayons qui *enveloppe* la courbe et tous les plans osculateurs un faisceau de plans qui *oscule* la courbe.

Si un point P décrit la courbe gauche, tandis que sa tangente $p$ décrit le faisceau de rayons qui enveloppe et son plan osculateur $\pi$ le faisceau de plans qui oscule cette courbe, P se meut d'une manière continue sur $p$, tandis que $p$ pivote autour de P dans le plan $\pi$ et que ce plan $\pi$ lui-même tourne en même temps autour de $p$. Tout point de la courbe où le mouvement de P sur la tangente $p$ change de sens est appelé *point stationnaire* ou *point de rebroussement;* de même les tangentes et les plans osculateurs où les rotations respectives de $p$ et $\pi$

autour de P et $p$ changent de sens, sont appelés *tangentes stationnaires* ou *plans osculateurs stationnaires*.

Soient maintenant deux courbes gauches $k$ et $k_1$ qui se correspondent dans des systèmes collinéaires. Toute droite qui joint deux points et tout plan qui réunit trois points de $k$ ont respectivement pour correspondants dans $k_1$ la droite qui joint les deux points et le plan qui réunit les trois points homologues. A toute tangente et à tout plan osculateur en un point de $k$ correspondent donc respectivement la tangente et le plan osculateur au point homologue de $k_1$. Si un point P décrit la courbe $k$, tandis que sa tangente $p$ décrit simultanément le faisceau de rayons qui l'enveloppe et son plan osculateur $\pi$ le faisceau de plans qui l'oscule, le point correspondant $P_1$ décrit en même temps la courbe $k_1$, la tangente correspondante $p_1$ le faisceau de rayons qui enveloppe $k_1$ et le plan osculateur correspondant $\pi_1$ le faisceau de plans qui oscule la courbe $k_1$. A tout élément stationnaire de $k$ correspond un élément stationnaire de même espèce dans $k_1$. Si la courbe $k$ est du $n^e$ *ordre*, c'est-à-dire si elle a en général et au plus $n$ points communs avec un plan quelconque, $k_1$ est aussi du $n^e$ ordre ; car elle a les points correspondants communs avec le plan homologue. Si d'autre part, $k$ est de la $m^e$ *classe*, c'est-à-dire si en général par un point quelconque il passe au plus $m$ plans osculateurs de la courbe $k$, $k_1$ est également de la $m^e$ classe. Aux points à l'infini de $k$ correspondent en général des points propres de $k_1$ ; car c'est seulement dans des cas particuliers que le plan à l'infini de l'un des systèmes coïncide avec le plan à l'infini de l'autre système.

Si la courbe $k$ se meut d'une manière continue, suivant une loi quelconque, et décrit une surface $\Phi$, $k_1$ décrit en même temps une surface $\Phi_1$ qui correspond à la précédente. Ces surfaces sont coupées par deux plans correspondants suivant des courbes collinéaires ; et si $\Phi$ est du $n^e$ *ordre*, c'est-à-dire si en général elle a au plus $n$ points communs avec une droite quelconque, $\Phi_1$ est aussi du même ordre, parce qu'elle a les points correspondants qui lui sont communs avec la droite correspondante. A toute tangente de $\Phi$ correspond une tangente de $\Phi_1$ et de même les plans tangents de deux surfaces collinéaires se correspondent entre eux. Si $\Phi$ est de la $m^e$ classe, c'est-à-dire si on peut en général lui mener au plus $m$ plans tangents par une droite quelconque, l'autre surface $\Phi_1$ est également de la $m^e$ classe. L'ordre et la classe des courbes ou des surfaces font donc partie de leurs propriétés d'invariance.

Si l'une des surfaces renferme des droites, l'autre en contient aussi et en nombre égal ; si l'une a des points doubles ou des courbes doubles par lesquelles elle passe plusieurs fois, il en est de même pour l'autre ; et ainsi de suite.

Les surfaces collinéaires peuvent néanmoins différer essentiellement en ce qui concerne leurs points à l'infini. Ainsi, l'une des surfaces peut être coupée suivant une courbe par le plan à l'infini, tandis que l'autre peut lui être seulement tangente en un point ou ne pas le rencontrer.

Si deux systèmes de l'espace sont rapportés réciproquement l'un à l'autre, à toute courbe gauche $k$ de l'un correspond aussi une courbe gauche $k_1$ de l'autre, mais de la manière suivante : à tout point P de $k$ correspondent un plan osculateur $\pi_1$ de $k_1$ ; à toute tangente de $k$ qui joint deux points infiniment voisins et à tout plan osculateur qui unit trois points infiniment voisins correspondent respectivement dans $k_1$ une tangente à $k_1$, qui est l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins et un point où se coupent trois plans osculateurs infiniment voisins de $k_1$. A tout plan qui contient $n$ points ou $n$ tangentes de l'une des courbes correspond un point par lequel passent $n$ plans osculateurs ou $n$ tangentes de l'autre courbe. L'ordre (ou la classe) de l'une d'elles est donc égal à la classe (ou à l'ordre) de l'autre. A tout point stationnaire de l'une correspond un plan osculateur stationnaire de l'autre. Tous les points d'une courbe plane et leurs tangentes ont pour correspondants tous les plans tangents d'une surface conique et les rayons qui la composent. — Aux points et aux tangentes d'une surface $\Phi$ correspondent les plans tangents et les tangentes d'une surface $\Phi_1$ et aux plans tangents de $\Phi$ correspondent les points de $\Phi_1$, etc.

Supposons qu'il s'agisse de rapporter projectivement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace, de manière que deux systèmes réglés projectifs $abcd$ . . . . et $a_1b_1c_1d_1$ . . . . se correspondent commme formes homologues; on peut assigner trois directrices quelconques $p$, $q$, $r$ de l'un des systèmes comme correspondantes à trois directrices quelconques $p_1$, $q_1$, $r_1$ de l'autre système et de plus on a le choix de spécifier si les systèmes de l'espace devront être collinéaires ou réciproques. En effet, rapportons projectivement les deux systèmes l'un à l'autre de telle sorte qu'aux cinq points $ap$, $aq$, $bp$, $bq$, $cr$ de l'un correspondent respectivement les cinq points (ou les cinq plans) $a_1p_1$, $a_1q_1$, $b_1p_1$, $b_1q_1$,

$c_1 r_1$ de l'autre; aux droites $a$, $b$, $p$, $q$ du premier système correspondent ainsi les droites $a_1$, $b_1$, $p_1$, $q_1$ du second. De plus, la droite $c$, qui passe par le point $cr$ et qui coupe les droites $p$ et $q$ a pour correspondante la droite $c_1$ qui passe par $c_1 r_1$ (ou qui est située dans le plan $c_1 r_1$) et qui coupe les droites $p_1$ et $q_1$, et de même la droite $r_1$ correspond à la droite $r$.

Enfin à tout rayon $d$ du système réglé $abc$ correspond un rayon $d_1$ du système réglé $a_1 b_1 c_1$, de sorte que les deux formes fondamentales uniformes, $p(abcd)$ et $p_1(a_1 b_1 c_1 d_1)$ sont projectives. Le théorème est donc démontré.

Dans les leçons suivantes nous étudierons les formes engendrées par les systèmes collinéaires et réciproques. Nous allons seulement nous occuper ici de la perspectivité des systèmes collinéaires de l'espace. Comme deux espaces collinéaires se traversent ou se pénètrent mutuellement, il peut arriver qu'un nombre fini ou infini d'éléments de l'un coïncident avec les éléments qui leur correspondent dans l'autre; les systèmes peuvent avoir comme éléments correspondants communs des éléments isolés et même des formes fondamentales de première ou de seconde espèce. Des considérations, analogues à celles que nous avons appliquées précédemment aux systèmes collinéaires situés dans un même plan, nous conduisent aux théorèmes suivants :

*Si deux systèmes collinéaires de l'espace ont un système plan $\sigma$ correspondant commun, ils ont aussi une gerbe correspondante* S *commune; et réciproquement.*

En effet, deux systèmes plans $\alpha$ et $\alpha_1$ qui se correspondent dans les espaces collinéaires sont aussi collinéaires (II, page 24); leurs plans se coupent suivant une droite de $\sigma$ et ils ont comme éléments correspondants communs tous les points de cette ligne d'intersection, puisque chacun des points de cette droite coïncide avec son correspondant; ils sont donc perspectifs et sont des sections d'une même gerbe S. Mais comme tout élément de S, soit rayon, soit plan, unit un élément de $\sigma$ qui se correspond à lui-même avec deux éléments de $\alpha$ et $\alpha_1$ qui se correspondent entre eux, il doit se correspondre à lui-même; de sorte que deux points homologues des systèmes de l'espace doivent se trouver sur une droite passant par S, que deux droites homologues doivent être situées dans un plan passant par S et que ces dernières doivent en outre se couper en un même point de $\sigma$.

D'autre part, si les deux systèmes de l'espace ont une gerbe corres-

pondante commune, deux gerbes homologues A et $A_1$ quelconques sont perspectives. En effet, puisque le rayon $\overline{AA_1}$ passe par S, ces deux gerbes collinéaires ont comme élément correspondant commun non seulement ce rayon, mais un plan quelconque qui le contient; elles sont donc les projections d'un même système plan $\sigma$. Mais deux éléments homologues des gerbes A et $A_1$ couperont un élément de S, qui se correspond à lui-même, suivant un élément de $\sigma$; par conséquent tous les éléments de $\sigma$ coïncident avec leurs correspondants.

Deux systèmes collinéaires de l'espace, qui ont une gerbe S et un système plan $\sigma$ correspondants communs sont dits *perspectifs*. Le point S par lequel passent les droites qui joignent deux points homologues quelconques et les plans qui contiennent deux droites homologues quelconques du système est appelé le *centre de collinéation* des systèmes de l'espace, et le plan $\sigma$ sur lequel les rayons ou les plans homologues se coupent deux à deux a reçu le nom de *plan de collinéation*.

Pour rapporter perspectivement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace, on peut prendre à volonté le plan $\sigma$ et le centre S de collinéation et en outre faire correspondre l'un à l'autre deux points A et $A_1$, situés sur une droite passant par S, mais extérieurs à $\sigma$. Soient, en effet, B, C, D trois points de $\sigma$ tels que les droites qui les joignent ne coupent pas la droite $\overline{SAA_1}$. Les deux systèmes de l'espace peuvent être rapportés collinéairement l'un à l'autre de telle sorte qu'aux points A, B, C, D, S de l'un correspondent respectivement les points $A_1$, B, C, D, S de l'autre. Les rayons $\overline{SAA_1}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$, et par suite tous les éléments de la gerbe S, se correspondent à eux-mêmes; de même le plan $\overline{BCD}$ ou $\sigma$ se correspond à lui-même, ainsi que tout autre élément, puisqu'en outre des points B, C, D, il y a encore sur $\overline{SAA_1}$ un point de $\sigma$ qui se correspond à lui-même (II, page 16).

Il est très facile de construire dans les espaces perspectifs une forme qui corresponde à une forme donnée; on procède en suivant la marche que nous avons indiquée pour les systèmes perspectifs situés dans un même plan. Un cas particulier, qui peut se rencontrer ici, est celui où le plan de collinéation s'éloigne à l'infini, et où par conséquent deux droites ou deux plans correspondants deviennent parallèles.

Dans ce cas, les systèmes sont dits perspectivement *semblables*. La stéréotomie a déjà fait connaître au lecteur des systèmes de ce genre; ainsi, par exemple, une machine et l'un de ses modèles à une échelle

exacte peuvent être considérés comme des portions de systèmes semblables et on peut les mettre en perspective de telle sorte que les droites qui joignent deux à deux les points homologues se coupent en un point fixe, le centre de collinéation, et que deux rayons ou deux plans homologues soient parallèles. En général deux espaces collinéaires ne peuvent pas être amenés en position perspective.

# CINQUIÈME LEÇON.

**Surfaces du second ordre. — Génération et classification.**

Les formes fondamentales uniformes nous ont conduits précédemment aux formes élémentaires du second ordre; les formes fondamentales projectives de seconde espèce nous conduisent de même aux surfaces et aux gerbes de plans du second ordre. Ainsi:

Une surface du second ordre est engendrée par deux gerbes réciproques non concentriques; tout rayon de l'une des gerbes coupe le plan, qui lui correspond dans l'autre gerbe, en un point de la surface.

Une gerbe de plans du second ordre est engendrée par deux systèmes plans réciproques, qui ne sont pas situés dans un même plan; tout rayon de l'un des systèmes est projeté du point qui lui correspond dans l'autre suivant un plan de la gerbe.

La surface du second ordre et la gerbe de plans du second ordre étant des formes réciproques, la loi de réciprocité permet de déduire immédiatement toutes les propriétés de l'une de ces deux formes des propriétés de l'autre; c'est pourquoi, nous pourrons nous borner à étudier les surfaces du second ordre. On verra plus tard que la gerbe de plans du second ordre se compose de tous les plans tangents à une surface du second ordre; de sorte qu'en faisant même abstraction de la loi de réciprocité, la théorie de la gerbe de plans se trouve comprise dans celle de la surface du second ordre.

Soient S et $S_1$ les centres des deux gerbes réciproques qui engendrent une surface du second ordre; il est tout d'abord facile de voir que tout plan $\alpha$ mené par S coupe la surface suivant une courbe du second ordre. Cette courbe passe par le point S et par le point où le plan $\alpha$ est rencontré par le rayon $a_1$ qui lui correspond dans la gerbe $S_1$; dans certains cas particuliers, elle peut se décomposer en deux droites. En effet, au faisceau de rayons de S, qui est contenu dans le plan $\alpha$, correspond dans $S_1$ un faisceau de plans qui lui est projectif et dont l'axe est la droite $a_1$. Ces faisceaux projectifs engendrent la courbe du second ordre qui est commune au plan $\alpha$ et à la surface $F^2$ et qui ne peut se décomposer en deux droites que si un rayon du faisceau $\alpha$ est situé dans le plan de $a_1$ qui lui correspond. La courbe du second ordre est aussi engendrée par deux faisceaux projectifs de rayons, dont l'un est le faisceau $\alpha$ de S dont il vient d'être question, et dont l'autre est la section du faisceau de plans $a_1$ par le plan $\alpha$; ces faisceaux ne sont perspectifs que dans des cas particuliers. On voit d'après cela que la courbe d'intersection de $F^2$ et de $\alpha$ passe par les points S et $a_1\alpha$.

De la même manière, la surface du second ordre sera coupée par tout plan mené par $S_1$ suivant une courbe du second ordre passant par ce même point $S_1$.

Il résulte de là que la surface $F^2$ ne peut pas avoir plus de deux points communs avec une droite quelconque $g$ qui n'est pas située tout entière sur elle; en effet, la courbe du second ordre, intersection de la surface avec le plan $\overline{Sg}$ ne peut avoir au plus que deux points communs avec la droite $g$. La surface est donc bien du second ordre. Toute droite $g$, passant par S, a en général avec la surface un autre point commun différent de S, c'est celui où elle est coupée par le plan $\gamma_1$ qui lui correspond; ce second point ne coïncidera avec S que si $\gamma_1$ passe par le rayon $\overline{SS_1}$ commun aux faisceaux. Nous dirons que tout rayon de S, qui n'a avec la surface du second ordre aucun point commun différent de S, est une *tangente* à la surface au point S. Comme toute tangente a pour élément correspondant un plan passant par $\overline{SS_1}$, toutes les tangentes à la surface qui passent par S sont situées dans le plan de la gerbe S qui correspond au rayon commun $\overline{SS_1}$; et ce plan est appelé le *plan tangent* de la surface $F^2$ au point S. Donc :

*Au rayon $\overline{SS_1}$ commun aux deux gerbes correspond en* S *et* $S_1$ *un plan tangent à la surface du second ordre.*

Peut-il encore exister de pareils plans tangents dans d'autres points

de la surface? et la surface est-elle coupée suivant des courbes du second ordre par des plans sécants qui ne passent ni par S ni par $S_1$?

Ces questions s'imposent à nous tout d'abord et nous sommes évidemment tentés de répondre affirmativement à la seconde, si nous remarquons qu'aucune section plane de la surface ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points. Nous savons aussi déjà que par tout point P d'une surface du second ordre il doit passer au moins deux systèmes de coniques situées sur la surface; car tout plan des deux faisceaux dont les axes sont les droites qui joignent le point P aux centres S et $S_1$ des gerbes réciproques a une conique commune avec la surface du second ordre. Nous pourrons répondre affirmativement aux deux questions précédentes, et avec toute certitude, quand nous aurons démontré que:

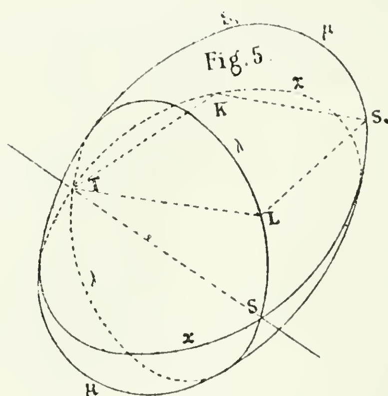
*Un point quelconque d'une surface donnée du second ordre peut être choisi pour centre de l'une des deux gerbes réciproques qui engendrent la surface.*

Soient S et $S_1$ les centres des deux gerbes réciproques qui ont primitivement engendré la surface donnée du second ordre $F^2$ et soit $S_2$ un troisième point quelconque de $F^2$; il s'agit de rapporter réciproquement l'une à l'autre les gerbes S et $S_2$ de manière qu'elles engendrent aussi la surface. Si les gerbes S et $S_2$ sont rapportées réciproquement l'une à l'autre d'une manière entièrement arbitraire, elles engendreront une deuxième surface du second ordre $F_1^2$, passant par les points S et $S_2$. Nous allons établir la réciprocité entre S et $S_2$ de telle manière que $F_1^2$ ait en commun avec $F^2$ deux coniques passant par S, mais non par $S_2$, et nous prouverons ensuite que $F^2$ et $F_1^2$ coïncident en tous leurs points et conséquemment sont identiques.

Soient $\varkappa$ et $\lambda$ les deux coniques d'intersection de la surface donnée du second ordre $F^2$ (fig. 5) par deux plans passant par le point S, mais ne contenant pas $S_2$. Soit T le point où la droite d'intersection de ces deux plans rencontre la surface pour la seconde fois et soit $\overline{ST}$ la corde commune aux deux coniques $\varkappa$ et $\lambda$, corde qui peut devenir une tangente, si T se rapproche indéfiniment de S.

Tout d'abord, pour que T soit situé sur la surface $F_1^2$ engendrée par les gerbes S et $S_2$, il faut qu'au rayon $\overline{ST}$ de S corresponde un plan $\overline{S_2KL}$ de $S_2$ passant par T. Soient K et L les points où ce plan coupe pour la seconde fois les coniques $\varkappa$ et $\lambda$; nous pouvons maintenant établir de la manière suivante la réciprocité demandée pour les gerbes S

et $S_2$. Nous projetons la courbe $\varkappa$ du second ordre du point S suivant un faisceau de rayons $S\varkappa$ et de l'axe $\overline{S_2K}$ suivant un faisceau de plans; ce dernier se trouve ainsi rapporté projectivement au faisceau de rayons. De même nous projetons la conique $\lambda$ de S suivant un faisceau de rayons $S\lambda$ et de $\overline{S_2L}$ suivant un faisceau de plans qui est alors projectif au faisceau de rayons. Or, comme le plan $\overline{S_2KL}$ commun aux faisceaux de plans qui projette le point d'intersection T des deux coniques, correspond au rayon $\overline{ST}$ commun aux deux faisceaux de rayons, les deux gerbes S et $S_2$ sont d'après cela rapportées réciproquement l'une à l'autre (d'après la page 7). La surface $F_1^2$ qu'engendrent ces deux gerbes passe non seulement par S et $S_2$, mais aussi par la conique $\varkappa$, puisque celle-ci est engendrée par le faisceau de rayons $S\varkappa$ et le faisceau correspondant




de plans $\overline{S_2K}$; de même la surface passe aussi par la conique $\lambda$. — Accessoirement, cette construction nous donne la proposition suivante:

*Par deux coniques données $\varkappa$ et $\lambda$, qui sont situées dans des plans différents, mais qui se coupent en deux points* S *et* T, *ou qui sont tangentes en un point* S, *et par un point* $S_2$ *extérieur à leurs plans, on peut faire passer une surface de second ordre.*

On ne peut pas en faire passer plus d'une, car deux surfaces telles que $F^2$ et $F_1^2$ qui passent tous les deux par $\varkappa$, $\lambda$ et $S_2$ sont identiques, comme on le verra dans ce qui suit. D'abord, tout plan mené par $S_1$ et $S_2$, qui contient deux points de chacune des courbes $\varkappa$ et $\lambda$, coupe la surface suivant deux coniques qui coïncident en tous leurs points, puisqu'en outre de $S_2$ elles ont en commun les quatre points de $\varkappa$ et $\lambda$ dont il

vient d'être question (I, page 78). Or il est toujours possible de mener de pareils plans, si l'on a d'avance convenablement choisi $\varkappa$ et $\lambda$ sur la surface $F^2$. Soit maintenant $\mu$ une conique, passant par $S_1$ et $S_2$, qui appartient aux deux surfaces, mais qui peut ne pas passer par le point S ; soit de plus P un point quelconque de l'une des surfaces. Le plan $\overline{SPS_1}$ (de même que $\overline{SPS_2}$) coupe les deux surfaces suivant deux coniques qui, en outre de S et $S_1$ (ou S et $S_2$), ont encore trois autres points communs qui appartiennent aux coniques $\varkappa$, $\lambda$ et $\mu$. Ces deux coniques coïncidant, le point P de l'une des surfaces est situé sur l'autre ; c. q. f. d.

On voit aussi qu'il existe également en $S_2$ un plan tangent à la surface $F_2$ et que tout autre plan mené par $S_2$ a une conique commune avec $F^2$ ; suivant les circonstances, cette courbe peut dégénérer en deux droites. $S_2$ étant un point quelconque de la surface, nous avons de la sorte démontré la propriété fondamentale suivante des surfaces du second ordre :

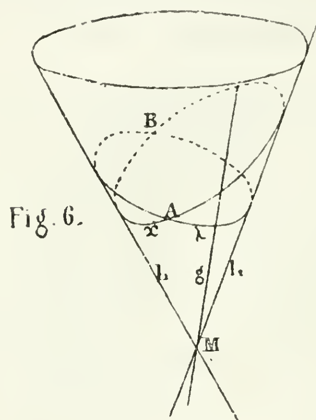
*Une surface de second ordre ne peut être coupée par un plan quelconque que suivant une conique, qui peut aussi se réduire à deux droites. La surface est touchée en chacun de ses points par un plan qui contient toutes les tangentes possibles de la surface en ce point.*

Nous appellerons l'attention sur un point particulier. Pour démontrer qu'on peut faire passer une surface du second ordre par $\varkappa$, $\lambda$ et $S_2$ nous avons rapporté réciproquement l'une à l'autre les gerbes S et $S_2$ et nous avons tout d'abord fait correspondre au rayon $\overline{ST}$ un plan arbitraire $\overline{S_2KL}$ passant par T. En changeant ce plan, nous pourrons rapporter d'une infinité de manières les gerbes S et $S_2$ réciproquement l'une à l'autre de manière qu'elles engendrent la surface dont il s'agit ; donc :

*Deux gerbes, dont les centres sont situés sur une surface donnée du second ordre, peuvent d'une infinité de manières être rapportées réciproquement l'une à l'autre, de façon à engendrer la surface du second ordre.*

La propriété fondamentale des surfaces du second ordre que nous avons démontrée plus haut va nous servir immédiatement pour faire une classification de ces surfaces. Nous distinguerons les surfaces réglées du second ordre, qui peuvent être décrites par une droite, et celles qui ne contiennent aucune droite. — Si une surface du second ordre contient une droite $g$, elle a encore une seconde droite $l$ commune avec tout plan sécant mené par $g$ ; car la conique suivant laquelle ce plan la coupe se décompose alors en deux droites. Quand le plan sécant tourne

autour de $g$, la seconde droite $l$ parcourt la surface. Les surfaces du second degré à génératrices rectilignes ne sont autres que les surfaces réglées et les cônes du second ordre que nous connaissons déjà. En effet, ou bien la droite mobile $l$ se meut de telle façon que deux droites qui figurent deux quelconques des positions qu'elle occupe ne se rencontrent pas, ou bien il y a deux positions $l_1$ et $l_2$ où elles se coupent. Dans ce dernier cas, le point M d'intersection de $l_1$ et $l_2$ (fig. 6) ne peut se trouver que sur la droite $g$, puisque les plans $\overline{gl_1}$ et $\overline{gl_2}$ sont différents l'un de l'autre. Soient maintenant A et B deux points quelconques de la surface qui ne soient sur aucune des droites $g$, $l_1$, $l_2$ et supposons la surface du second ordre coupée suivant les coniques $\varkappa$ et $\lambda$ par deux plans passant par A et B. Les deux surfaces coniques qui




projettent $\varkappa$ et $\lambda$ du point M sont alors identiques puisqu'elles ont en commun les cinq rayons $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $g$, $l_1$, $l_2$; et chacun de leurs rayons appartient à la surface du second ordre donnée, parce qu'il renferme trois de ses points, à savoir M et un point de chacune des coniques $\varkappa$ et $\lambda$. Dans ce cas, la surface est donc un cône du second ordre.

D'autre part, si aucunes des positions de la droite mobile $l$ ne se rencontrent, nous prendrons trois quelconques d'entre elles, $l_1$, $l_2$, $l_3$. Une quatrième droite qui rencontre $l_1$, $l_2$ et $l_3$ fait également partie de la surface du second ordre puisqu'elle a trois points d'intersection communs avec elle, et l'on pourra aussi décrire la surface en faisant glisser une droite mobile sur les trois droites $l_1$, $l_2$, $l_3$. Dans ce cas, la surface du second ordre est donc une surface réglée, c'est-à-dire un hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique.

Les surfaces du second ordre sur lesquelles ne sont situées aucunes droites se divisent en *ellipsoïdes*, en *paraboloïdes elliptiques* et en *hyperboloïdes à deux nappes*. L'ellipsoïde n'a aucun point commun avec le plan à l'infini ; le paraboloïde elliptique lui est tangent et l'hyperboloïde à deux nappes le coupe suivant une courbe du second ordre. On obtient des cas particuliers de ces genres de surfaces en faisant tourner une conique autour d'un de ses axes ; l'ellipse, dans une rotation de ce genre, décrit un ellipsoïde de révolution, la parabole un paraboloïde de révolution et l'hyperbole un hyperboloïde de révolution à deux nappes, quand la rotation s'effectue autour de son axe principal. Si au contraire la rotation a lieu autour de son axe conjugué, on obtient un hyperboloïde de révolution à une nappe.

D'après sa définition, l'ellipsoïde a une ellipse commune avec un plan sécant quelconque. La section du paraboloïde elliptique par un plan ne sera une parabole que si ce plan contient la direction sur laquelle se trouve le point à l'infini du paraboloïde ; dans tout autre cas, c'est une ellipse. Nous avons vu de même (I, page 126) que la section du paraboloïde hyperbolique par un plan est une hyperbole qui peut aussi dégénérer en deux droites ; ce n'est exceptionnellement une parabole que si le plan sécant passe par le point de contact du paraboloïde et du plan à l'infini. Un plan sécant coupe l'hyperboloïde à une nappe et l'hyperboloïde à deux nappes suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que ce plan ne contient aucun point de la courbe située à l'infini sur l'hyperboloïde ou bien qu'il en renferme un ou deux ; dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, la section peut aussi se composer de deux droites.

Une surface du second ordre engendrée par deux gerbes réciproques quelconques S et $S_1$ est-elle réglée ou non ? On peut facilement le savoir à l'avance en se servant de cette propriété que tout plan tangent d'une surface réglée a avec elle une ou deux droites communes. Or, le rayon $\overline{SS_1}$ de la gerbe S a pour correspondant le plan tangent en $S_1$ et les différents plans du faisceau $\overline{SS_1}$ ont pour éléments correspondants les différentes tangentes à la surface en $S_1$. Si deux des rayons de ce faisceau de tangentes sont contenus dans les plans du faisceau $\overline{SS_1}$ qui leur correspondent, le plan tangent a ces deux rayons communs avec la surface du second ordre et cette dernière est une surface réglée. Si la coïncidence n'a lieu que pour un seul rayon, nous avons un cône ; enfin, si aucun des rayons du faisceau de tangentes n'est situé dans le plan qui lui

correspond, la surface du second ordre n'a pas de génératrices rectilignes. Dans le cas tout à fait particulier où trois plans, et par suite tous les plans du faisceau $\overline{SS_1}$ passent par les rayons de $S_1$ qui leur correspondent, la surface du second ordre se décompose en deux plans; et il en résulte que toute conique commune à la surface et à un plan quelconque doit se décomposer en deux droites.

---

# SIXIÈME LEÇON.

**Polarité des surfaces du second ordre. — Diamètres, centre et axes principaux de ces surfaces.**

De même que les courbes du second ordre, les surfaces du second ordre possèdent aussi certaines propriétés qu'on désigne généralement sous le nom de *propriétés polaires* ou de *polarité*. On peut les établir facilement au moyen des théorèmes de la cinquième leçon. Dans ce qui suit, nous laisserons de côté les surfaces coniques du second ordre, parce que leurs propriétés polaires ont été déjà démontrées en même temps que celles des courbes du second ordre (I, page 106).

Soit A un point quelconque de l'espace, qui n'est pas situé sur une surface donnée $F^2$ du second ordre. Nous menons par A des sécantes quelconques à la surface et sur chacune d'elles nous déterminons le point qui est harmoniquement séparé de A par les deux points où la sécante rencontre la surface. Tous ces points conjugués harmoniques doivent alors se trouver dans un même plan $\alpha$. En effet, le lieu géométrique de ces conjugués harmoniques et un plan quelconque, qui passe par A et qui coupe la surface $F^2$ suivant une courbe du second ordre, ont une droite commune qui est la polaire du point A par rapport à cette courbe du second ordre ; et comme toutes ces droites, qui se coupent deux à deux, ne passent pas par un seul et même point, elles sont toutes situées dans un seul et même plan $\alpha$. Ce plan renferme aussi les points de contact des tangentes que l'on peut mener de A à l'une quelconque des courbes du second ordre dont il vient d'être question ; il contient également les points d'intersection des tangentes

de ces courbes dont les points de contact sont situés sur une droite passant par A (Voir I, pages 96—97). Il en résulte que deux plans tangents quelconques à la surface, dont les points de contact sont situés sur une droite passant par A, se coupent sur le plan α; en effet, les tangentes contenues dans ces plans tangents se coupent deux à deux suivant des points de α.

Nous dirons que α est le *plan polaire* ou la *polaire* de A et que, réciproquement, A est le *pôle* du plan α. Le plan polaire d'un point quelconque se trouve donc déterminé par les propriétés suivantes des surfaces du second ordre qui peuvent servir chacune à le définir et à le construire.

*Si par un point A, non situé sur une surface donnée du second ordre, on mène à cette surface des sécantes et des plans sécants et si l'on détermine :*

1° *Les points de ces sécantes, harmoniquement séparés de A par la surface ;*

2° *Les polaires de A par rapport aux coniques communes à la surface et aux plans sécants ;*

3° *Les droites d'intersection des plans tangents à la surface en deux points situés sur une même sécante ;*

4° *Les points de contact de toutes les tangentes et de tous les plans tangents à la surface, qui passent par A ;*

*Tous ces points et toutes ces droites sont situés dans un même plan* α, *appelé le* plan polaire *de A et dont A est le* pôle.

Les tangentes qu'on peut mener à la surface donnée par l'un quelconque de ses points forment un faisceau de rayons du premier ordre. Si, au contraire, on considère un point quelconque A, non situé sur la surface et dont le plan polaire coupe cette surface, on voit que :

*Les points de contact de toutes les tangentes et de tous les plans tangents qu'on peut mener à une surface du second ordre par un point donné quelconque A sont situés sur une conique; par conséquent, les tangentes elles-mêmes sont situées sur une surface conique du second ordre, qui est enveloppée par les plans tangents.*

La conique dont il s'agit dans ce théorème est celle qui est commune à la surface du second ordre et au plan polaire de A. Il est clair que, réciproquement, tout droite qui unit un point P de cette conique avec A est tangente en P à la surface du second ordre; en effet, si elle coupait la surface en un autre point Q, le point harmoniquement séparé de A par P et Q serait extérieur au plan polaire de A, puisque P est situé

dans ce plan. Tout plan qui projette une tangente de la conique du point A est donc un plan tangent de la surface. Comme une droite quelconque menée par A ne rencontre pas plus de deux tangentes de cette conique, nous avons ce théorème :

*Par une droite, qui n'appartient pas tout entière à une surface du second ordre, on ne peut mener plus de deux plans tangents à la surface ; cette surface est donc de seconde classe.*

Étant donnée une surface quelconque du second ordre, à tout point qui n'est pas situé sur la surface correspond un plan polaire. Pour le cas limite que nous avons laissé de côté jusqu'ici, nous dirons qu'à tout point situé sur la surface correspond comme plan polaire son plan tangent et réciproquement que le pôle de tout plan tangent à la surface est son point de contact. Le théorème suivant établit clairement le mode de correspondance des points et des plans.

Étant donnés deux points A et B, si le premier est situé dans le plan polaire du second, le second est aussi dans le plan polaire du premier.

Étant donnés deux plans, si le premier passe par le pôle du second, le second passe aussi par le pôle du premier.

En effet, coupons la surface du second ordre par un plan contenant les points A et B et construisons la polaire de chaque point par rapport à la courbe de section. Par hypothèse, la polaire de B passe par le point A ; par conséquent (I, page 99) la polaire de A passe par le point B. Or, la polaire de A par rapport à cette courbe de section est contenue dans le plan polaire de A par rapport à la surface du second ordre ; donc B est situé dans ce plan polaire. Le théorème de droite n'est que la répétition de celui de gauche.

Si donc un point se meut dans un plan, son plan polaire pivote en même temps autour du pôle de ce plan ; et si un plan pivote autour d'un point, son pôle se meut dans le plan polaire de ce point. Nous déduisons de là que :

Si un point se meut sur une droite et par conséquent dans deux plans en même temps, son plan polaire tourne autour d'une droite ; en effet, il tourne autour des

Si un plan tourne autour d'une droite, et par conséquent autour de deux points de cette droite en même temps, son pôle se meut sur une droite ; en effet, il se meut

pôles des deux plans et par conséquent autour de la droite qui réunit ces pôles.

dans les plans polaires des deux points et par conséquent sur l'intersection de ces plans.

Étant données deux droites, on dit que l'une d'elles est la *polaire* de l'autre, quand les plans polaires de tous les points de l'une passent par l'autre et quand, réciproquement, les pôles de tous les plans passant par l'une sont situés sur l'autre. La surface du second ordre fait donc correspondre à toute droite de l'espace une autre droite qui est sa polaire. La double proposition qui précède peut aussi s'énoncer comme il suit :

Si une droite passe par un point, sa polaire est située dans le plan polaire de ce point.

Si une droite est situé dans un plan, sa polaire passe par le pôle de ce plan.

D'après cela, pour construire la polaire $g_1$ d'une droite $g$, nous pouvons chercher les plans polaires de deux points de $g$ et déterminer leur droite d'intersection $g_1$, ou chercher les pôles de deux plans passant par $g$ et déterminer la droite $g_1$ qui les unit. Si la droite $g$ est coupée en deux points par la surface du second ordre, les deux plans tangents à la surface aux deux points d'intersection passent par la polaire $g_1$ de $g$. Si de $g$ l'on peut mener deux plans tangents à la surface, $g_1$ contient les deux points de contact de ces plans. Si $g$ est tangente à la surface, elle est coupée par sa polaire en son point de contact et se trouve avec elle dans un plan tangent de la surface; en effet, $g$ étant située dans le plan tangent, $g_1$ doit contenir le pôle de ce plan, c'est-à-dire son point de contact, et comme $g$ passe par ce point, $g_1$ doit être située dans le plan polaire de ce point, c'est-à-dire dans le plan tangent.

Dans tout autre cas, nous pourrons déterminer la polaire $g_1$ d'une droite $g$ ainsi qu'il suit. Nous couperons la surface du second ordre par des plans contenant la droite $g$ et nous chercherons le pôle de $g$ par rapport à chacune des courbes d'intersection; tous ces pôles sont situés sur la droite $g_1$. En effet, soit P l'un quelconque de ces pôles; le plan polaire de P passe par la droite $g$ et par conséquent P doit être situé sur $g_1$. Quelle construction réciproque peut-on déduire de celle qu'on vient de donner?

Pour construire le pôle d'un plan donné, nous cherchons les plans ou

les droites polaires d'un nombre quelconque de points ou de droites situés par ce plan ; tous ces plans ou droites polaires se coupent au point cherché. En particulier, les plans tangents en tous les points communs à la surface et au plan passent par le pôle cherché ; si par une droite quelconque du plan on peut mener deux plans tangents à la surface, le pôle est situé sur la droite qui unit les deux points de contact et il est harmoniquement séparé (II, page 42) du plan donné par les deux plans tangents.

*La polarité des surfaces du second ordre nous conduit à un cas particulier de la réciprocité dans l'espace.* En effet, puisque par le moyen d'une surface du second ordre à tout point P correspond un plan $\pi$ comme plan polaire et à tout plan ou toute droite passant par P un point, qui est le pôle du plan, ou une droite, qui est la polaire de la droite, ce point ou cette droite étant contenus dans $\pi$, la définition générale de la réciprocité (donnée II, page 25) trouve immédiatement son application ici.

Deux formes de l'espace sont rapportées réciproquement l'une à l'autre, et par suite projectives, quand elles sont les polaires l'une de l'autre par rapport à une surface du second ordre.

Au moyen de ces remarques, on peut démontrer maintenant le théorème qui suit.

*Toute surface du second ordre est enveloppée par une gerbe de plans du second ordre.*

Imaginons la surface du second ordre engendrée par deux gerbes réciproques S et $S_1$, de telle sorte qu'en tout point P de la surface se coupent un rayon de S et le plan correspondant de $S_1$. Alors tous les plans tangents de la surface sont engendrés par deux systèmes plans réciproques $\sigma$ et $\sigma_1$, le plan tangent en un point quelconque P joignant un rayon de $\sigma$ au point correspondant de $\sigma_1$. Les deux systèmes plans sont les polaires par rapport à la surface du second ordre des gerbes S et $S_1$ ; la surface est respectivement tangente en S et $S_1$ aux plans $\sigma$ et $\sigma_1$ et toute droite ou tout plan de S ou de $S_1$ a respectivement pour élément correspondant une droite ou un point de $\sigma$ ou $\sigma_1$.

En vue de nos recherches ultérieures, nous introduirons encore les dénominations qui suivent :

Deux points, ou un point et un rayon sont dits *conjugués*, quand

Deux plans, ou un plan et une droite sont dits *conjugués*, quand

chacun d'eux est situé sur le plan polaire ou la droite polaire de l'autre. | chacun d'eux passe par le pôle ou la polaire de l'autre.

*Deux droites sont dites* conjuguées, *quand chacune d'elles est dans un même plan avec la polaire de l'autre.*

D'après cela, un point est conjugué à tous les points et à tous les rayons qui sont situés dans son plan polaire ; un plan est conjugué à tous les rayons et à tous les plans qui passent par son pôle ; et enfin une droite $g$ est conjuguée à tous les points situés sur sa polaire $g_1$, à tous les plans qui passent par $g_1$ et à toutes les droites qui sont coupées par $g_1$. Tout point, toute tangente et tout plan tangent de la surface est conjugué à lui-même.

Si deux points A et B sont conjugués par rapport à une surface du second ordre, ils sont aussi conjugués par rapport à toute courbe du second ordre suivant laquelle un plan quelconque du faisceau $\overline{AB}$ coupe la surface. | Si deux plans $\alpha$ et $\beta$ sont conjugués par rapport à une surface du second ordre, ils sont aussi conjugués par rapport à tout cône du second ordre circonscrit à la surface et dont le sommet est situé sur la droite $\overline{\alpha\beta}$.

En effet, par hypothèse, le plan polaire du point A passe par B ; il renferme donc aussi (II, page 42) la polaire de A par rapport à la courbe d'intersection du second ordre, et par conséquent cette polaire doit contenir le point B, ainsi qu'on l'a énoncé. Cette double proposition admet une réciproque.

Soit donc $g$ une droite qui n'est pas conjuguée à elle-même (c'est-à-dire qui n'est pas tangente à la surface du second ordre) et supposons qu'on fasse correspondre l'un à l'autre

les points de la ponctuelle $g$ qui sont conjugués deux à deux, ces points sont accouplés involutivement (I, page 147). | les plans du faisceau $g$ qui sont conjugués deux à deux, ces plans sont accouplés involutivement.

*Si dans un faisceau de rayons, dont le centre et le plan ne sont pas conjugués à eux-mêmes, on fait correspondre entre eux les rayons conjugués deux à deux, ses rayons sont accouplés involutivement.*

Ce dernier théorème peut se ramener aux précédents. En effet, nous pouvons dans le plan du faisceau faire correspondre à chaque rayon un point qui lui est conjugué; nous obtenons ainsi une ponctuelle dont les points sont accouplés involutivement et à laquelle le faisceau de rayons est perspectif.

Si un point ou un rayon décrit un système plan $\alpha$, sa polaire décrit une gerbe A réciproque à $\alpha$, dont le centre est le pôle du plan $\alpha$. Toute section plane $\beta$ de cette gerbe est également rapportée réciproquement à $\alpha$ et toute gerbe B perspective à $\alpha$ est réciproque à A. Donc :

Deux systèmes plans $\alpha$ et $\beta$, dont les lieux ne sont pas conjugués, seront rapportés réciproquement l'un à l'autre, si à tout point de l'un on assigne comme correspondant la droite de l'autre système qui lui est conjuguée.

Deux gerbes A et B, dont les sommets ne sont pas conjugués, seront rapportées réciproquement l'une à l'autre, si à tout rayon de l'une on assigne comme correspondant le plan de l'autre gerbe qui lui est conjugué.

Si un point décrit une forme rectiligne $g$, son plan polaire décrit un faisceau de plans $g_1$ projectif à $g$ ; toute section de $g_1$ est donc projective à $g$ et toute projection de $g$ est projective à $g_1$. Entre autres propriétés, on déduit de là que :

Deux ponctuelles ou deux faisceaux du premier ordre, dont les lieux ne sont pas conjugués, seront rapportés projectivement entre eux, si l'on assigne comme correspondants l'un à l'autre les éléments de ces formes qui sont conjugués deux à deux.

---

# APPENDICE.

## DIAMÈTRES ET PLANS DIAMÉTRAUX — CENTRE, AXES PRINCIPAUX ET PLANS DE SYMÉTRIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

*Les points milieux de toutes les cordes qu'on peut mener dans une surface du second ordre parallèlement à une direction donnée quelconque sont situés dans un plan diamétral de la surface. Ce plan renferme aussi les points de contact de toutes les tangentes et plans tan-*

*gents, menés à la surface parallèlement à la direction donnée, et les centres de toutes les courbes du second ordre qui sont situées sur la surface et dont les plans contiennent cette direction.*

Ce *plan diamétral* est le plan polaire du point à l'infini qui est situé sur la direction donnée.

*Si l'on coupe une surface du second ordre par un faisceau de plans parallèles, les centres de toutes les courbes d'intersection sont situés sur une droite qu'on appelle* un diamètre *de la surface. Les plans tangents aux points où la surface est coupée par le diamètre sont parallèles aux plans sécants.*

Ce *diamètre* est la polaire de la droite à l'infini qui est commune aux plans parallèles.

*Tous les diamètres et tous les plans diamétraux d'une surface du second ordre passent par un même point.*

C'est le pôle du plan à l'infini, parce que ce plan contient les polaires et les pôles de tous les diamètres et de tous les plans diamétraux.

Si la surface du second ordre est tangente au plan à l'infini, le point de contact est le pôle de ce plan; ce pôle est donc aussi à l'infini. C'est ce qui a lieu pour les deux paraboloïdes; donc :

*Les diamètres et les plans diamétraux d'un paraboloïde elliptique ou hyperbolique passent par le point à l'infini où la surface est tangente au plan à l'infini. Les diamètres d'un paraboloïde sont donc parallèles.*

Pour les autres surfaces du second ordre, le pôle du plan à l'infini est un point propre qu'on appelle le *centre* de la surface.

*Le centre d'un ellipsoïde, d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un hyperboloïde à deux nappes est aussi le centre de toutes les courbes du second ordre qui sont situées sur la surface et dont les plans passent par ce point. Toute corde de la surface qui passe par le centre est bissectée par ce point.*

En effet, le centre est conjugué à tout point et à tout rayon à l'infini et il est séparé harmoniquement du point à l'infini sur chaque corde par les deux points où cette corde perce la surface (II, page 45).

*Tous les plans tangents aux points à l'infini sur un hyperboloïde à une ou à deux nappes se coupent au centre de la surface* (II, page 45) *et enveloppent un cône du second ordre, qu'on appelle le cône asymptotique de l'hyperboloïde. Le cône asymptotique est tangent à l'hyperboloïde le long de sa courbe à l'infini. Un plan sécant quelconque a en*

*commun avec l'hyperboloïde une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que ce plan ou un plan parallèle coupe le cône asymptotique suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole.*

Un diamètre quelconque d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde a pour conjugués un plan diamétral, et l'un quelconque des diamètres situés dans ce plan diamétral. Le plan conjugué divise en deux parties égales toutes les cordes de la surface qui sont parallèles au diamètre; et réciproquement, le diamètre passe par les centres de toutes les coniques de la surface dont les plans sont parallèles au plan diamétral qui lui est conjugué. Si le plan qui unit deux diamètres conjugués coupe la surface du second ordre, ces diamètres sont aussi des diamètres conjugués dans la section qu'il détermine dans la surface, parce que toutes les cordes de cette courbe qui sont parallèles à l'un des diamètres sont bissectés par l'autre.

Un diamètre qui est perpendiculaire au plan qui lui est conjugué s'appelle un *axe principal* ou un *axe* de la surface du second ordre.

*Un paraboloïde n'a qu'un seul axe* a.

Les centres des coniques de la surface, dont les plans sont normaux à la direction du diamètre, sont situés sur cet axe. Les plans diamétraux qu'on peut mener par l'axe $a$ sont conjugués deux à deux; par conséquent, le faisceau de plans $a$ est en involution (II, page 46). Coupons-le par un plan perpendiculaire à $a$, qui nous donne un faisceau de rayons en involution; il en résulte que suivant que ce faisceau sera rectangulaire ou non, les plans conjugués $\alpha$ et $\alpha_1$ du faisceau $a$ seront perpendiculaires deux à deux, ou qu'il y en aura au moins un couple satisfaisant à cette condition (I, page 181). Or, comme le plan $\alpha$ est conjugué et normal à tous les plans qui sont perpendiculaires à l'axe principal $a$, il est aussi normal à la direction sur laquelle est situé son pôle à l'infini; il divise donc en deux parties égales toutes les cordes du paraboloïde qui lui sont normales et l'on peut d'après cela lui donner le nom de *plan de symétrie* de la surface. Il en est de même pour le plan $\alpha_1$.

*Le paraboloïde a donc au moins deux plans de symétrie qui se coupent normalement suivant son axe.*

Si tout plan mené par l'axe $a$ est un plan de symétrie, toute courbe d'intersection du paraboloïde par un plan perpendiculaire à $a$ possède un faisceau rectangulaire de diamètres, comme on l'a remarqué précédemment; cette courbe est donc un cercle (I, page 111). Dans ce cas, le paraboloïde est un paraboloïde de révolution.

En général, les diamètres d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde ne sont pas perpendiculaires aux plans diamétraux qui leur sont conjugués. Car lorsque ceci a lieu d'une manière générale, lorsque par conséquent tout diamètre est un axe principal de la surface, celle-ci est une sphère. En effet, dans ce cas, tout faisceau de diamètres est rectangulaire et conséquemment la courbe suivant laquelle son plan coupe la surface est un cercle; et par suite aussi, tous les points de cette surface sont à égale distance de son centre. — Dans un ellipsoïde ou un hyperboloïde, il n'y a en général qu'un seul diamètre $d_1$ conjugué à un diamètre $d$ qui lui soit perpendiculaire; ce diamètre $d_1$ se trouve à la fois dans le plan diamétral $\delta$ conjugué à $d$ et dans le plan diamétral $\delta_1$ perpendiculaire à $d$.

Si le diamètre $d$ décrit autour du centre de la surface un faisceau de rayons $\gamma$, le plan diamétral $\delta$ qui lui est conjugué décrit un faisceau de plans projectifs au faisceau de rayons $\gamma$ (II, page 45) et dont l'axe $g$ est conjugué au plan $\gamma$. En même temps, le plan diamétral $\delta_1$ normal à $d$ décrit un second faisceau de plans dont l'axe $g_1$ est normal à $\gamma$; et ce faisceau de plans $g_1$ est aussi projectif au faisceau de rayons $\gamma$, puisque deux rayons de ce dernier comprennent entre eux le même angle que les plans du premier faisceau qui leur sont perpendiculaires. Les faisceaux de plans $g$ et $g_1$ sont donc projectifs entre eux et engendrent en général un cône du second ordre.

*Si un diamètre* d, *qui pivote autour du centre d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde, décrit un faisceau de rayons* $\gamma$, *le diamètre* $d_1$ *qui lui est conjugué et normal décrit en même temps un cône du second ordre, qui a pour sommet le centre de la surface.*

Il n'y a d'exception à ce théorème que si le faisceau de rayons $\gamma$ contient un axe principal de la surface, parce que les faisceaux de plans $g$ et $g_1$ ont alors comme élément correspondant commun le plan diamétral conjugué à l'axe principal et par conséquent sont perspectifs.

A l'aide de ce théorème, nous pouvons démontrer que tout ellipsoïde et tout hyperboloïde a des axes principaux (cette proposition se trouve déjà établie pour le cas d'exception que nous venons de mentionner). Supposons qu'on construise les cônes du second ordre $\Gamma$ et $E$ qui correspondent à deux faisceaux de diamètres $\gamma$ et $\varepsilon$; et admettons que l'on ait choisi $\varepsilon$ de telle manière que $E$ réunisse l'un à l'autre deux diamètres menés l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur de $\Gamma$; ceci peut se faire facilement. Les cônes concentriques $\Gamma$ et $E$ doivent alors se couper; ils

auront donc au moins deux rayons et au plus quatre rayons communs. L'un de ces rayons communs est conjugué et normal au rayon commun aux faisceaux de diamètres $\gamma$ et $\varepsilon$ ; tout autre d'entre eux $a$ a un diamètre conjugué aussi bien dans $\gamma$ que $\varepsilon$ et il est normal à ces diamètres. Par conséquent $a$ est aussi normal au plan dans lequel ces rayons conjugués sont situés ; c'est donc un axe principal de la surface considérée (ellipsoïde ou hyperboloïde). Le plan diamétral conjugué à l'axe $a$ est un plan de symétrie de la surface, puisqu'il bissecte toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires.

Le faisceau involutif de diamètres, situé dans le plan de symétrie, est rectangulaire ou renferme deux diamètres conjugués $b$ et $c$ qui sont perpendiculaires l'un à l'autre. Dans le premier cas, comme pour le paraboloïde, on voit que la surface du second ordre est de révolution et que chacun de ces diamètres est un de ses axes principaux ; dans le second cas, la surface n'a que trois axes principaux $a$, $b$, $c$ qui sont perpendiculaires entre eux et conjugués deux à deux.

Dans les recherches qui précèdent et qui ont trait aux axes principaux d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde, nous avons pris pour point de départ cette proposition que tout diamètre a un plan diamétral conjugué et qu'à tout faisceau de diamètres correspond un faisceau projectif de plans diamétraux conjugués. De même, dans les cônes propres du second ordre, à tout rayon passant par le sommet correspond un plan diamétral et à tout faisceau de rayons un faisceau projectif de plans diamétraux conjugués. Nos considérations sont donc encore applicables aux cônes du second ordre et nous pouvons énoncer le théorème ainsi qu'il suit :

*Tout ellipsoïde, tout hyperboloïde et tout cône propre du second a trois axes principaux perpendiculaires entre eux ; les trois plans qui les joignent deux à deux sont des plans de symétrie de la surface. C'est seulement quand la surface est de révolution qu'elle a plus de trois axes principaux ; elle en a alors une infinité.*

# SEPTIÈME LEÇON.

## Affinité, similitude et congruence des systèmes plans et des courbes du second ordre.

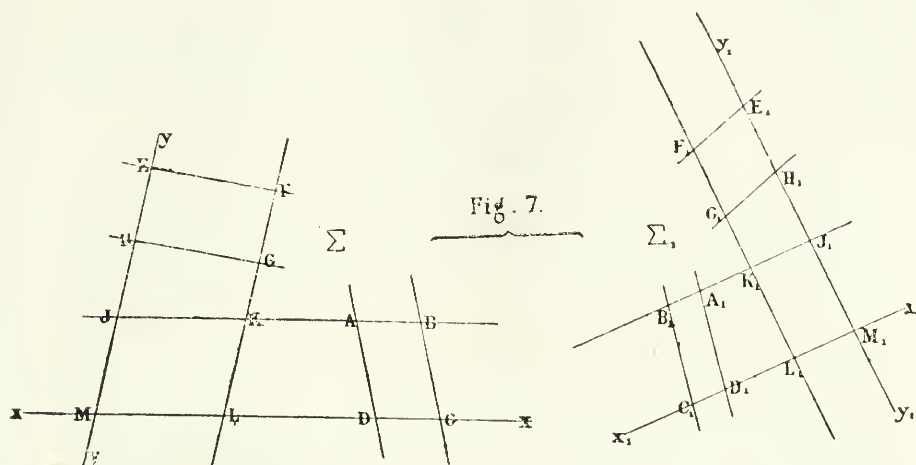
Deux systèmes collinéaires plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont dits *alliés*, ou en *affinité*, quand leurs droites à l'infini se correspondent. A tout point à l'infini dans l'un des systèmes correspond un point à l'infini dans l'autre, à tout parallélogramme correspond un parallélogramme, à toute ponctuelle une ponctuelle projective semblable (1, page 92). Une gerbe de rayons parallèles est coupée par deux plans quelconques suivant des systèmes alliés.

*Pour rapporter l'un à l'autre deux systèmes plans de manière qu'ils soient en affinité, nous pouvons prendre à volonté dans chacun d'eux un triangle propre et faire correspondre arbitrairement les uns aux autres les sommets de ces triangles. Ces triangles forment avec les droites à l'infini des deux systèmes deux quadrilatères complets rapportés l'un à l'autre; par leur moyen, le point ou le rayon de l'un des systèmes qui correspond à un point ou à un rayon de l'autre système se trouve déterminé d'une seule manière.*

Nous savons que dans les ponctuelles projectives semblables les segments homologues sont deux à deux dans un rapport constant et que par suite les ponctuelles sont divisées en parties proportionnelles par leurs points homologues.

Dans deux systèmes alliés $\Sigma$ et $\Sigma_1$ soient donnés deux couples de droites homologues $x$, $y$ et $x_1$, $y_1$ (fig. 7) qui se coupent respectivement aux points $M$ et $M_1$; supposons de plus qu'on connaisse les rapports

$\frac{DC}{D_1C_1}$ et $\frac{HE}{H_1E_1}$ des segments homologues ; on peut alors construire le point $K_1$ de $\Sigma_1$ homologue à un point quelconque K de $\Sigma$ en procédant comme




il suit. Nous menons par K une parallèle à $x$; qui coupe $y$ en J, et une parallèle à $y$, qui coupe $x$ en L. Puis nous déterminons le point $J_1$ de $y_1$ qui correspond à J, de manière qu'il vérifie la proportion suivante

$$\frac{MJ}{M_1J_1} = \frac{HE}{H_1E_1}.$$

De même nous déterminons le point $L_1$ de $x_1$ qui correspond à L, de manière que

$$\frac{ML}{M_1L_1} = \frac{DC}{D_1C_1}.$$

Enfin nous menons par $J_1$ une parallèle à $x_1$ et par $L_1$ une parallèle à $y_1$ ; ces deux droites se coupent en un point $K_1$ qui correspond à K.

Nous pouvons énoncer comme il suit cette règle de construction qu'Euler avait déjà donnée en se servant des termes de la géométrie analytique :

*Pour construire la forme alliée à une forme plane donnée, nous rapportons cette dernière à deux axes fixes de coordonnées. Ensuite nous augmentons ou nous diminuons les ordonnées de tous les points dans un rapport constant quelconque et nous en faisons autant pour les*

*abscisses en prenant arbitrairement le rapport analogue. Enfin, au moyen de ces nouvelles coordonnées, nous construisons tous les points de la forme alliée cherchée par rapport à deux axes fixes de coordonnées choisis à volonté.*

Si nous donnons le nom de *Figure* à une portion du système plan limitée dans tous les sens, nous pouvons énoncer pour les systèmes plans en affinité un théorème analogue à celui qui a été rappelé plus haut pour les ponctuelles projectives semblables; le voici :

*Dans les systèmes plans en affinité les figures qui se correspondent deux à deux sont dans un rapport constant; ou deux figures quelconques de l'un des systèmes sont entre elles dans le même rapport que les figures correspondantes de l'autre système.*

Nous allons démontrer d'abord ce théorème pour les parallélogrammes et les triangles. Soient donc (fig. 7) ABCD et EFGH deux parallélogrammes quelconques de l'un des systèmes $\Sigma$ et $A_1B_1C_1D_1$ et $E_1F_1G_1H_1$ les parallélogrammes qui leur correspondent respectivement dans le second système $\Sigma_1$. Les droites $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont respectivement coupées par $\overline{EH}$ en J et M et par $\overline{FG}$ en K et L; de sorte que JKLM est un nouveau parallélogramme de $\Sigma$ auquel correspond un parallélogramme analogue $J_1K_1L_1M_1$ dans $\Sigma_1$. Les parallélogrammes ABCD et JKLM sont entre eux comme leurs bases DC et ML, puisque leurs hauteurs sont égales et l'on a de même

$$\frac{A_1B_1C_1D_1}{J_1K_1L_1M_1} = \frac{D_1C_1}{M_1L_1}.$$

Mais comme les formes rectilignes MLDC et $M_1L_1D_1C_1$ sont projectives semblables, on doit aussi avoir la proportion

$$\frac{DC}{ML} = \frac{D_1C_1}{M_1L_1},$$

et nous en déduisons la proportion suivante :

$$\frac{ABCD}{JKLM} = \frac{A_1B_1C_1D_1}{J_1K_1L_1M_1}.$$

Comme on a de même :

$$\frac{JKLM}{EFGH} = \frac{KL}{FG} = \frac{K_1L_1}{F_1G_1} = \frac{J_1K_1L_1M_1}{E_1F_1G_1H_1},$$

il en résulte la proportion

$$\frac{JKLM}{EFGH} = \frac{J_1K_1L_1M_1}{E_1F_1G_1H_1}.$$

En joignant cette dernière relation à celle qu'on vient d'écrire, on trouve enfin la relation cherchée :

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{A_1B_1C_1D_1}{E_1F_1G_1H_1}.$$

Remplaçons chaque parallélogramme par sa moitié, c'est-à-dire par l'un des deux triangles en lesquels une diagonale le décompose, nous avons la proportion

$$\frac{ABC}{EFG} = \frac{A_1B_1C_1}{E_1F_1G_1}.$$

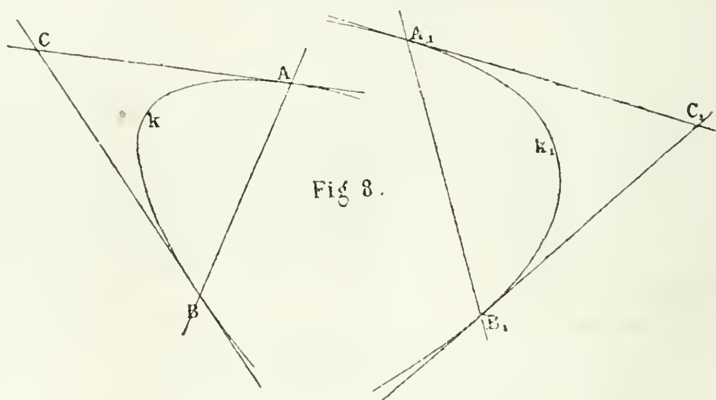
Comme les parallélogrammes ABCD et EFGH ont été pris d'une manière tout à fait arbitraire dans $\Sigma$, nous pouvons aussi regarder les triangles ABC et EFG comme absolument quelconques. Nous avons démontré de la sorte que deux triangles quelconques d'un système sont entre eux dans le même rapport que les triangles qui leur correspondent dans l'autre système.

Notre théorème s'applique aussi pour des figures quelconques limitées par des lignes droites, parce que l'on peut les décomposer en triangles par le moyen de leurs diagonales; il doit donc aussi subsister pour les figures à contour curviligne, puisqu'il est vrai pour les polygones qu'on peut inscrire ou circonscrire à ces figures et dont l'aire se rapproche indéfiniment de celle que renferme le contour curviligne.

L'*égalité* est un cas particulier de l'affinité. Ce cas se produit dans les systèmes alliés, quand deux figures homologues quelconque ont même aire. L'idée d'égalité est prise ici dans un sens plus restreint que dans la planimétrie dans le sens d'équivalence ; en effet, par exemple, deux quadrangles KLMN et $K_1L_1M_1N_1$ qui ont même surface ne sont des figures homologues dans deux systèmes en affinité que si les triangles KLM, KLN, KMN et LMN contenus dans le quadrangle KLMN ont respectivement même surface que les triangles $K_1L_1M_1$, $K_1L_1N_1$, $K_1M_1N_1$ et $L_1M_1N_1$. Il s'agit donc ici de l'égalité qui s'étend aux plus petites parties qui se correspondent dans les figures.

Deux courbes, qui se correspondent dans des systèmes alliés, ont le même nombre de points à l'infini et d'asymptotes, puisque tout point à l'infini a pour correspondant un point à l'infini, et toute tangente d'une courbe une tangente de l'autre courbe. Une ellipse ne peut donc uniquement avoir pour figures alliées que des ellipses, une parabole des paraboles, et une hyperbole des hyperboles. Réciproquement, il est facile de démontrer que deux courbes du second ordre, et de même espèce, peuvent toujours, et d'une infinité de manières, être rapportées l'une à l'autre par affinité. Ces relations nous conduiront à un grand nombre de propriétés intéressantes :

*Pour allier deux paraboles l'une à l'autre, nous pouvons prendre à volonté deux points* A *et* B *sur l'une et leur assigner pour correspondants deux points quelconques* $A_1$ *et* $B_1$ *sur l'autre. De cette manière, à tout point de l'une des paraboles ou de son plan correspond un point de l'autre parabole ou de son plan.*

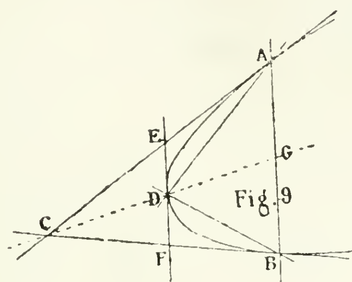



Soient (fig. 8) $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ les tangentes à la première parabole $k$ aux points A et B et soient de même $\overline{C_1A_1}$ et $\overline{C_1B_1}$ celles de la seconde parabole $k_1$ en $A_1$ et $B_1$. Nous devons et pouvons alors allier l'un à l'autre les systèmes plans auxquels appartiennent $k$ et $k_1$ de telle sorte qu'aux sommets du triangle ABC correspondent respectivement les sommets du triangle $A_1B_1C_1$. La parabole $k$ qui est tangente en A et B aux droites $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ et qui a pour tangente la droite à l'infini dans son plan a pour correspondante une courbe du second ordre qui, de même que $k_1$, est tangente aux droites $\overline{A_1C_1}$ et $\overline{C_1B_1}$ en $A_1$ et $B_1$ et qui a pour tangente la droite à l'infini ; cette courbe se confond donc avec $k_1$ (I, page 78).

Le segment de la parabole $k$ limité par la corde AB est avec le

triangle ABC dans le même rapport que le segment de $k_1$, limité par $A_1B_1$ avec le triangle $A_1B_1C_1$. Or, comme les points A et B de $k$ ont été pris d'une manière entièrement arbitraire et peuvent par conséquent être remplacés par deux autres points quelconques de la courbe, il en résulte qu'un segment quelconque de parabole est dans un rapport constant avec le triangle formé par la corde de ce segment et les deux tangentes aux extrémités de cette corde.

Soit maintenant G (fig. 9) le point milieu de AB de sorte que la droite CG soit bissectée par la parabole en D (I, page 114); soit de plus EF la tangente en D, qui est parallèle à AB et qui rencontre respective-




ment en E et F les tangentes AC et BC. Représentons par (AB), (DB) et (AD) les segments de parabole limités respectivement par les cordes AB, DB et AD; nous avons

$$\frac{(AB)}{ABC}=\frac{(DB)}{DBF}=\frac{(AD)}{ADE}=m,$$

$m$ désignant une quantité constante. D'autre part, la figure nous donne :

$$(AB) = ABD + (DB) + (AD).$$

Dans cette dernière équation remplaçons (AB), (DB) et (AD) par leurs valeurs déduites de la relation précédente, il vient :

$$m\,(ABC - DBF - ADE) = ABD.$$

Mais comme $CD = DG$, $CF = FB$ et $CE = EA$, on a :

$$ABD = \frac{1}{2}ABC, \text{ et } DBF + ADE = FCE = \frac{1}{4}ABC.$$

L'équation qui donne $m$ devient alors

$$m\,(ABC - \frac{1}{4}ABC) = \frac{1}{2}ABC \quad \text{ou } m = \frac{2}{3}.$$

Donc aussi $(AB) = \frac{2}{3}ABC$; et nous avons ce théorème:

*L'aire d'un segment de parabole est égale aux deux tiers de l'aire du triangle formé par la corde du segment et les tangentes à la courbe aux deux extrémités de cette corde.*

L'équation $(AB) = \frac{4}{3}ABD$ peut s'exprimer d'une manière analogue en langage ordinaire.

Soit (fig. 10) KLM un triangle inscrit dans une parabole et $K_1, L_1, M_1$

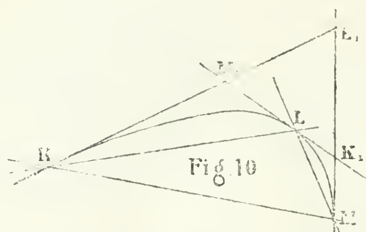


Fig. 10

les pôles respectifs des côtés $\overline{LM}$, $\overline{MK}$ et $\overline{KL}$ de ce triangle. MK étant le plus grand côté du triangle considéré, on a:

$$KLM = (MK) - (KL) - (LM),$$

ou bien:

$$KLM = \frac{2}{3}(KL_1M - KM_1L - LK_1M) = \frac{2}{3}(M_1L_1K_1 + KLM).$$

par conséquent :

$$KLM = 2\,M_1L_1K_1;$$

c'est-à-dire : *L'aire d'un triangle inscrit dans une parabole est double de celle du triangle circonscrit dont les côtés sont tangents à la parabole aux sommets du triangle inscrit.*

Deux paraboles peuvent aussi être considérées comme des courbes égales; car nous pouvons les allier l'une à l'autre d'une infinité de manières, de telle sorte que deux segments homologues, tels que (AB) et $(A_1B_1)$, (fig. 8), aient même surface.

Dans deux ellipses ou deux hyperboles alliées, les diamètres se correspondent entre eux, et de plus tout couple de diamètres conjugués de l'une des courbes a pour correspondant un couple de diamètres conjugués dans l'autre. Cette propriété résulte de ce que tout système de cordes parallèles d'une courbe a pour correspondant un système de cordes parallèles de l'autre courbe et, à cause de la proportionnalité des segments homologues, le milieu d'une corde correspond nécessairement au milieu de la corde homologue. En outre, dans les hyperboles alliées, les asymptotes se correspondent entre elles.

*Pour allier deux hyperboles l'une à l'autre, nous pouvons faire correspondre chaque asymptote de l'une à une asymptote de l'autre et assigner un point ou une tangente de l'une comme élément correspondant à un point ou à une tangente de l'autre hyperbole.*

En effet, les hyperboles peuvent être rapportées projectivement l'une à l'autre (I, page 151) de telle sorte qu'aux deux points à l'infini et à un troisième point quelconque de l'une correspondent respectivement les deux points à l'infini et un troisième point quelconque de l'autre. Les deux systèmes plans, dans lesquels les hyperboles sont situées, sont ainsi rapportés collinéairement l'un à l'autre (II, page 11), et ils sont en affinité, parce que les droites qui joignent les points à l'infini sur les hyperboles, c'est-à-dire les droites à l'infini des systèmes, se correspondent entre elles.

*Pour allier entre elles deux ellipses* k *et* $k_1$, *nous pouvons assigner comme correspondants les uns aux autres les points* A, B *et* $A_1$, $B_1$, *qui limitent deux demi-diamètres conjugués.*

Soient ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 11) les deux parallélogrammes respectivement inscrits aux ellipses $k$ et $k_1$ et qui ont pour diagonales les deux couples de diamètres conjugués $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ et $\overline{A_1C_1}$, $\overline{B_1D_1}$ ; soient de plus M et $M_1$ les centres respectifs de $k$ et de $k_1$. Nous pouvons maintenant allier les systèmes plans auxquels appartiennent $k$ et $k_1$ de telle sorte qu'aux points A,B,C de l'un correspondent respectivement les points $A_1$,$B_1$,$C_1$ de l'autre. Au point milieu M de AC correspond nécessairement le point milieu $M_1$ de $A_1C_1$ et l'ellipse $k$, qui est tangente en A et C à deux parallèles au diamètre $\overline{MB}$ et qui passe par B, a pour correspondante l'ellipse $k_1$, c'est-à-dire la courbe du second ordre qui est tangente en $A_1$ et $B_1$ à deux parallèles à la droite $\overline{M_1B_1}$ et qui passe par $B_1$.

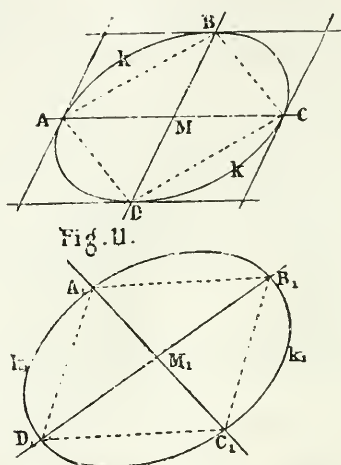
Au lieu des diamètres conjugués $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ de l'ellipse $k$ on peut prendre deux autres diamètres conjugués quelconques de cette courbe ;

les deux ellipses $k$ et $k_1$ peuvent donc être alliées l'une à l'autre d'une infinité de manières. Pour chaque position de $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$, le parallélogramme ABCD doit être dans le même rapport avec la surface de l'ellipse $k$ que le parallélogramme $A_1B_1C_1D_1$, qui est resté invariable, avec la surface de l'ellipse $k_1$. Donc :

*Tous les parallélogrammes, inscrits dans une ellipse et dont les diagonales sont deux diamètres conjugués, ont même surface.*

Le parallélogramme circonscrit (fig. 11) dont les côtés sont tangents à l'ellipse aux points A, B, C, D a une surface double de ABCD ; donc :

*Tous les parallélogrammes, circonscrits à une ellipse et dont les*




*côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués, ont même surface.*

Soient $2a$ et $2b$ les longueurs des deux axes d'une ellipse ; $4ab$ est l'aire d'un de ces parallélogrammes circonscrits, car $4\,a\,b$ est l'aire du rectangle formé par les tangentes aux sommets de l'ellipse.

Supposons l'ellipse alliée à un cercle de rayon $r$. Le rapport de la surface J de l'ellipse à $4\,a\,b$ est égal au rapport de la surface $\pi\,r^2$ du cercle à la surface $4\,r^2$ du carré circonscrit au cercle (II, page 54). Donc :

$$\frac{J}{4\,a\,b} = \frac{r^2\,\pi}{4\,r^2}, \text{ ou bien } J = \pi\,a\,b.$$

*La surface de l'ellipse est égale au produit de ses deux demi-axes par le nombre $\pi$.*

Le cercle étant divisé en quatre parties égales par deux diamètres conjugués, il en est de même de l'ellipse.

Deux systèmes plans collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont dits *semblables*, quand les angles homologues qu'ils contiennent sont égaux deux à deux. Comme deux parallèles dans $\Sigma_1$ correspondent toujours à deux parallèles dans $\Sigma$ et comme tout point à l'infini de $\Sigma$ a aussi pour correspondant un doint à l'infini de $\Sigma_1$, les systèmes semblables sont aussi en affinité. Les côtés de triangles homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont proportionnels, puisque les triangles ont leurs angles égaux, et par conséquent, d'une manière générale, le rapport des segments homologues dans les deux systèmes est constant. Deux systèmes semblables sont perspectifs quand deux droites quelconques de l'un d'eux, qui se coupent obliquement, sont parallèles aux droites qui leur correspondent dans l'autre système ; en effet, les droites homologues sont alors deux à deux parallèles entre elles et les systèmes plans ont pour élément correspondant commun leur ponctuelle à l'infini (voir II, pages 19 et 20). Deux systèmes semblables perspectifs sont dits *semblables et semblablement placés ;* ils sont des sections parallèles d'une même gerbe, ou bien sont situés l'un sur l'autre et ont de plus un faisceau de rayons correspondant commun. Dans les deux cas, le point par lequel passent toutes les droites qui joignent les points homologues des systèmes est appelé leur *centre de similitude.*

Si deux courbes semblables du second ordre sont amenées en position perspective de manière que deux cordes ou deux tangentes qui se coupent dans l'une d'elles soient parallèles aux cordes ou aux tangentes homologues dans l'autre, toute corde ou toute tangente de l'une des courbes est parallèle à la corde ou à la tangente homologue de l'autre courbe. Les courbes sont situées dans un plan, en sorte que les droites qui joignent leurs points homologues se coupent en un seul et même point, ou bien ce sont des sections parallèles d'un même cône. Deux paraboles peuvent toujours être regardées comme deux courbes semblables du second ordre ; si l'on place leurs plans et leurs axes de manière qu'ils soient parallèles, les tangentes homologues de ces courbes sont aussi parallèles deux à deux. Deux ellipses ou deux hyperboles ne peuvent être considérées comme des courbes semblables que si on peut les placer dans un même plan de telle sorte que non seulement leurs axes principaux, mais encore deux couples quelconques de diamètres conjugués se superposent ; en effet, deux diamètres conjugués quelcon-

ques de l'une des courbes doivent se couper sous le même angle que les diamètres conjugués qui leur correspondent dans l'autre courbe. Dans cette situation des deux courbes, leur centre est en même temps un centre de similitude. Des sections parallèles d'une surface du second ordre sont, comme on le voit aisément, des courbes semblables ; il n'y a d'exception que quand ce sont des hyperboles situées dans les angles différents que forment les asymptotes.

L'affinité est un cas particulier de la collinéation et la similitude un cas particulier de l'affinité ; la *congruence* est de même un cas particulier de la similitude. On dit que deux systèmes plans semblables sont congruents quand leurs segments homologues sont égaux. C'est ainsi que la collinéation nous conduit à ces relations géométriques des figures, qui ont fait l'objet principal de la planimétrie des anciens.

---

# HUITIEME LECON.

## Affinité, similitude, congruence et symétrie des systèmes de l'espace et des surfaces du second ordre.

Nous dirons que deux systèmes de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont *alliés*, ou *en affinité*, quand leurs plans à l'infini se correspondent l'un à l'autre. Comme, d'après cela, toute droite à l'infini dans $\Sigma$ a pour correspondante une droite à l'infini dans $\Sigma_1$, deux systèmes plans homologues dans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont aussi en affinité; et de même, deux ponctuelles homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont projectives semblables. A tout parallélogramme de $\Sigma$ doit correspondre un parallélogramme de $\Sigma_1$ et à tout parallélipipède un parallélipipède.

*Pour allier l'un à l'autre deux systèmes de l'espace, nous n'avons qu'à choisir à volonté un tétraèdre propre dans chacun d'eux et à faire correspondre arbitrairement les sommets de ces tétraèdres.*

En effet, comme les quatre faces de l'un des tétraèdres correspondent ainsi aux faces de l'autre et qu'en outre les plans à l'infini de chaque système se correspondent entre eux, un élément quelconque de l'un des systèmes détermine sans ambiguïté celui qui lui correspond dans l'autre (II, page 26). La construction des figures alliées dans l'espace peut s'opérer, à l'aide de coordonnées parallèles, d'une manière entièrement analogue à celle qu'on a indiquée précédemment pour le plan (II, pages 53-54). Nous laissons au lecteur le soin de trouver la démonstration facile de cette proposition.

Si nous donnons le nom de *corps* ou *solide* à une portion d'un

système de l'espace, qui est limitée dans tous les sens, nous pouvons énoncer la proposition que voici :

*Dans les systèmes alliés de l'espace, deux corps ou solides correspondants quelconques sont entre eux dans un rapport constant; ou deux corps ou solides quelconques de l'un des systèmes sont entre eux dans le même rapport que les solides qui lui correspondent dans l'autre système.*

Nous allons d'abord démontrer ce théorème pour les parallélipipèdes et les tétraèdres, en supposant connus quelques théorèmes de stéréotomie. Soient P et Q deux parallélipipèdes quelconques de l'un $\Sigma$ des systèmes et soient $P_1$ et $Q_1$ ceux qui leur correspondent dans $\Sigma_1$. Nous construisons dans $\Sigma$ un troisième parallélipipède R compris entre deux des faces parallèles opposées de P et deux des faces parallèles opposées de Q, et nous déterminons le parallélipipède correspondant $R_1$ dans $\Sigma_1$. P et R étant compris entre des plans parallèles ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases; il en est de même de $P_1$ et $R_1$. Mais les bases de P et R sont entre elles dans le même rapport que celles de $P_1$ et $R_1$, parce que les systèmes plans qui contiennent ces bases sont en affinité. Donc

$$\frac{P}{R}=\frac{P_1}{R_1}.$$

Les mêmes raisonnements s'appliquent à R, Q et $R_1$, $Q_1$ et l'on a :

$$\frac{R}{Q}=\frac{R_1}{Q_1}.$$

Ces deux proportions nous donnent alors :

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}.$$

et par suite le théorème est démontré pour les parallélipipèdes.

Par tout sommet A d'un parallélipipède (fig. 12) passent trois arêtes qui joignent trois autres sommets B,C et D avec A. Le plan diagonal BCD sépare du parallélipipède un tétraèdre ABCD qui a même hauteur que ce parallélipipède, dont la base est la moitié de celle de ce solide et dont le volume est le sixième de celui du parallélipipède. Dans chacun

des solides P et Q détachons un tétraèdre de ce genre; nous pourrons les regarder comme deux tétraèdres entièrement arbitraires du système $\Sigma$, puisque P et Q ont été pris d'une manière tout à fait quelconque. Les tétraèdres correspondants dans $\Sigma_1$ sont des parties analogues de $P_1$ et $Q_1$ et comme

$$\frac{P}{6}:\frac{Q}{6}=\frac{P_1}{6}:\frac{Q_1}{6},$$

nous avons démontré de la sorte que deux tétraèdres quelconques du système $\Sigma$ sont entre eux dans le même rapport que les deux tétraèdres correspondants de $\Sigma_1$.

Le théorème s'étend aux corps limités d'une manière quelconque par des plans, parce qu'on peut toujours les décomposer en tétraèdres.

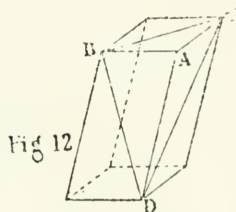


Fig 12

Il a également lieu pour les corps à surface courbe, parce qu'il est vrai pour tous les polyèdres qu'on peut inscrire ou circonscrire à ces corps et dont le volume peut s'approcher d'aussi près qu'on le veut du volume des corps considérés.

Si le rapport de deux corps homologues est égal à l'unité, on dit que les systèmes alliés de l'espace sont *égaux*. Les systèmes plans qui se correspondent dans des systèmes égaux de l'espace ne sont pas égaux en général, mais seulement alliés.

Deux surfaces alliées n'ont aucun point commun avec le plan à l'infini, ou lui sont tangentes chacune en un point ou sont coupées par lui suivant une ligne située à l'infini; car à tout point à l'infini de l'une des surfaces doit correspondre un point à l'infini sur l'autre. D'après cela, comme une surface réglée ne peut être collinéaire qu'à une surface réglée (II, page 29), on voit que deux surfaces du second ordre de même espèce peuvent être alliées l'une à l'autre; par exemple, deux ellipsoïdes, deux hyperboloïdes à une nappe, deux paraboloïdes elliptiques, deux cônes propres, etc. Comme tout système de cordes

parallèles dans l'une des surfaces a pour correspondant un système de cordes parallèles dans l'autre et que tout point milieu d'une corde correspond au point milieu de la corde homologue, il en résulte que :

*Dans deux surfaces alliées du second ordre, un plan diamétral correspond à un plan diamétral et deux diamètres conjugués à deux diamètres conjugués.*

Supposons qu'on veuille allier deux paraboloïdes elliptiques ou hyperboliques $\Pi$ et $\Pi_1$ ; nous prendrons sur chacun d'eux une courbe du second ordre qui ne contienne pas le point de contact à l'infini du paraboloïde et qui par conséquent ne soit pas une parabole, et nous allierons ces deux courbes l'une à l'autre; de cette manière, tout point de $\Pi$ sera rapporté à un point de $\Pi_1$. En effet, soient A, B, C trois points de l'une des courbes $k$, et D le pôle de leur plan par rapport à la surface $\Pi$ sur laquelle est située $k$; soient de plus $A_1, B_1, C_1$ les points correspondants de l'autre courbe $k_1$ et $D_1$ le pôle de leur plan par rapport à $\Pi_1$, nous pouvons et devons allier l'un à l'autre les deux systèmes de l'espace dans lesquels sont compris les paraboloïdes de manière que les sommets du tétraèdre ABCD correspondent respectivement aux sommets du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$. Comme les deux systèmes plans ABC et $A_1B_1C_1$ sont en affinité, la courbe $k$ correspond à la courbe $k_1$ de la manière qu'on a supposée et les cônes circonscrits aux surfaces $\Pi$ et $\Pi_1$ qui projettent $k$ et $k_1$ respectivement de D et $D_1$ se correspondent l'un à l'autre. Les deux diamètres $d$ et $d_1$ des surfaces $\Pi$ et $\Pi_2$ qui joignent respectivement les points D et $D_1$ aux centres de $k$ et $k_1$ se correspondent entre eux. Enfin toute parabole située sur $\Pi$, qui coupe $k$ en deux points K et L et dont le plan passe par $d$, a pour correspondante dans le second système une parabole qui est coupée par $k_1$ aux deux points homologues $K_1$ et $L_1$ et dont le plan passe par $d_1$; cette seconde parabole est située sur la surface $\Pi_1$ parce qu'elle a en commun avec une section de cette surface sa tangente à l'infini, les deux points $K_1$ et $L_1$ et enfin les tangentes $\overline{D_1K_1}$ et $\overline{D_1L_1}$. Or, comme un point quelconque de $\Pi$ est situé sur une quelconque de ces courbes, il a pour correspondant un point de $\Pi_1$ ; c'est-à-dire que les surfaces $\Pi$ et $\Pi_1$ se correspondent entre elles.

Supposons que $\Pi$ (et par suite aussi $\Pi_1$) soit un paraboloïde elliptique, le plan de l'ellipse $k$ en détachera un certain segment ; ce solide est au cône, qui a pour base $k$ et pour sommet D, dans le même rapport que le solide correspondant de $\Pi_1$ est au cône correspondant $D_1$. Or, comme

nous avons choisi l'ellipse $k$ arbitrairement sur la surface II, nous en concluons ce théorème :

*Tout segment d'un paraboloïde est dans un rapport constant avec le cône qui a même base que ce segment et dont le sommet est le pôle de cette base.*

On voit aisément par le calcul, dans le cas d'un paraboloïde de révolution, que ce rapport est égal à $\frac{3}{4}$.

Pour allier deux ellipsoïdes, nous n'avons qu'à allier entre elles deux courbes $k$ et $k_1$ du second ordre suivant lesquelles ils sont coupés chacun par un plan diamétral et à faire correspondre l'un à l'autre deux points D et $D_1$ des surfaces dont les plans tangents sont respectivement parallèles aux plans diamétraux de section.

En effet, les deux systèmes de l'espace, dont font partie les ellipsoïdes, peuvent être alliés l'un à l'autre de telle sorte que les ellipses $k$ et $k_1$ se correspondent de la manière qu'on vient d'indiquer et que D et $D_1$ se correspondent aussi entre eux. Les centres M et $M_1$ des ellipses, qui sont aussi les centres des ellipsoïdes, sont également des points correspondants. Toute ellipse de l'un des ellipsoïdes qui a deux points communs K et L avec $k$ et dont le plan renferme le diamètre $\overline{MD}$ a pour correspondante dans le second système de l'espace une ellipse qui a en commun avec $k_1$ les points homologues $K_1$ et $L_1$ et dont le plan passe par $\overline{M_1D_1}$. Cette seconde ellipse est située sur le second ellipsoïde, parce qu'elle a en commun avec l'une de ses sections les points $D_1$, $K_1$, $L_1$ et les deux tangentes en $K_1$ et $L_1$ qui sont parallèles à $\overline{M_1D_1}$.

Nous pouvons allier les ellipses $k$ et $k_1$ en rapportant les unes aux autres les extrémités de deux couples de diamètres conjugués. Les demi-diamètres MD et $M_1D_1$ sont conjugués aux plans de $k$ et $k_1$ par rapport à chacun des ellipsoïdes. Donc :

*Pour allier entre eux deux ellipsoïdes, nous n'avons qu'à faire correspondre les unes aux autres les extrémités de deux ternes de demi-diamètres conjugués.*

On déduit facilement de là ce théorème :

*Tous les parallélipipèdes dont les faces sont tangentes à un ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques ont le même volume.*

Ils sont avec le volume de l'ellipsoïde dans le même rapport que le volume d'un cube avec la sphère qui lui est inscrite, c'est-à-dire

comme $8 : \frac{4\pi}{3}$. Pour le démontrer, allions l'ellipsoïde à la sphère. Soit J le volume de l'ellipsoïde et $2a$, $2b$, $2c$ les segments interceptés par la surface sur ses trois axes; le volume du parallélipipède circonscrit, dont les faces sont parallèles aux trois plans de symétrie de l'ellipsoïde est $8abc$; on a par conséquent :

$$J = \frac{4}{3} abc\pi.$$

La sphère étant partagée en huit parties équivalentes par trois plans diamétraux conjugués, il en est de même de l'ellipsoïde (II, page 63).

Pour allier l'un à l'autre deux hyperboloïdes à une ou deux nappes, nous n'avons qu'à allier les courbes $k$ et $k_1$ du second ordre suivant lesquelles leurs cônes asymptotiques sont coupés par deux plans tangents quelconques et de plus à faire correspondre l'un à l'autre les centres des deux surfaces. Nous ne donnons pas la démonstration de cette proposition qui est entièrement analogue à la précédente; nous ferons seulement remarquer que les points de contact des deux plans avec les hyperboloïdes respectifs sont en même temps les centres des courbes $k$ et $k_1$ (I, page 114) et conséquemment doivent se correspondre. Deux plans tangents d'un hyperboloïde à deux nappes déterminent dans le cône asymptotique deux solides de même volume.

Deux systèmes collinéaires de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont dits *semblables* quand leurs angles homologues sont égaux deux à deux. Par conséquent (II, page 61) deux systèmes plans correspondants de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont aussi semblables et comme, d'après cela, toute droite à l'infini dans $\Sigma$ a pour correspondante une droite à l'infini dans $\Sigma_1$, les systèmes sont en affinité. Les segments homologues de systèmes semblables sont deux à deux dans un rapport constant l'un avec l'autre; ceci résulte du reste du théorème déjà démontré pour les systèmes plans semblables. Si deux systèmes semblables de l'espace sont placés de telle manière que trois droites quelconques de l'un, qui ne sont ni parallèles à un même plan, ni perpendiculaires entre elles, soient parallèles aux trois droites homologues de l'autre système, les deux systèmes ont leur système plan à l'infini commun et sont perspectifs (II, page 51). Les points homologues sont par conséquent deux à deux sur une même droite avec un entre fixe de collinéation, qui est le *centre de similitude*.

Si deux systèmes de l'espace semblables ont leurs segments homologues égaux, nous dirons qu'ils sont *congruents* ou *symétriques*. En effet, si nous amenons les deux systèmes dans une position telle qu'ils aient une gerbe correspondante commune, deux points homologues coïncident, ou bien le segment qu'ils limitent est bissecté par le centre de la gerbe. Dans le premier cas les systèmes sont congruents, dans le second ils sont symétriques. Par exemple, la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre concentriques est symétrique par rapport au centre des surfaces et peut se composer de deux lignes symétriques qui ne se réunissent pas.

---

# NEUVIÈME LEÇON.

**Systèmes réciproques situés l'un dans l'autre. — Systèmes polaires dans le plan et dans l'espace.**

Lorsque deux systèmes plans réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont placés l'un sur l'autre, un point quelconque de leur plan peut être considéré comme appartenant aussi bien à $\Sigma$ qu'à $\Sigma_1$. De même, à toute droite du plan correspondent deux points, puisque nous pouvons attribuer la droite à chacun des deux systèmes réciproques. Il sera convenable, pour cette raison, de désigner chacun des éléments du plan par deux lettres, par exemple, un seul et même point quelconque par $AB_1$. Au point A de $\Sigma$ correspond un rayon $a_1$ dans le système $\Sigma_1$; et si nous regardons le même point comme faisant partie de $\Sigma_1$ et si nous le désignons par $B_1$, il aura pour correspondant dans $\Sigma$ un rayon $b$. Étant données deux ponctuelles projectives situées l'une sur l'autre, nous avons cherché précédemment s'il existe des points de l'une qui coïncident avec leurs correspondants dans l'autre, quel en est le nombre et dans quelles circonstances les ponctuelles sont en involution. Nous allons résoudre ici les questions analogues. Combien y a-t-il de points situés sur les droites qui leur correspondent? Quand les deux droites qui correspondent à chaque point du plan coïncident-elles?

*Lorsqu'un point $AB_1$ est situé sur l'un des deux rayons* $a_1$ *qui lui correspondent, il se trouve aussi sur l'autre* b. En effet, au point $B_1$ de la ponctuelle $a_1$ correspond dans $\Sigma$ un rayon du faisceau A, d'après la définition de la réciprocité. De même, *une droite* $pq_1$ *ne passe par aucun des points $P_1$ et $Q$ qui lui correspondent, ou bien elle passe par ces deux points.*

Projetons les systèmes réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ par des gerbes issues de deux points quelconques S et $S_1$, ces gerbes sont aussi réciproques et engendrent une surface du second ordre. Tout point du plan qui est situé sur la droite qui lui correspond appartient à cette surface du second ordre, parce qu'il est le point de rencontre d'un rayon de la gerbe S avec le plan correspondant de la gerbe $S_1$. Réciproquement, tout point commun à la surface du second ordre et au plan est situé sur les deux droites qui lui correspondent dans les systèmes réciproques $\Sigma_1$ et $\Sigma$. Suivant que la surface du second ordre aura en commun avec le plan une courbe du second ordre, ou deux droites, ou une seule droite, ou un seul point, ou enfin qu'elle n'aura aucun point réel commun avec lui, on se trouvera en présence de l'un des cas suivants :

*Quand deux systèmes réciproques sont situés dans le même plan, tous les points (réels) du plan situés sur les droites qui leur correspondent forment une courbe du second ordre, ou un système de deux droites, ou une seule droite, ou un seul point, ou bien enfin il n'y a pas de point satisfaisant à cette condition. En même temps, les rayons (réels) du plan, qui passent par les points qui leur correspondent, forment un faisceau de rayons du second ordre, ou un système de deux faisceaux de rayons du premier ordre, ou un seul faisceau de rayons du premier ordre, ou bien il n'existe qu'un seul rayon qui satisfasse à cette condition, ou enfin il n'y en a aucun.*

Les formes de rayons, dont il est question dans la seconde partie du théorème, correspondent aux formes de points de la première partie et leur sont doublement perspectives.

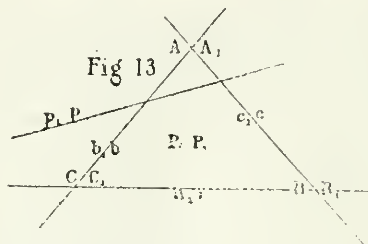
En général, la surface du second ordre n'a pas de point commun avec le plan, ou elle le coupe suivant une courbe du second ordre; en effet, quand le plan contient deux droites, une droite ou un point de la surface, il lui est tangent et se trouve par suite dans une situation tout à fait particulière par rapport à elle. De tous les cas énoncés dans le théorème, il ne se produit en général que le premier ou le dernier et l'on ne rencontre qu'exceptionnellement l'un des autres. Par exemple, nous verrons que pour les systèmes réciproques en involution, ces cas particuliers ne peuvent jamais se présenter.

Les systèmes plans réciproques sont en situation involutive, quand à tout point du plan correspondent deux droites qui coïncident, quand par suite à tout point correspond doublement une droite. Le théorème suivant montre que cette situation involutive est possible.

*Deux systèmes plans réciproques* $\Sigma$ *et* $\Sigma_1$ *sont en involution, quand les sommets A,B,C d'un triangle de* $\Sigma$ *ont pour correspondants les côtés opposés* $a_1, b_1, c_1$ *de ce même triangle dans* $\Sigma_1$ (fig. 13).

Il est d'abord facile de voir que les sommets du triangle correspondent doublement aux côtés qui leur sont opposés. Par exemple, désignons par $A_1$ le point de $\Sigma_1$ qui est l'intersection de $b_1$ et $c_1$ et qui coïncide avec le point A ; il a pour correspondant dans $\Sigma$ le côté $a_1$ qui joint les sommets B et C et qui coïncide avec la droite $a_1$ de $\Sigma$

Au faisceau $AA_1$ correspond donc aussi doublement la ponctuelle $aa_1$ ; et comme le point $BB_1$ correspond doublement au rayon $bb_1$ de ce faisceau de même que le point $CC_1$ au rayon $cc_1$, le faisceau $AA_1$ est en involution avec la ponctuelle $aa_1$ (I, page 152). A tout rayon du faisceau $AA_1$ doit donc correspondre doublement un point de la ponctuelle $aa_1$ et l'on voit de même qu'à tout rayon des faisceaux $BB_1$



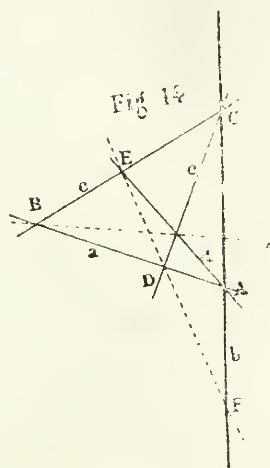

et $CC_1$ correspond doublement un point de $bb_1$ et $cc_1$. Soit donné maintenant un rayon quelconque $p_1$ ou $p$ du plan ; il coupe les côtés du triangle en trois points auxquels correspondent doublement trois rayons des faisceaux $AA_1$ $BB_1$ et $CC_1$. Au rayon $pp_1$ doit donc correspondre doublement le point $PP_1$ suivant lequel ces trois rayons se coupent ; autrement dit, les systèmes réciproques sont en involution.

Nous pouvons aussi regarder les deux systèmes en involution comme un système unique dans lequel tout point a pour élément *conjugué* une droite et toute ponctuelle un faisceau de rayons en involution avec elle ; nous donnerons à ce système le nom de *système polaire plan*. Tout point situé sur la droite qui lui est conjuguée sera appelé *un point double* du système et la droite reçoit le nom de *rayon double*. On peut alors démontrer que :

*Un système polaire plan n'a aucun point double ou rayon double, ou bien il en a une infinité. Dans ce dernier cas, les points doubles*

*constituent une courbe du second ordre qui est tangente aux rayon doubles et qu'on appelle la courbe double ou la directrice du système polaire.*

Soit A (fig. 14) un point du système polaire, qui est situé sur la droite $a$ qui lui est conjuguée; tout point B de la droite $a$ différent de A doit être situé en dehors de sa droite conjuguée $b$, parce que $b$ passe par A et ne peut pas coïncider avec $a$. De plus, comme la ponctuelle $b$ est en involution avec le faisceau de rayons B et par suite avec une section de ce faisceau, elle contient, en outre de A, un second point double C (I, page 149). Le système polaire renferme donc une infinité




de points doubles du moment qu'il en existe un. Si tous ces points doubles étaient situés sur une droite, un rayon quelconque passant par A ne pourrait plus contenir de second élément double, et si ils étaient placés sur deux droites, un point quelconque A de l'une des droites aurait pour conjugué un rayon $a$ qui couperait encore la seconde droite en un point double, ce qui est impossible puisque tout rayon double $a$ ne doit contenir qu'un seul point double A.

Les points doubles du système constituent donc (II, page 71) une courbe du second ordre et cette dernière sera tangente aux rayons doubles, parce que chacun d'eux n'a qu'un seul point double commun avec la courbe.

Nous retrouvons ainsi à nouveau toutes les propriétés de la polarité dans les courbes du second ordre; en même temps, nous voyons qu'il

peut exister des systèmes polaires qui n'aient pas de courbe double réelle. Nous appliquerons encore à ces systèmes polaires les dénominations que nous avons introduites précédemment dans nos recherches relatives à la polarité des courbes du second ordre.

Nous dirons ainsi que, dans le système polaire, tout point est le pôle de la droite qui lui est conjuguée et réciproquement que toute droite est la polaire du point qui lui est conjugué. Nous dirons de plus que deux points sont conjugués, quand chacun d'eux est situé sur la polaire de l'autre et que deux rayons sont conjugués quand chacun d'eux passe par le pôle de l'autre. Enfin tout triangle du système polaire dont les sommets sont les pôles des côtés opposés et dans lequel par conséquent les sommets et les côtés sont conjugués deux à deux sera appelé un *triangle polaire* du système.

*Un système polaire plan renferme une infinité de triangles polaires.*

On construit un triangle polaire en prenant sur une droite $a$ (fig. 15), qui ne passe pas par son pôle A, un point B qui ne soit pas situé sur sa polaire $b$, et en déterminant le point C où se coupent les droites $a$ et $b$. C étant le pôle de AB, le triangle ABC est un triangle polaire.

*Deux triangles polaires quelconques ABC et DEF d'un même système polaire plan sont inscrits à une même courbe du second ordre et circonscrits à une autre courbe du même ordre.*

La démonstration donnée antérieurement (I, page 151) s'applique également au cas où le système polaire n'a pas de courbe double.

*Si, dans un plan, on prend un triangle quelconque ABC comme triangle polaire, et si de plus on assigne une droite quelconque* p *qui ne passe par aucun des sommets du triangle* (fig. 15) *comme correspondante à un point arbitraire P qui n'est situé sur aucun des côtés de ce même triangle, ces éléments déterminent un système polaire plan.*

En effet, nous pouvons et devons rapporter réciproquement l'un à l'autre les deux systèmes qui composeront le système polaire, de telle sorte qu'aux quatre points A, B, C, P de l'un correspondent respectivement les droites $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, $p$ de l'autre. Ces deux systèmes sont alors en position involutive (II, page 72) comme on le demandait.

*Quand le système polaire a une courbe double, tout triangle polaire ABC a l'un de ses sommets à l'intérieur et les deux autres à l'extérieur de cette courbe.*

En effet, si le sommet A est intérieur à la courbe double, tous les

points de sa polaire BC sont extérieurs à cette courbe; si A est extérieur, sa polaire $\overline{BC}$ coupera la courbe et les points de cette polaire qui sont conjugués deux à deux, comme B et C par exemple, seront harmoniquement séparés par la courbe, en sorte que l'un est intérieur et l'autre extérieur à la courbe.

Pour décider si un système polaire donné a ou n'a pas de courbe double, il nous suffit de rechercher si deux des côtés d'un triangle polaire quelconque contiennent ou ne contiennent pas de points doubles, ou, ce qui revient au même, si les ponctuelles situées sur ces côtés sont involutives opposées ou concordantes avec les faisceaux de rayons qui leur sont conjugués (I, pages 148-149). Le problème est donc du second degré et se résout aisément au moyen de la construction qui nous a permis de trouver les points doubles d'une ponctuelle involutive.

*Un pentagone plan simple ABCDE détermine un système polaire dans lequel chaque côté du pentagone est la polaire du sommet qui lui est opposé.*

En effet, soit F le point d'intersection de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$; nous pouvons regarder ADF comme un triangle polaire d'un système polaire dans lequel E est le pôle de $\overline{BC}$; dans ce système polaire qui est complètement déterminé, A,B,C et D sont les pôles des côtés $\overline{CD}$,$\overline{DE}$,$\overline{EA}$ et $\overline{AB}$ du pentagone qui leur sont opposés.

Si nous projetons un système polaire plan $\Sigma$ d'un point quelconque S non situé sur $\Sigma$, nous obtenons *une gerbe polaire*. Tout rayon de la gerbe S a pour conjugué un plan de la gerbe et réciproquement. Si le système polaire plan a une courbe double, elle sera projetée suivant une surface conique du second ordre qu'on appellera la *surface double* ou la *directrice* de la gerbe polaire. Deux rayons ou deux plans de la gerbe sont conjugués, quand ils sont conjugués par rapport à la surface double et réciproquement.

Parmi les gerbes polaires, nous signalerons la gerbe *rectangulaire;* dans cette espèce de gerbe, tout rayon est normal à son plan conjugué et les rayons et plans conjugués sont perpendiculaires entre eux. Comme deux triarètes polaires d'une gerbe polaire sont inscrits à un cône du second ordre et circonscrits à un autre cône du même ordre, on a le théorème suivant pour les gerbes rectangulaires :

*Deux trièdres trirectangles concentriques sont inscrits à une sur-*

*face conique du second ordre et circonscrits à une surface de même espèce.*

On peut déduire de là ce théorème qu'étant donnée une surface conique, on peut lui inscrire et lui circonscrire une infinité de trièdres trirectangles, ou bien l'on ne peut lui en inscrire ou circonscrire aucun.

Nous allons maintenant procéder pour les systèmes réciproques de l'espace à des recherches analogues à celles auxquelles nous venons de nous livrer pour les systèmes réciproques plans. Les résultats acquis jusqu'ici vont nous être de la plus grande utilité. Nous exclurons, quant à présent, de notre étude le cas particulier où chaque plan de l'un des systèmes passe par le point qui lui correspond dans l'autre; ce cas intéressant fera l'objet de la prochaine leçon.

Soit $\alpha$ un plan quelconque de l'un des systèmes de l'espace $\Sigma$ qui ne passe pas par le point correspondant $A_1$ de l'autre système $\Sigma_1$. Au système plan $\alpha$ de $\Sigma$ correspond une gerbe réciproque $A_1$ dans $\Sigma_1$. Nous pouvons couper cette gerbe par le plan $\alpha$ suivant un second système $\alpha_1$ qui est réciproque au premier système contenu dans $\alpha$. Tout point de $\alpha$, qui est situé sur la droite de $\alpha_1$ qui lui correspond, est aussi contenu dans le plan correspondant de la gerbe $A_1$, et de plus nous savons déjà que tous ces points, quand il en existe dans $\alpha$, forment une courbe du second ordre, qui peut aussi se décomposer en deux droites, se réduire à une seule droite ou bien à un seul point.

Soit, de plus, $\beta$ un plan de $\Sigma$ passant par le point $B_1$ qui lui correspond dans $\Sigma_1$; considérons-le comme appartenant à $\Sigma_1$ et désignons-le en conséquent par $\gamma_1$, il aura pour correspondant dans $\Sigma$ un point C qui doit se trouver sur $\beta$, puisque $\gamma_1$ passe par $B_1$. Au faisceau C de $\Sigma$ qui est situé dans le plan $\beta$ correspond dans $\Sigma_1$ un faisceau de rayons qui lui est projectif, qui se trouve dans le plan $\gamma_1$ identique avec $\beta$ et dont le centre est $B_1$. Ces faisceaux engendrent une courbe du second ordre qui peut se décomposer en deux droites et dont chacun des points est situé sur le plan qui lui correspond dans le système réciproque de l'espace. En effet, soit P le point où un rayon quelconque $p$ du faisceau C est coupé par le rayon correspondant $p_1$ du plan $\gamma_1$; à ce point P du rayon $p$ correspond dans le système $\Sigma_1$ un plan $\pi_1$ qui passe par le rayon $p_1$ et par suite aussi par le point P lui-même. De là résulte que :

*Le lieu de tous les points de l'espace, qui sont situés dans les plans correspondants du système réciproque, est une surface du second*

*ordre; et tous les plans, qui passent par les points qui leur correspondent, forment une gerbe de plans du second ordre.*

En effet, nous avons démontré que le lieu de ces points a en commun avec un plan quelconque $\alpha$ ou $\beta$ (supposé contenir de ces points) une courbe du second ordre, deux droites, une droite ou bien enfin un seul point; or, cette propriété ne convient qu'à la surface du second ordre. C'est à cette surface que correspond, dans chacun des systèmes réciproques, la gerbe de plans du second ordre dont il a été question dans la deuxième partie du théorème. Notre théorème n'exclut pas la possibilité du cas où aucun point réel de l'espace ne serait situé sur le plan qui lui correspond. Pour une position particulière des systèmes réciproques, la surface du second ordre peut aussi se décomposer en deux plans.

*Deux systèmes réciproques de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont en involution, quand les sommets A,B,C,D d'un tétraèdre de $\Sigma$ ont pour correspondants dans $\Sigma_1$ les faces opposées $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1$ de ce même tétraèdre.*

Au point d'intersection des plans $\beta_1,\gamma_1,\delta_1$, c'est-à-dire au point A de $\Sigma_1$ correspond aussi dans $\Sigma$ le plan $\overline{BCD}$ ou $\alpha_1$ et de même à chaque autre sommet du tétraèdre correspond doublement la face opposée. Il en résulte que le système plan $\alpha_1$ est en situation involutive par rapport à la gerbe A qui lui est réciproque, car il est en involution (II, page 72) avec une section de cette gerbe. A tout point ou tout rayon de $\alpha_1$ (comme de $\beta_1,\gamma_1$ ou $\delta_1$) correspond ainsi doublement un plan ou un rayon de A (ou de B,C ou D). Par conséquent, tout plan qui coupera $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1$ suivant quatre droites quelconques aura pour élément lui correspondant doublement le point qui sera projeté de A,B,C,D suivant les quatre rayons correspondants.

Nous pouvons regarder deux systèmes involutifs de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ comme un seul système dans lequel à tout point correspond un plan et à toute droite une droite. Ce système a reçu le nom de *système polaire de l'espace;* tout point est dit le pôle du plan qui lui est conjugué, toute droite ou tout plan est dit la polaire du rayon ou du point qui lui est conjugué. Si le système polaire contient des points situés dans leurs plans polaires, ils se trouvent sur une surface du second ordre appelée la *surface double* ou la *directrice* du système (II, page 76). Réciproquement, les développements donnés dans la sixième leçon montrent qu'une surface du second ordre, qui n'est pas un cône, détermine un système polaire de l'espace dont cette surface est la directrice. Les

définitions données à cet endroit (II, pages 45-46) pour les points, les rayons et les plans conjugués sont applicables à tout système polaire, même quand ce système n'a pas de surface double.

On dira de plus que tout tétraèdre d'un système polaire de l'espace dont les sommets sont les pôles des faces opposées est un *tétraèdre polaire.*

Dans un pareil tétraèdre, les sommets, les faces et les arêtes sont conjugués deux à deux. *Le système polaire de l'espace renferme un nombre infini de systèmes polaires plans, de gerbes polaires et de tétraèdres polaires.* En effet, comme toute gerbe A, dont le centre est extérieur au système plan $\alpha$ qui lui correspond, est réciproque à ce dernier et en involution avec lui, on voit que le plan $\alpha$ est le lieu d'un système polaire dans lequel tout point a pour élément correspondant la droite qui lui est conjuguée; le point A se présente aussi à nous comme le centre d'une gerbe polaire. Tout triangle polaire du système polaire plan est projeté du point A suivant un trièdre polaire de la gerbe polaire et il forme avec ce point un tétraèdre polaire du système polaire de l'espace. Tout système polaire plan $\alpha$, appartenant au système polaire de l'espace, a aussi un *centre* et des *diamètres*, même quand il n'a pas de courbe double. Le centre est le point conjugué à la droite de l'infini du système polaire $\alpha$ et tout diamètre est conjugué à un point à l'infini de $\alpha$. Les diamètres sont conjugués entre eux deux à deux; deux d'entre eux sont perpendiculaires l'un sur l'autre et s'appellent les *axes* du système polaire $\alpha$. De même, les trois rayons conjugués de la gerbe polaire A, qui sont deux à deux perpendiculaires entre eux, sont appelés les *axes principaux* de cette gerbe, même quand elle n'a pas de cône double.

*Si l'on prend pour tétraèdre polaire un tétraèdre* ABCD *et si à un point quelconque* E, *qui n'est situé sur aucune des faces du tétraèdre, l'on assigne pour correspondant un plan* $\varepsilon$, *qui ne passe par aucun des sommets de ce tétraèdre, ces éléments déterminent un système polaire de l'espace.*

En effet, nous pouvons rapporter réciproquement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace de manière qu'aux cinq points A, B, C, D, E correspondent respectivement les plans $\overline{BCD}$, $\overline{CDA}$, $\overline{DAB}$, $\overline{ABC}$ et $\varepsilon$ (II, page 25). Ces deux systèmes sont alors en involution (II, page 77) et, pris ensemble, ils constituent le système polaire.

Le système polaire, situé dans le plan $\varepsilon$ qui appartient à ce système

polaire de l'espace, est complètement déterminé par l'intersection du plan avec le pentagone complet ABCDE de l'espace. En effet, chacun des dix côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$,..... $\overline{DE}$ de ce pentagone est conjugué dans le système polaire de l'espace à la face $\overline{CDE}$, $\overline{BDE}$,..... $\overline{ABC}$, et deux éléments opposés quelconques du pentagone passent d'après cela par deux éléments conjugués l'un à l'autre dans le système polaire plan. Donc :

*Les dix couples d'éléments opposés (arêtes et faces) d'un pentagone de l'espace sont coupés par un plan quelconque, ne passant par aucun de ses sommets, suivant dix couples d'éléments conjugués (pôles et polaires) du système polaire plan.*

La figure résultant de l'intersection se compose de dix points et dix droites ; sur chacune de ces dernières sont situés trois des dix points et par chaque point passent trois des dix droites. Si de deux des sommets du pentagone on projette les trois autres sommets sur le plan de section, on obtient deux triangles en perspective, et l'on reconnaît facilement que la figure formée par les dix points et les dix droites est identique avec une autre figure dont il a été question antérieurement (I, page 5). Le tétraèdre formé par quatre des cinq sommets est coupé par le plan suivant un quadrilatère polaire du système polaire plan (I, page 227). Sa projection sur le plan, faite du cinquième sommet, est un quadrangle polaire du système polaire plan et les six côtés de ce quadrangle polaire passent par les six sommets du quadrilatère polaire.

Deux faisceaux de plans, dont les axes ne sont pas conjugués, sont projectifs, quand à chaque plan de l'un correspond le plan qui lui est conjugué dans l'autre (II, page 47). Soient ABCD et EFGH deux tétraèdres polaires quelconques d'un système polaire de l'espace ; on a en conséquence $\overline{AB}$ (CDGH) $\overline{\wedge}$ $\overline{EF}$ (DCHG) ; en effet, les plans ABC et ABH, par exemple, ont respectivement pour conjugués les plans EFD et EFG, parce que D et H sont les pôles de ABC et EFG. Or comme $\overline{EF}$ (DCHG) $\overline{\wedge}$ $\overline{EF}$ (CDGH), (voir I, page 151), il s'ensuit que $\overline{AB}$ (CDGH) $\overline{\wedge}$ $\overline{EF}$ (CDGH) ; ou bien :

*Les sommets de deux tétraèdres polaires d'un système polaire de l'espace peuvent être réunis avec deux arêtes non conjuguées des tétraèdres par le moyen d'une surface réglée du second ordre.*

---

# DIXIEME LEÇON.

## Le système focal et le complexe linéaire de rayons.

Lorsque deux systèmes réciproques de l'espace sont placés de telle sorte que tout plan de l'un passe par le point qui lui correspond dans l'autre, ils sont en involution et leur ensemble constitue ce qu'on appelle un *système focal*. Tout d'abord, il est clair qu'aucune droite $g$ de l'un des systèmes n'est coupée par la droite correspondante $g_1$ de l'autre système; car s'il en était autrement, tous les points de la ponctuelle $g$ ne seraient pas situés sur les plans correspondants du faisceau $g_1$; il n'y en aurait que deux satisfaisant à cette condition : le point $gg_1$ et celui qui correspond au plan $\overline{gg_1}$. D'après cela, deux rayons homologues $g$, $g_1$ des deux espaces réciproques ne se rencontrent pas, ou coïncident.

Mais tous les rayons passant par un point P ont pour correspondants les rayons d'un plan $\pi_1$ passant par P; les rayons passant par P et contenus dans ce plan coïncident donc avec leurs correspondants, puisqu'ils sont situés avec eux dans le plan $\pi_1$. Au point P d'intersection de ces droites qui se correspondent à elles-mêmes doit donc correspondre doublement le plan $\pi_1$ qui les joint, c'est-à-dire que ce plan correspond à P dans les deux espaces réciproques.

Puisque, d'après cela, les systèmes réciproques de l'espace sont en involution, on peut les regarder comme un système unique dont les éléments sont deux à deux conjugués entre eux. A l'exemple de Möbius et Von Staudt, nous donnerons à ce système le nom de *système focal* (Nullsysteme); à chacun de ses points correspond un plan comme

polaire ou *plan focal*, à chaque plan un pôle ou *foyer* et à chaque droite une droite. D'après cela, le système focal a entre autres propriétés les suivantes :

*Dans le système focal, chaque plan passe par son pôle et chaque point est situé dans son plan polaire; toute droite, qui est dans un même plan avec sa polaire, coïncide avec elle; toute ponctuelle est perspective au faisceau de plans qui lui est conjugué; tout système plan a un faisceau de rayons correspondant commun avec la gerbe qui lui est conjuguée et il est réciproque à cette gerbe.*

Toute droite qui se correspond à elle-même s'appellera une *directrice* ou un *rayon directeur* du système focal. Ces directrices donnent lieu à ce théorème :

*Toutes les directrices du système focal, qui passent par un point* P *ou sont situées dans un plan* $\varepsilon$, *forment un faisceau de rayons du premier ordre.*

En effet, elles sont situées dans le plan focal de P ou passent par le foyer de $\varepsilon$. L'ensemble des directrices d'un système focal a reçu le nom de *complexe linéaire de rayons* en raison de cette propriété. Deux rayons de ce complexe, qui se rencontrent, appartiennent toujours à un faisceau du premier ordre dont tous les rayons font partie du complexe.

Soient $a$ et $a_1$ deux droites conjuguées qui ne se rencontrent pas, chaque point de l'une est situé dans le plan conjugué qui passe par l'autre ; il en résulte que :

*Tout rayon qui coupe deux droites conjuguées* $a, a_1$ *ne se rencontrant pas est une directrice du système focal; et toute directrice, qui coupe une droite* $a$, *doit être dans un même plan avec la polaire* $a_1$ *de cette droite. Deux couples de droites conjuguées du système focal, qui ne se coupent pas mutuellement, sont donc situées sur un système réglé, dont le système directeur se compose de directrices du système focal et appartient au complexe linéaire de rayons. Trois rayons du complexe linéaire, qui ne se rencontrent pas, déterminent un système réglé qui fait partie du complexe.*

Car les droites qui les rencontrent sont conjuguées deux à deux dans le système focal.

Deux couples de droites conjuguées $a, a_1$ et $b, b_1$ du système focal coupent un plan quelconque en deux couples de points situés sur deux directrices qui passent par le foyer du plan ; $a, a_1$ et $b, b_1$ déterminent

donc le foyer d'un plan quelconque et le plan focal d'un point quelconque.

*Un pentagone gauche simple* ABCDE *détermine un système focal dans lequel chacun des cinq côtés du pentagone est conjugué à lui-même et dans lequel par conséquent chaque sommet est conjugué au plan qui passe par les deux côtés adjacents.*

En effet, rapportons réciproquement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace de manière qu'aux points A,B,C,D,E de l'un correspondent respectivement les plans EAB, ABC, BCD, CDE, DEA de l'autre; le côté $\overline{AB}$ se correspond à lui-même et il en est de même de tout autre côté. Car ce côté $\overline{AB}$ est d'une part la droite qui joint les points A et B et d'autre part la droite d'intersection des plans EAB et ABC qui correspondent à ces points. Si les deux systèmes considérés ensemble ne constituaient pas un système focal, le lieu de tous les points situés sur les plans qui leur correspondent serait une surface du second ordre passant par les cinq côtés du pentagone (II, page 76); cette surface aurait en commun avec un plan quelconque du pentagone, par exemple avec ABC, deux droites $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ et en outre elle aurait encore un point autre commun situé sur $\overline{DE}$, ce qui est impossible. Les systèmes réciproques constituent donc réellement un système focal.

*Trois droites* $g, g_1, l$ *qui ne se rencontrent pas déterminent un système focal dans lequel* $g$ *et* $g_1$ *sont conjuguées l'une à l'autre et dont* $l$ *est une directrice.*

Menons par $g_1$ deux plans quelconques $g_1$ AE et $g_1$ CD qui coupent $g$ aux points A et C, $l$ aux points E et D et désignons par B un point quelconque de $g_1$; les côtés du pentagone gauche simple ABCDE sont alors cinq directrices du système focal. Dans ce système, le côté $\overline{DE}$ ou $l$ est une directrice et la droite $\overline{AC}$ ou $g$ est conjuguée à la droite d'intersection $g_1$ des plans EAB et BCD du pentagone.

Pour construire directement le plan focal d'un point quelconque P au moyen des trois droites $g, g_1, l$, nous déterminons d'abord le foyer du plan $\overline{Pl}$; ce point se trouve sur $l$ et il est situé sur la droite qui joint les points où les deux droites $g$ et $g_1$ rencontrent le plan. La directrice qui joint ce foyer à P et celle suivant laquelle se coupent les plans $\overline{Pg}$ et $\overline{Pg_1}$ déterminent le plan focal cherché du point P.

*Cinq droites quelconques* a,b,c,d,e *déterminent en général un système focal, dont elles sont les directrices; elles déterminent aussi le complexe de rayons dont elles font partie.*

En effet, il existe en général deux droites $g$ et $g_1$ qui coupent les quatre droites $a,b,c,d$ et il n'en existe que deux. Ces droites sont conjuguées l'une à l'autre dans le système focal et, jointes à $e$, elles déterminent ce système pourvu qu'elles ne se coupent pas et qu'elles ne rencontrent pas $e$. Quand ces deux droites ne sont pas réelles et quand par conséquent $a,b,c,d$ (et $e$) ne se rencontrent pas, $a,b,e$ et $c,d,e$ déterminent deux surfaces réglées qui se composent de directrices du système focal cherché.

Sur ces deux surfaces prenons deux couples de rayons $a',b'$ et $c',d'$ qui soient rencontrés par une droite $g$ et par conséquent aussi par une autre droite $g_1$, $a',b',c',d'$ et $e$ ou encore $g,g_1$ et $e$ déterminent le système focal de la manière indiquée précédemment. Ce théorème ne souffre d'exception que si trois des cinq droites $a,b,c,d,e$ sont situées dans un même plan ou font partie de la même gerbe, ou bien si quatre d'entre elles font partie d'un même système réglé; par conséquent, si elles sont toutes coupées par une même droite $g$.

*Deux couples de droites conjuguées* $\mathrm{p},\mathrm{p}_1$ *et* $\mathrm{q},\mathrm{q}_1$ *qui appartiennent à un même système réglé déterminent aussi un système focal.*

Soient $a,b,c$ trois directrices de ce système réglé et $d,e$ deux droites dont l'une coupe $p$ et $p_1$ et l'autre $q$ et $q_1$; le système focal a les droites $a,b,c,d,e$ pour directrices et est déterminé par elles. Si une droite décrit le système réglé $pp_1q$, la droite conjuguée, qui coupe constamment aussi les trois directrices $a,b,c$, décrit le système réglé $p_1pq_1$; mais ces deux systèmes sont projectifs et en involution.

Au lieu du dernier théorème, nous pouvons donc dire aussi que :

*Un système réglé en involution* $\mathrm{pp}_1,\mathrm{qq}_1$ *détermine un système focal dont il fait lui-même partie.*

Le centre d'involution de la courbe involutive du second ordre suivant laquelle le système réglé est coupé par un plan quelconque est le foyer de ce plan ; et le plan d'involution du faisceau involutif du second ordre qui projette le système réglé d'un point quelconque est le plan focal de ce point. Le système focal renferme une infinité de systèmes réglés involutifs.

Le complexe linéaire de rayons qui passe par cinq droites $a,b,c,d,e$ qui ne se rencontrent pas renferme les dix systèmes réglés $abc$, $abd$, ..... $cde$, et tous les systèmes réglés qui passent par trois rayons quelconques de ces dix systèmes réglés. En continuant à construire successivement des systèmes réglés de ce genre, on peut arriver à

déterminer tous les rayons du complexe. Lorsque les cinq rayons, qui ne se rencontrent pas, coupent une droite $g$, mais sont d'ailleurs indépendants les uns des autres, on obtient de cette manière un complexe linéaire singulier qui se compose de tous les rayons qui coupent la droite $g$; mais dans ce cas, les rayons du complexe ne sont pas des directrices d'un système focal.

Toutes les droites et les plans dont les polaires et les pôles sont à l'infini sont appelés les *diamètres* et les *plans diamétraux* du système focal. Tous passent par le pôle ou foyer du plan à l'infini, d'où résulte que :

*Les diamètres du système focal sont parallèles entre eux et aux plans diamétraux.*

Toutes les directrices du système focal, situées dans un même plan diamétral, sont parallèles parce qu'elles passent par le foyer du plan, lequel est à l'infini. Le faisceau de rayons parallèles qu'elles constituent ne change pas, quand on le déplace dans la direction du diamètre. Nous en concluons que :

*La complexe linéaire et le système focal qui s'y rapporte ne changent pas quand on les déplace suivant la direction des diamètres parallèles.*

Tout plan parallèle à deux droites conjuguées est un plan diamétral du système focal.

Les foyers de plans parallèles sont situés sur un diamètre dont la polaire est contenue dans le plan parallèle situé à l'infini.

Le diamètre $n$, qui renferme les foyers de tous les plans perpendiculaires aux diamètres, peut s'appeler l'*axe principal* du système focal et du complexe linéaire correspondant. Cet axe $n$ est normal à toutes les directrices qui le rencontrent ; il se trouve sur un même paraboloïde équilatère avec deux droites conjuguées quelconques $g, g_1$ qui ne le rencontrent pas et coupe normalement la droite qui mesure la plus courte distance de $g$ et $g_1$. En effet, d'après les théorèmes précédents, toutes les directrices normales à $n$ qui rencontrent $g$ doivent aussi couper $g_1$ et forment par conséquent un système réglé parabolique (I, page 126).

Quand on donne l'axe principal $n$, on donne en même temps sa polaire $n_1$ située à l'infini ; il résulte alors immédiatement d'un théorème démontré précédemment que :

*Le système focal est déterminé par son axe principal* n *et une direc-*

*trice* $l$ *prise arbitrairement, mais qui ne rencontre pas l'axe principal et ne lui est pas perpendiculaire.*

Toutes les directrices qui passent par un point quelconque P de $l$ sont dans un même plan $\pi$ avec $l$ et la perpendiculaire abaissée de P sur $n$. Le foyer d'un plan quelconque $\varepsilon$ mené par P est le point d'intersection de la directrice $\overline{\pi\varepsilon}$ et de la perpendiculaire élevée à $n$ dans le plan $\varepsilon$.

Une gerbe dont le centre C est situé sur l'axe principal $n$ a pour conjugué dans le système focal un système plan qui lui est réciproque et dont le plan $\gamma$ est normal à l'axe principal en C. Aux tangentes d'un cercle situé sur $\gamma$ et ayant son centre en C correspondent donc les rayons d'une surface conique du second ordre dont le centre est C. Or comme par rapport au cercle le point C est le pôle de la droite à l'infini $n_1$ du plan $\gamma$, le plan $\gamma$ est le plan polaire de l'axe principal $n$ par rapport à la surface conique; et comme deux directrices quelconques qui se coupent rectangulairement en C sont conjuguées par rapport au cercle, ces directrices, situées dans $\gamma$, puisqu'elles se correspondent à elles-mêmes dans le système focal, doivent aussi être conjuguées par rapport à la surface conique. Le plan $\gamma$ est donc un plan de symétrie et tout rayon issu de C et situé dans $\gamma$ est un axe principal de la surface conique; donc (I, page 189) :

*A tout cercle, ayant son centre sur l'axe principal* n *et dont le plan est normal à* n, *correspond un cône de révolution, dont* n *est l'axe de révolution.*

Si donc on fait tourner d'une seule pièce autour de l'axe principal un point quelconque et son plan focal, le point décrit un cercle et le plan focal enveloppe le cône qui correspond au cercle, puisqu'il ne cesse pas d'être le plan focal du point. Donc :

*Une rotation autour de l'axe principal ne change en rien le système focal et le complexe linéaire de rayons.*

Ils ne changent pas non plus, si on les fait tourner autour de l'axe principal en leur imprimant en même temps une translation suivant la direction de cet axe, en donnant en un mot au système un mouvement héliçoïdal autour de l'axe principal.

*En désignant par* r *la distance d'un point quelconque* P *à l'axe principal* n *et par* $\rho$ *l'angle que le plan focal de ce point fait avec l'axe principal, le produit* r. *tang* $\rho$ *a une valeur constante, indépendante de la position du point.*

Pour démontrer cette propriété remarquable, sur l'axe principal $n$ et sur une directrice $u$ qui coupe rectangulairement cet axe en un point C, prenons deux ponctuelles projectives égales qui aient le point C comme point correspondant commun. Elles ont pour conjugués deux faisceaux projectifs de plans $n_1$ et $u$ qui ont le plan focal $\gamma$ du point C comme élément correspondant commun, qui par conséquent sont perspectifs et engendrent un faisceau de rayons parallèles. Un rayon de ce faisceau est situé à l'infini dans le plan $\overline{nu}$; c'est celui suivant lequel se coupent les plans focaux des points à l'infini de $u$ et $n$; le plan du faisceau de rayons parallèles est donc parallèle au plan $\overline{nu}$ et à une certaine distance $e$ de lui.

Soient maintenant P et P′ deux points homologues de $u$ et $n$, ils sont à égale distance du point C et leurs plans focaux se coupent suivant une droite parallèle à $u$ et située à la distance $e$ du plan $\overline{nu}$. Le plan focal de P passe par $u$ et fait avec l'axe principal $n$ un angle $\rho$; le plan focal de P′ au contraire coupe rectangulairement l'axe principal en P′. On a par conséquent $CP'.\ \text{tang}\ \rho = e$, ou bien $r.\ \text{tang}\ \rho = e$, quelle que soit la position du point P sur $u$. Or, une rotation de la directrice $u$ autour de $n$ et une translation suivant la direction de $n$ permettent d'amener cette directrice à se superposer à une autre directrice quelconque qui coupe l'axe, et le système focal n'éprouve aucun changement par suite de ce double mouvement; donc, la constante $e$ a la même valeur pour toutes ces directrices, et d'une manière générale, le produit $r.\ \text{tang}\ \rho$ est indépendant de la position du point P. Les foyers de tous les plans qui font un angle de 45° avec l'axe principal $n$ sont à la distance $e$ de $n$ et sont par suite situés sur un cylindre de révolution de rayon $e$.

*Soit* r *la distance d'une génératrice quelconque* l *à l'axe principal* n *et* $\rho$ *l'angle que font entre elles les directions de* n *et* l, *le produit* r. *tang* $\rho$ *est égal à la constante* e.

En effet, la plus courte distance de $n$ et $l$ coupe normalement ces deux droites aux points C et P, dont la distance $PC = r$; mais $\rho$ est l'angle que le plan focal du point C, qui passe par $l$ et C, fait avec l'axe principal. Le théorème est donc ramené au précédent. La relation $r.\ \text{tang}\ \rho = e$, à laquelle satisfont tous les rayons du complexe linéaire, peut être considérée comme l'équation du complexe par rapport à son axe principal.

Les tangentes d'une hélice, qui a l'axe principal pour axe et qui est tangente à une directrice quelconque, sont toutes des directrices du

système focal. Chaque point de cette courbe a son plan osculateur pour plan focal; par conséquent les plans osculateurs de tous les points communs à l'hélice et à un plan quelconque passent tous par un même point qui est le foyer de ce plan. L'hélice détermine le système focal et le complexe de rayons correspondant; suivant qu'elle sera dextrogyre ou lévogyre, nous pourrons diviser les complexes en complexes dextrogyres ou lévogyres. L'axe principal et la constante $e$ déterminent le complexe, quand on indique de plus s'il doit être dextrogyre ou lévogyre.

*Soient* g *et* $g_1$ *deux droites conjuguées*, a *et* $a_1$ *leurs distances à l'axe principal du système focal*, $\alpha$ *et* $\alpha_1$ *les angles qu'elles font avec cet axe, on a la relation* $a . \tan \alpha_1 = a_1 \tan \alpha = e$; *par suite :*

$$a : a_1 = \tan \alpha : \tan \alpha_1$$

En effet, le plan focal du point de $g$ qui est à la distance $a$ de l'axe principal, passe par $g_1$ et fait avec l'axe principal l'angle $\alpha_1$; d'où résulte que

$$a . \tan \alpha_1 = e.$$

Le système focal et ses propriétés les plus importantes ont été découverts, dès 1833, par Möbius [1] à propos de ce problème de mécanique : *Construire les deux forces équivalentes à un système de forces données dans l'espace*. Ce problème comporte une infinité de solutions. Si l'on choisit pour l'une des forces, le point P par lequel elle doit passer, l'autre est située dans un plan $\pi$, passant par P, qui est conjugué à ce point P dans un système focal déterminé par le système de forces. Les directrices de ce système focal se distinguent des autres droites de l'espace en ce que le moment statique du système de forces par rapport à chacune d'elles est nul. Quelques années après Möbius, M. Chasles a retrouvé le système focal [2]; entre autres théorèmes, il démontre le suivant : Si un corps solide éprouve un déplacement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses différents points sont conjugués à ces points dans un système focal déterminé par le déplacement; il faut toutefois que le déplacement soit dû à un mouvement héliçoïdal et non pas à une translation ou à une rotation simple.

---

1. Mobius. *Journal de Crelle*. Tome X, page 317. Voir aussi sa *Statique*. Leipzig, 1837.

2. Chasles. *Aperçu historique*. Bruxelles, 1837. 2e édition, Paris, 1875, page 614.

# ONZIÈME LEÇON.

## Le système de rayons de premier ordre et de première classe.

Un système de rayons est dit du $n^e$ *ordre* quand, par un point quelconque, il passe en général $n$ de ses rayons et pas plus de $n$; on dit qu'il est de la $k^e$ *classe*, quand il y a en général $k$ de ses rayons dans un plan quelconque. Les centres des surfaces coniques et les plans des faisceaux de rayons qui peuvent faire partie du système sont appelés les points et les plans *singuliers* du système.

Les directrices communes à deux systèmes focaux forment un système de rayons de premier ordre et de première classe; en effet, par un point quelconque il passe un rayon qui est l'intersection des plans focaux du point et de même un plan quelconque contient un rayon du système. Lorsque deux rayons de ce système se coupent, les deux plans focaux de leur point d'intersection coïncident avec le plan qui les réunit et tout rayon de ce plan, passant par le point d'intersection en question, est une directrice commune aux deux systèmes. Donc :

*Deux complexes linéaires ont un système de rayons de premier ordre et de première classe qui leur est commun. Ce système contient tous les faisceaux de rayons du premier ordre passant par deux rayons du système, qui se coupent, et tous les systèmes réglés passant par trois rayons du système, qui ne se rencontrent pas* (II, page 81).

Lorsqu'une surface réglée du second ordre passera par un système réglé contenu dans le système, nous dirons, pour abréger, qu'elle est contenue dans le système.

Tous les rayons du système de premier ordre et de première classe, qui coupent une droite quelconque $g$, forment en général un système réglé; ce dernier est déterminé par trois de ces rayons. Soit $l$ un rayon quelconque du système, S un point situé sur $l$ et $\sigma$ un plan passant par $l$; aux points suivant lesquels $\sigma$ est coupé par les autres rayons du système nous pouvons faire correspondre les plans suivant lesquels ces rayons sont projetés de S. Aux points d'une droite de $\sigma$ correspondent alors les plans d'un faisceau du premier ordre $g_1$ passant par S; en effet, les rayons du système qui passent par ces points forment un système réglé qui contient aussi le rayon $l$ et dont par conséquent les autres rayons sont projetés de S suivant un faisceau ordinaire de plans $g_1$.

Le plan $\sigma$, de même que tout autre plan mené par $l$, est donc d'après cela rapporté réciproquement à la gerbe S par le moyen du système de rayons, de telle manière qu'il a avec S un faisceau de rayons correspondant commun et l'on voit ainsi que :

*Le système de rayons de premier ordre et de première classe est coupé par deux plans $\sigma, \sigma_1$ menés par le même rayon* l, *suivant deux systèmes collinéaires et il est projeté de deux points quelconques $S, S_1$ pris sur* l *suivant deux gerbes collinéaires. Ces gerbes sont rapportées réciproquement à ces systèmes plans par le moyen du système de rayon et elles ont avec lui, et l'une avec l'autre, le rayon* l *correspondant commun.*

Les systèmes plans collinéaires $\sigma$ et $\sigma_1$ ont en commun avec un système réglé quelconque *abc* du système de rayons qui ne passe pas par $l$ deux coniques homologues, et comme la droite $l$ se correspond à elle-même, ses pôles par rapport à ces deux coniques sont des points homologues de $\sigma$ et $\sigma_1$ (II, page 11) et sont situés sur un même rayon du système. La droite qui unit ces deux pôles est la polaire de $l$ par rapport à la surface réglée *abc* contenue dans le système de rayons; il en résulte que :

*Le système de rayons de premier ordre et de première classe est conjugué à lui-même par rapport à toute surface réglée qui passe par un de ses systèmes réglés, c'est-à-dire que ses rayons sont deux à deux polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à la surface réglée.*

Dans le cas particulier (dont on ne tient pas compte dans la démonstration) où les deux pôles se confondent et où par suite la droite $l$ est

tangente à la surface réglée *abc*, l'exactitude du théorème ressortira facilement de considérations ultérieures.

Nous supposerons à présent que les deux plans quelconques $\sigma$ et $\sigma_1$ menés par *l* sont conjugués par rapport à la surface réglée *abc* et que cette dernière n'est pas tangente à la droite *l*. Chacun des deux plans coupe donc la polaire de *l* au pôle de l'autre plan par rapport à la surface réglée. Une droite *g* de $\sigma$ qui passe par le pôle de $\sigma_1$ et coupe deux rayons quelconques *d* et *e* de la surface *abc* a donc pour correspondante dans le plan $\sigma_1$ collinéaire à $\sigma$, une droite $g_1$ qui passe par le pôle de $\sigma$ et qui coupe les deux mêmes rayons *d* et *e*. Mais comme la polaire de *g* par rapport à la surface réglée *abc* passe par le pôle de $\sigma$ et coupe les deux droites *d* et *e* qui sont conjuguées à elles-mêmes, elle se confond avec $g_1$ et les points homologues de *g* et $g_1$ sont conjugués deux à deux par rapport à la surface réglée. Si l'on imagine que les systèmes collinéaires plans $\sigma$ et $\sigma$ soient décrits par les droites *g* et $g_1$ qui se corpondent, on voit que :

*Deux plans passant par un rayon* l *du système de rayons et conjugués par rapport à une surface réglée quelconque* abc *du système, laquelle ne contient pas ce rayon et ne lui est pas tangente, sont rapportés collinéairement l'un à l'autre par le système de telle sorte que leurs points homologues (et en particulier aussi ceux qui sont situés sur* l*) sont conjugués par rapport à la surface réglée.*

De même chacun des rayons du système sera projeté de deux quelconques de ces points conjugués suivant deux plans conjugués par rapport à la surface réglée.

*Le système de rayons de premier ordre et de première classe est, en général, complètement déterminé par quatre rayons* a,b,c,d *pris arbitrairement.* En effet, comme ces quatre rayons peuvent être joints à un cinquième rayon quelconque par un complexe linéaire de rayons, on peut alors faire passer par eux un système de rayons de premier ordre et de première classe. Ce système sera coupé par deux plans menés par *a* suivant des systèmes collinéaires et leur collinéation sera déterminée en général par la droite *a* qui se correspond à elle-même et par les trois couples de points homologues que *b,c,d* ont en commun avec les deux plans. Si donc l'on joint chaque point de l'un des plans avec le point qui lui correspond dans l'autre plan, on obtiendra tous les rayons du système. On voit en même temps que :

*Deux systèmes collinéaires, situés dans des plans différents et*

*dont la droite d'intersection est un élément correspondant commun, sans que les points de cette droite se correspondent à eux-mêmes, engendrent un système de rayons de premier ordre et de première classe; toute droite, qui joint deux points homologues des deux plans, fait partie du système.*

De même, deux gerbes collinéaires, qui ont comme éléments correspondants communs un rayon et deux plans au plus, engendrent un système de rayons de premier ordre et de première classe. Le système de rayons déterminé par quatre rayons $a,b,c,d$ qui ne se rencontrent pas, contient le système réglé $abc$ ainsi que tout autre système réglé, qui a deux rayons communs $abc$ et qui passe par $d$; on peut le construire au moyen de ces systèmes réglés.

Projetons un système de rayons de premier ordre et de première classe de deux points $S_1$ et $S_2$, situés sur l'un de ses rayons; d'après un théorème précédent, nous obtenons deux gerbes collinéaires. Les plans homologues de ces gerbes se coupent deux à deux suivant les rayons du système et les gerbes ont comme éléments correspondants communs le rayon $\overline{S_1S_2}$ et deux plans $\eta, \varphi$ passant par lui, qui peuvent se confondre ou être imaginaires. Les faisceaux homologues de rayons de $S_1$ et $S_2$ situés dans $\eta$ et $\varphi$ ont toujours le rayon $\overline{S_1S_2}$ correspondant commun et engendrent deux ponctuelles rectilignes $u,v$; nous donnerons à leurs lieux le nom d'*axes* du système de rayons. Comme tout plan de la gerbe $S_1$ qui passe par un point de $u$ ou de $v$ a ce point qui lui est commun avec le plan correspondant de la gerbe $S_2$, il s'ensuit que :

*Les axes* u *et* v *du système de premier ordre et de première classe coupent tous les rayons du système, et toute droite qui rencontre* u *et* v *appartient à ce système. Les deux axes contiennent tous les points singuliers du système, et tous les plans singuliers de ce système passent par eux. Ils sont conjugués l'un à l'autre dans tout système focal dont le complexe de directrices passe par le système de rayons.*

Les deux axes $u,v$ n'ont aucun point commun l'un avec l'autre quand ils ne coïncident pas; cela résulte de ce que, en général, deux rayons du système ne se rencontrent pas.

Quand deux rayons du système se coupent, ils sont dans un même plan avec l'un des axes et se rencontrent en un même point avec l'autre. Les deux axes sont des directrices communes à tous les systèmes réglés contenus dans le système; ils sont imaginaires ou réels,

ou bien ils coïncident, suivant que la surface du second ordre qui passe par l'un de ces systèmes rencontre chacun des rayons du système non situé sur elle en deux points imaginaires ou réels, ou bien lui est tangente. Si les deux axes ne sont pas réels, ce sont deux droites imaginaires conjuguées de seconde espèce (I, page 178). Une surface réglée est touchée suivant les points d'une droite située sur elle-même par les rayons d'un système de premier ordre et de première classe dont les axes coïncident avec cette droite; toutes les surfaces réglées contenues dans ce système de rayons sont tangentes suivant les points de cette droite.

*Les plans polaires d'un point quelconque P par rapport à toutes les surfaces réglées contenues dans un système de rayons de premier ordre et de première classe se coupent en un point $P_1$ du rayon du système qui passe par P. De même les pôles d'un plan $\pi$ par rapport à toutes ces surfaces réglées sont contenues dans un plan $\pi_1$ qui a un rayon du système commun avec $\pi$. Les points et les plans de l'espace sont ainsi conjugués deux à deux par rapport à toutes les surfaces réglées du système.*

En effet, si le système de rayons a deux axes réels $u$ et $v$, $P_1$ est le point qui est harmoniqnement séparé de P par $u$ et $v$; car les surfaces réglées du système passant toutes par $u$ et $v$, les plans polaires de P doivent passer par $P_1$. Si, en second lieu, toutes les surfaces réglées du système sont tangentes suivant les points d'une même droite, $P_1$ est le point suivant lequel elles sont touchées par le plan $\overline{Pu}$. Enfin, en troisième lieu, si les deux axes du système sont imaginaires, ou d'une manière générale ne sont pas identiques, soit $l$ le rayon du système qui passe par P; on peut au moins faire passer par $l$ un couple de plans réels conjugués par rapport à deux quelconques des surfaces réglées $R^2$ et $R_1^2$ (I, page 181).

Ces deux plans seront rapportés collinéairement l'un à l'autre par le système de rayons de telle manière que leurs points homologues, et en particulier ceux situés sur $l$ soient conjugués par rapport aux deux surfaces (II, page 90), par suite le point $P_1$ de $l$ qui est conjugué au point P par rapport à $R^2$ est aussi conjugué à P par rapport à toute autre surface $R_1^2$ du système.

Prenons encore deux points $S_1$ et $S_2$ sur un rayon $l$ d'un système de premier ordre et de première classe et projetons de ces points le système suivant deux gerbes collinéaires. Au moyen du système de

rayons rapportons collinéairement deux plans quelconques $\alpha_1$ et $\beta_1$ de $S_1$ aux plans $\alpha_2$ et $\beta_2$ qui leur correspondent dans $S_2$; à tout point d'intersection de $\alpha_1$ et $\beta_1$ correspondra un point commun à $\alpha_2$ et $\beta_2$; car les faisceaux de plans $\overline{\alpha_1\beta_1}$ et $\overline{\alpha_2\beta_2}$ engendrent un système réglé du système de rayons dont les deux droites $\overline{\alpha_1\beta_1}$ et $\overline{\alpha_2\beta_2}$ sont deux directrices. D'après cela, nous pouvons considérer les plans collinéaires comme des formes homologues de deux espaces collinéaires dont l'un contient les plans $\alpha_1$, $\beta_1$ et l'autre les plans $\alpha_2$,$\beta_2$. Ces espaces collinéaires ont pour éléments correspondants communs tous les rayons du système de rayons, parce que chacun de ces rayons unit deux points de $\alpha_1$ et $\beta_1$ et en même temps les points correspondants de $\alpha_2$ et $\beta_2$. Toutes les droites qui joignent les points homologues et toutes celles qui sont les intersections de plans homologues de ces espaces collinéaires font en conséquence partie du système de rayons et ce dernier sera engendré aussi bien par deux gerbes homologues que par deux systèmes plans homologues (non coïncidents) des espaces collinéaires. Ces espaces ont comme éléments correspondants communs les deux axes du système de rayons ainsi que tout point de ces axes et tout plan qui passe par eux.

Si les deux axes ne coïncident pas, nous pouvons prendre les points $S_1$ et $S_2$ sur le rayon $l$ de telle manière qu'ils soient conjugués par rapport à toutes les surfaces réglées contenues dans le système de rayons. Mais alors les plans homologues des gerbes $S_1$ et $S_2$, comme par exemple les plans $\alpha_1$ et $\alpha_2$, et les points homologues de ces plans sont conjugués deux à deux par rapport à toutes ces surfaces réglées, et par conséquent il en est de même pour tous les plans et plans homologues des espaces collinéaires. Donc :

*Si l'on fait correspondre deux à deux les points et les plans qui sont conjugués par rapport à toutes les surfaces réglées contenues dans le système de rayons, on obtient ainsi uniquement des couples d'éléments homologues de deux espaces collinéaires (en situation involutive) qui ont pour éléments correspondants communs tous les rayons du système, tous les points de ses axes et tous les plans qui passent par ces axes.*

Tous les rayons d'un système de premier ordre et de première classe qui coupent une courbe quelconque du second ordre $\varphi$, sont en général situés sur une surface réglée du quatrième ordre $F^4$. En effet, cette surface a au plus quatre points communs avec une droite quelconque, parce que tous les rayons du système qui coupent cette droite sont

situés sur une surface réglée du second ordre qui a au plus quatre points communs avec $\varphi$. En général la surface $F^4$ passe deux fois par le rayon $s$ du système situé dans le plan de $\varphi$.

Tout plan passant par $s$ a en commun avec $F^4$, en outre de $s$, une conique projective à $\varphi$ et les rayons de $F^4$ sont projetés d'un point quelconque de $s$ suivant un faisceau de plans du second ordre projectif à $\varphi$.

Comme deux droites $u$ et $v$, qui ne se rencontrent pas, peuvent toujours être considérées comme les axes d'un système de rayons, nous pouvons dire aussi que : si une droite $g$ se meut en rencontrant constamment une conique $\varphi$ et deux droites $u$ et $v$, qui ne se coupent pas, elle décrit en général une surface réglée du quatrième ordre $F^4$. Les droites $u$ et $v$ sont les droites qui contiennent les points doubles de cette surface ; en effet, par un point quelconque de $u$ ou $v$, il passe en général deux génératrices $g$ de $F^4$ et ces droites sont respectivement dans un même plan avec $v$ ou $u$.

Si la conique $\varphi$ a un point commun U avec l'une des droites $u$, $F^4$ se décompose en un plan $\overline{Uv}$ et une surface réglée $F^3$ du troisième ordre. La droite $u$ est un lieu des points doubles de la surface $F^3$ ; cette dernière passe par $v$ et en général a en commun avec un plan passant par $v$ deux génératrices dont le point d'intersection est situé sur $u$. La ponctuelle $v$ est rapportée projectivement à la conique $\varphi$ par le faisceau de plans $u$ de sorte qu'avec $\varphi$ elle engendre la surface.

Un complexe linéaire de rayons renferme chaque système de rayons de premier ordre et de première classe déterminé par quatre rayons du complexe ; réciproquement, un pareil système de rayons peut être réuni à un rayon qu'il ne contient pas par un complexe linéaire, parce que ce dernier est déterminé par cinq rayons quelconques. Nous pouvons donner aux axes principaux de tous les complexes linéaires de rayons qui passent par un système de rayons donné le nom d'*axes principaux* du système. Chacun de ces axes principaux est normal à tous les rayons du système qui le rencontrent ; ces derniers forment donc un système réglé d'un paraboloïde hyperbolique équilatère. En général, le système de rayons ne contient qu'une seule droite à l'infini ; elle est située sur le paraboloïde équilatère et les axes principaux du système de rayons sont parallèles aux plans qui contiennent cette droite et sont coupés normalement par le rayon du système qui est perpendiculaire à ces plans. Cependant quand le système de rayons a

un axe $u$ à l'infini, toute droite normale aux plans qui passent par $u$ est un axe principal du système. Soient $r$ et $r_1$ les distances d'un axe principal à deux rayons quelconques du système et $\rho$ et $\rho_1$ les angles qu'il fait respectivement avec ces rayons, on a la relation

$$r . \operatorname{tang} \rho = r_1 \operatorname{tang} \rho_1$$ (II, page 86).

---

# DOUZIÈME LEÇON.

**Formes engendrées par deux gerbes ou deux systèmes plans collinéaires — Courbes gauches et faisceaux de plans du troisième ordre.**

Les formes fondamentales *réciproques* de deuxième et de troisième espèce nous ont conduit aux surfaces et aux gerbes de plans du second ordre et nous ont fourni leurs propriétés les plus importantes. Considérons maintenant les formes engendrées par les formes fondamentales *collinéaires* et tout d'abord celles auxquelles donnent naissance deux gerbes collinéaires. La loi de réciprocité nous permettra d'étendre ensuite les résultats que nous aurons trouvés à deux systèmes plans collinéaires.

Lorsque deux gerbes collinéaires S et $S_1$ ne sont ni concentriques ni perspectives, elles engendrent un système de rayons du premier ordre suivant les rayons duquel les plans homologues des gerbes se coupent deux à deux. Par un point quelconque A de l'espace il ne passe en général qu'un seul rayon de ce système, parce que le faisceau de plans $\overline{SA}$ de la gerbe S engendre en général avec le faisceau de plans correspondant de $S_1$ un système règlé appartenant au système et dont il ne passe qu'un seul rayon par A. Il n'y passe plus d'un rayon, et dans ce cas il y en a une infinité, que si les axes de ces deux faisceaux de plans se coupent en A, et si par conséquent A est le point d'intersection de deux rayons homologues des gerbes; dans ce cas, A est un *point singulier* du système de rayons et les rayons du système qui passent par lui forment un faisceau ordinaire de rayons ou une surface conique du

second ordre, suivant que les faisceaux projectifs de plans $\overline{SA}$ et $\overline{S_1A}$ qui les engendrent ont ou n'ont pas de plan correspondant commun. Tout système réglé ou toute surface conique du second ordre engendrée par deux faisceaux homologues de plans passant par S et $S_1$, passe par tous les points d'intersection des rayons homologues des gerbes; car l'un quelconque de ces points singuliers du système de rayons est toujours situé dans deux plans qui se correspondent l'un à l'autre dans ces faisceaux.

Quand les gerbes collinéaires S et $S_1$ ont le rayon $\overline{SS_1}$ comme élément correspondant commun, elles engendrent, comme nous le savons déjà, un système de rayons de premier ordre et de première classe; nous pouvons considérer ce cas comme traité complètement dans la leçon précédente. En second lieu, si les gerbes ont, non plus le rayon $\overline{SS_1}$, mais un plan $\eta$ correspondant commun, leurs faisceaux homologues de rayons situés dans $\eta$ engendrent une courbe du second ordre $k^2$, passant par S et $S_1$, et suivant les points de laquelle les rayons homologues se coupent deux à deux. Par chaque point de $k^2$ passent une infinité de rayons du système de rayons engendré par S et $S_1$; ils forment un faisceau ordinaire de rayons et par suite sont situés dans un plan singulier du système. Deux pareils plans singuliers se coupent suivant une droite $v$ dont les points doivent également être des points d'intersection de rayons homologues de S et $S_1$, parcequ'il passe plus d'un rayon du système par chacun d'eux; le point où $v$ coupe le plan de $k^2$ doit donc se trouver sur la courbe $k^2$. Les droites d'intersection des plans homologues de S et $S_1$ ont par conséquent un point commun aussi bien avec $v$ qu'avec $k^2$ et toute droite qui est coupée par $v$ et $k^2$ en deux points différents appartient au système de rayons engendré par S et $S_1$. Comme un plan contient en général deux de ces droites, on voit que:

*Deux gerbes collinéaires S et $S_1$, non concentriques, qui n'ont pas de rayon mais qui ont un plan correspondant commun, engendrent un système de premier ordre et de seconde classe. Les points singuliers de ce système sont situés sur une conique* $k^2$ *et une droite* v *qui se coupent, et la conique* $k^2$ *passe par les centres S et $S_1$ des deux gerbes. Le système de rayons se compose de tous les rayons qui joignent les points de* v *avec ceux de* $k^2$.

De deux points quelconques P et $P_1$ de $k^2$ projetons cette courbe et la ponctuelle $v$ au moyen de couples de faisceaux de rayons; ces derniers sont rapportés projectivement l'un à l'autre par $k^2$ et $v$ et les rayons

communs aux deux couples de faisceaux P et $P_1$ se correspondent entre eux, parce qu'ils projettent le point d'intersection de $k^2$ et $v$. Ces faisceaux projectifs de rayons établissent ainsi une collinéation entre les gerbes P et $P_1$ (II, page 7) de telle manière les plans homologues de ces gerbes se coupent deux à deux suivant une droite qui a un point commun avec $k^2$ et $v$. Donc :

*Le système de rayons de premier ordre et de seconde classe est projeté de deux points quelconques de sa courbe directrice du second ordre* $k^2$ *suivant deux gerbes collinéaires.*

Il n'y a d'exception que pour le point d'intersection de $k^2$ et $v$ d'où le système de rayons est projeté suivant le faisceau des plans singuliers de $v$.

Le système de rayons de premier ordre et de seconde classe a pour réciproque le système de rayons de première classe et de second ordre. Ce dernier est engendré par deux systèmes collinéaires plans qui ont un point, mais pas de droite, comme élément correspondant commun. Ses plans singuliers forment une faisceau de plans du second ordre et un autre du premier ordre et il se compose de toutes les droites suivant lesquelles se coupent deux à deux les plans de ces deux faisceaux. Toutes les tangentes d'une surface conique du second ordre qui rencontrent une tangente donnée de cette surface forment un faisceau de rayons de première classe et de second ordre.

Nous allons supposer maintenant que les gerbes collinéaires S et $S_1$ n'aient aucun élément correspondant commun. Elles engendrent dans ce cas un système de rayons de premier ordre et de troisième classe dont les points singuliers sont situés sur *une courbe gauche du troisième ordre*. En effet, tous les rayons du système qui passent par un point singulier forment une surface conique irréductible du second ordre qui passe par tous les autres points singuliers ; tout point d'intersection de deux rayons du système est un point singulier et toute droite qui unit deux points singuliers est un rayon du système. Si un plan quelconque renfermait plus de trois rayons du système, leurs points d'intersection seraient tous des points singuliers et par l'un ou par l'autre d'entre eux il passerait un cône de rayons du système qui aurait plus de trois rayons communs avec un plan, ce qui est impossible. Le système de rayons est donc de troisième classe et il y a au plus trois de ses points singuliers situés dans un plan et au plus deux sur une droite.

Deux faisceaux homologues de plans de S et $S_1$ engendrent une surface réglée du second ordre; c'est ou une surface conique ou un système règlé contenu dans le système de rayons, selon que leurs axes se coupent (en un point singulier) ou ne se rencontrent pas. Deux surfaces du second ordre ainsi engendrées ont en commun le rayon du système, différent de $\overline{SS_1}$, qui coupe les deux couples d'axes des faisceaux de plans qui les engendrent; elles se coupent en outre suivant une courbe gauche du troisième ordre, passant par les points S et $S_1$, suivant les points de

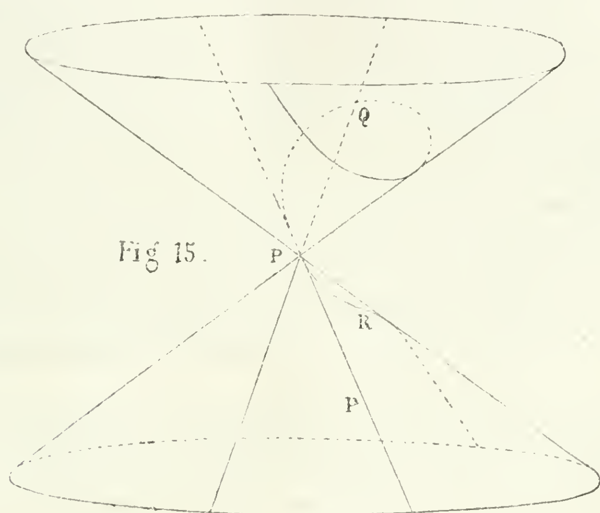


Fig 15.

laquelle les rayons du système se coupent deux à deux et qui est le lieu des points singuliers du système. Donc :

*Deux gerbes collinéaires non concentriques S, $S_1$, qui n'ont aucun élément correspondant commun, engendrent un faisceau de rayons de premier ordre et de troisième classe. Celui-ci contient toutes les cordes d'une courbe gauche du troisième ordre* $k^3$, *qui est le lieu de ses points singuliers et de chacun des points de laquelle il est projeté suivant une surface conique du second ordre* (fig. 15). *Cette courbe cubique gauche* $k^3$ *passe par les centres des deux gerbes et en chacun de ses points se coupent deux rayons homologues de S et $S_1$.*

Si l'on nous donne la courbe gauche $k^3$ et les points S et $S_1$ situés sur elle, nous connaissons par là même les deux cônes homologues suivant lesquels $k^3$ est projetée de S et $S_1$. Ces deux cônes sont projectivement rapportés l'un à l'autre par le moyen de la courbe gauche et sont per-

spectifs au faisceau de plans $\overline{SS_1}$ ; comme ils n'ont aucun élément correspondant commun, ils ne sont pas tangents, mais se coupent suivant le rayon $\overline{SS_1}$. Un plan quelconque rencontre les deux cônes suivant des courbes du second ordre qui se coupent en un point situé sur $\overline{SS_1}$ et qui par conséquent ont au moins un point et au plus trois points communs. Donc :

*La courbe cubique gauche* $k^3$ *a au moins un point et au plus trois points communs avec un plan quelconque.*

Les cônes projectifs $S$ $(k^3)$ et $S_1$ $(k^3)$ déterminent complètement la collinéation des gerbes S et $S_1$ (II, page 11) en sorte que la courbe gauche $k^3$ détermine aussi le système de rayons engendré par S et $S_1$. Toute corde ou toute tangente de $k^3$ est projetée de S et $S_1$ par des plans homologues sécants ou tangents de ces cônes et appartient au système de rayons. Tout rayon du système, qui est projeté de S et $S_1$ par deux plans extérieurs à ces cônes, peut toutefois être considéré aussi comme une corde (impropre) de la courbe gauche $k^3$ ; en effet, il coupe les deux faisceaux homologues de rayons de S et $S_1$ contenus dans ces plans suivant deux ponctuelles projectives dont les points correspondants communs sont situés sur $k^3$, mais qui sont ici imaginaires conjugués. D'après cela, nous pouvons dire que :

*Le système de rayons de premier ordre et de troisième classe se compose de toutes les cordes de la courbe gauche du troisième ordre* $k^3$, *qui contient les points singuliers du système. Un rayon du système est une corde propre ou impropre de* $k^3$, *suivant qu'il joint deux points réels ou imaginaires conjugués de la courbe. Les tangentes à* $k^3$ *appartiennent aussi au système ; elles y séparent les cordes propres des cordes impropres et ont chacune en commun avec la courbe deux points qui coïncident. Nous appellerons* $k^3$ *la courbe double du système de rayons.*

La courbe gauche $k^3$ peut être réunie à deux cordes quelconques $a$, $b$ par une suface réglée du second ordre qui contient un système de cordes ; car les couples de plans qui projettent les deux cordes de S et $S_1$ se coupent suivant les axes de deux faisceaux homologues de plans des gerbes collinéaires et ces faisceaux engendrent la surface. Comme cette surface du second ordre peut aussi être décrite par une droite qui glisse sur $k^3$ et coupe constamment les deux cordes $a$ et $b$, on a ce théorème :

*La courbe gauche du troisième ordre est projetée de deux quelconques de ses cordes suivant deux faisceaux projectifs de plans ;*

car les plans qui joignent les cordes $a$, $b$ avec la droite mobile et conséquemment avec un point mobile de $k^3$, décrivent autour de $a$ et $b$ deux faisceaux projectifs de plans. Le théorème a encore lieu quand $a$ et $b$ se coupent sur la courbe et par suite sont situées avec elle sur un même cône du second ordre. Nous allons l'utiliser immédiatement pour construire linéairement les plans osculateurs de la courbe $k^3$.

Soit $a$ la tangente à $k^3$ en un point A et soit $b$ une autre corde quelconque. Si un point P décrit la courbe gauche $k^3$, les plans $\overline{aP}$ et $\overline{bP}$ décrivent des faisceaux projectifs de plans autour de $a$ et $b$. Or $\overline{aP}$ devient le plan osculateur en A, quand P se rapproche indéfiniment de A ; en même temps $\overline{bP}$ devient le plan $\overline{bA}$.

Si donc la projectivité des faisceaux de plans $a$ et $b$ est déterminée par trois couples de plans homologues, nous trouverons le plan osculateur du point A en construisant le plan qui correspond à $\overline{bA}$ dans le faisceau $a$. — Si la corde $b$ passe par le point A, lorsque le point P tend vers A, la droite $\overline{AP}$ se raproche indéfiniment de la tangente $a$ et le plan $\overline{bP}$ du plan $\overline{ba}$ ; mais en même temps $\overline{aP}$ devient le plan tangent suivant le rayon $a$ au cône du second ordre engendré par les faisceaux $a$ et $b$. Donc :

*Le plan osculateur en un point quelconque A de la courbe passe par la tangente* a *en ce point et est tangent suivant* a *à la surface conique du second ordre par laquelle la courbe gauche* $k^3$ *est projetée de A.*

Pour mener une corde de la courbe par un point quelconque Q sans nous servir des gerbes collinéaires, joignons Q à un point quelconque P de $k^3$ par une droite $g$ et menons par $g$ deux plans qui coupent chacun la courbe en deux points différents de P. Les droites $a$ et $b$ qui unissent ces couples de points sont situées avec la courbe gauche sur une surface réglée du second ordre à laquelle appartient aussi la droite $g$ ; car $g$ a les trois points $g\,a$, $g\,b$ et P communs avec la surface. Cette surface réglée, qu'il est facile de construire et à laquelle appartiennent $a$ et $b$, a l'un de ses rayons qui passe par le point Q ; ce rayon est la corde cherchée. Cette construction réussit toujours, même quand la corde qui passe par Q est impropre. En passant, on voit que :

*Par une courbe gauche du troisième ordre et une droite* g, *qui coupe la courbe en un point, mais n'est pas une de ses cordes, on ne peut faire passer qu'une seule surface réglée du second ordre. L'un des systèmes réglés de cette surface se compose de cordes de la courbe ;*

*les rayons de l'autre système, dont* g *fait partie, coupent chacun la courbe gauche en un seul point.*

Pour justifier cette dernière proposition, nous ferons remarquer que tout rayon $g'$ du deuxième système peut être réuni à une corde propre quelconque du premier système par un plan qui a trois points communs avec la courbe gauche ; deux d'entre eux sont situés sur la corde et conséquemment le troisième se trouve sur $g'$.

D'un point quelconque $S_2$ de la courbe gauche $k^3$ projetons son système de cordes; à deux plans homologues $\alpha$ et $\alpha_1$, des gerbes collinéaires S et $S_1$ est rapporté un plan $\alpha_2$ de $S_2$ qui passe par leur droite d'intersection $\overline{\alpha\alpha_1}$. Et comme les cordes de $k^3$ qui engendrent deux faisceaux homologues de plans de S et $S_1$ sont situées sur un cône ou un système réglé passant par $S_2$, elles seront projetées de $S_2$ suivant un troisième faisceau de plans dont l'axe est également une génératrice de cône ou une directrice du système réglé. Donc, non seulement un plan de S a pour correspondant un plan de $S_2$, mais à tout faisceau de plans du premier ordre dans S correspond un faisceau analogue dans $S_2$ ; c'est-à-dire que les gerbes S et $S_2$ sont rapportées collinéairement l'une à l'autre comme S et $S_1$, de sorte qu'elles engendrent également le système des cordes de la courbe gauche $k^3$. Les centres S et $S_1$ des gerbes collinéaires dont on a fait primitivement usage peuvent donc être remplacés par deux autres points quelconques $S_2$, $S_3$ de la courbe gauche ; ils ne se distinguent en rien des autres points de $k^3$ et toutes les propriétés démontrées pour ces premiers points s'appliquent aussi aux autres points de la courbe. En particulier, on a ce théorème :

*La courbe gauche du troisième ordre est projetée de deux quelconques de ses points suivant deux cônes projectifs du second ordre et son système de cordes suivant deux gerbes collinéaires ; c'est-à-dire que chaque corde est projetée par deux plans homologues et chaque point de la courbe par deux rayons homologues des gerbes.*

Tout plan mené par S contient au moins une corde de la courbe gauche, c'est sa droite d'intersection avec le plan homologue de la gerbe $S_1$. Si le plan a trois points communs avec la courbe, les trois droites qui joignent ces points font partie du système des cordes ; si, en outre de S, le plan ne renferme qu'un seul point P de la courbe, il est tangent à celle-ci en S ou en P et ne contient que deux rayons du système de cordes qui sont $\overline{SP}$ et la tangente au point de contact. Or, comme S est un point quelconque de la courbe et que celle-ci a au moins un point

commun avec un plan quelconque, comme de plus tout point d'intersection de deux cordes est situé sur la courbe double, il s'ensuit que :

*Un plan renferme autant de cordes réelles que de points réels d'une courbe gauche du troisième ordre, c'est-à-dire au moins une corde et au plus trois.*

Une courbe gauche du troisième ordre peut aussi être engendrée au moyen de surfaces réglées comme le montre le théorème suivant :

*Deux surfaces réglées* R *et* $R_1$, *ou une surface réglée* R *et un cône* K *du second ordre, qui se coupent suivant un rayon* a, *ont encore en général une courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre qui leur est commune et dont* a *est une corde.*

Tout plan mené par $a$ coupe chacune des surfaces suivant un rayon différent de $a$. Faisons correspondre ces rayons l'un à l'autre, les deux systèmes réglés de R et $R_1$ auxquels $a$ n'appartient pas, ou le système réglé de R et le cône K, sont rapportés projectivement l'un à l'autre, puisqu'ils sont perspectifs au faisceau de plans $a$. Deux rayons correspondants des surfaces se coupent en un point de la courbe $k^3$ et tous ces points d'intersection sont projetés de l'un quelconque P d'entre eux suivant les rayons d'un cône du second ordre. En effet, les deux formes projectives de rayons R et $R_1$ ou R et K sont projetées du point P par deux faisceaux projectifs de plans du premier ordre qui engendrent le cône en question. La courbe $k^3$ est donc une courbe gauche du troisième ordre, quand l'un des cônes ou les deux cônes du second ordre menés par elle ne se décomposent pas en faiseaux de rayons du premier ordre, ce qui est possible. Dans ce cas particulier, la courbe gauche du troisième ordre peut se décomposer en une droite et une conique ou trois droites, ou bien se réduire à une ou à deux droites. — Comme un rayon quelconque $g$ du système réglé R n'a qu'un point commun avec la courbe gauche $k^3$ et ne lui est pas tangent, et comme par $g$ et $k^3$ on ne peut faire passer qu'une seule surface réglée du second ordre dont le deuxième système réglé doit se composer de cordes de la courbe, il s'ensuit que $a$ est l'une de ces cordes.

*Trois faisceaux projectifs de plans, dont les axes* a, $a_1$, $a_2$ *ne passent pas par un seul et même point, engendrent en général une courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre dont* a, $a_1$, $a_2$ *sont des cordes. En chaque point de* $k^3$ *se coupent trois plans homologues des faisceaux.*

En effet, le faisceau $a$ engendre avec chacun des deux autres faisceaux

un cône ou une surface réglée et les deux surfaces ainsi formées ont la droite $a$ correspondante commune. Le théorème est donc ramené au précédent. On peut regarder comme le réciproque d'un autre théorème démontré précédemment (II, page 100). Il nous permet de résoudre ce problème :

*Construire une courbe gauche du troisième ordre, connaissant trois de ses points P, Q, R et trois cordes* a, $a_1$, $a_2$ *qui ne passent par aucun de ces points et qui ne rencontrent pas les droites qui les joignent.*

Pour cela, nous rapporterons les trois faisceaux de plans $a$, $a_1$, $a_2$ projectivement entre eux de manière que trois plans homologues des faisceaux se coupent en chacun des points P, Q, R. Les faisceaux de plans engendrent alors la courbe cherchée. Si les cordes $a$, $a_1$, $a_2$ forment un triangle, la courbe gauche passe aussi par ses sommets, par conséquent elle passe par six points arbitraires.

*Lorsqu'un système réglé ou un cône du second ordre et un faisceau de plans du premier ordre sont rapportés projectivement l'un à l'autre ils engendrent en général une courbe gauche du troisième ordre, dont l'axe* a *du faisceau de plans est une corde.*

Soient $a_1$ et $a_2$ deux faisceaux de plans perspectifs à la forme de rayons, ils sont projectifs à $a$ et engendrent avec lui la courbe gauche. Il existe encore ici des cas d'exception.

On peut en général construire sur une surface réglée $R^2$ du second ordre deux courbes du troisième ordre qui passent par trois points A, B, C pris sur $R^2$ et qui aient pour corde une droite $a$ non située sur la surface. En effet, rapportons projectivement les deux systèmes réglés de la surface $R^2$ au faisceau de plans $a$ de manière que leurs rayons passant par A, B, C correspondant respectivement aux plans $\overline{aA}$, $\overline{aB}$ et $\overline{aC}$ ; ils engendrent avec le faisceau de plans les deux courbes gauches. Ces dernières passent par les points communs à $a$ et à $R^2$ ; donc :

*Sur une surface réglée du second ordre $R^2$, on peut construire au plus deux courbes gauches du troisième ordre qui passent par cinq points donnés sur $R^2$.*

Chacun des systèmes réglés de $R^2$ se compose de cordes, de l'une de ces courbes gauches et est perspectif à l'autre. Du dernier théorème on déduit d'après cela que :

*Deux courbes gauches du troisième ordre différentes l'une de l'autre, dont les cordes communes forment un système réglé, ont au plus quatre points communs.*

Quatre faisceaux projectifs de plans du premier ordre, situés d'une manière quelconque dans l'espace, engendrent, quand on les prend trois à trois, quatre courbes gauches du troisième ordre; deux quelconques de ces dernières sont situées sur une surface réglée, engendrée par deux des faisceaux projectifs de plans, elles ont un système de cordes communes et par suite au plus quatre points communs. Il résulte de là que :

*En général, il y a au plus quatre points où se coupent quatre plans homologues de quatre faisceaux de plans projectifs.*

On peut encore citer ici le théorème suivant :

*Par six points* $S$, $S_1$, $A$, $B$, $C$, $D$, *dont quatre ne sont pas situés dans un même plan, on ne peut faire passer qu'une seule courbe gauche du troisième ordre.*

En effet, les deux cônes du second ordre qui projettent la courbe des deux points $S$ et $S_1$, sont complètement déterminés par les rayons qui joignent chacun de ces points aux cinq autres. On peut construire très facilement la courbe en joignant trois des six points par des cordes et en procédant comme dans les problèmes précédents.

Deux courbes gauches du troisième ordre ne peuvent donc avoir plus de cinq points communs, sans coïncider.

On démontre d'une manière absolument analogue le théorème qui suit :

*Une courbe gauche du troisième ordre est complètement déterminée par cinq de ses points et la tangente en l'un d'eux, par quatre points et les tangentes en deux d'entre eux, ou par trois points et les tangentes en ces points.*

En effet, soient par exemple $A, B, C$ trois points de la courbe et $a, b, c$ les tangentes en ces points, le cône en second ordre qui projette la courbe du point $A$, doit passer par les trois rayons $a$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et être tangent suivant ces deux derniers aux plans $\overline{Ab}$ et $\overline{Ac}$. Il est donc complètement déterminé et il en est de même pour les cônes du second ordre qui projettent la courbe de $B$ ou de $C$.

*Une courbe gauche du troisième ordre est en général complètement déterminée, quand on donne deux de ses points et quatre de ses cordes, ou trois points et trois cordes, ou cinq points et une corde.*

En effet, dans le premier cas, la collinéation des deux gerbes qui projettent le système des cordes de la courbe gauche des deux points

donnés est en général complètement déterminée par les quatre couples de plans homologues qui se coupent suivant les quatre cordes données. Quand trois des quatre cordes forment un triangle, la courbe passe par ses sommets; c'est ce qui justifie le troisième cas. Le second cas a été traité précédemment.

Transportons tous les résultats obtenus jusqu'ici à la forme de rayons engendrés par deux systèmes collinéaires plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$, nous aurons l'énoncé qui suit :

*Deux systèmes collinéaires plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$, non situés dans le même plan et n'ayant aucun élément correspondant commun, engendrent un système de rayons de première classe et de troisième ordre et de plus un faisceau de plans du troisième ordre. Chaque rayon du système joint deux points homologues et chaque plan du faisceau du troisième ordre deux droites homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$. Nous dirons que chaque rayon du système est un* axe *du faisceau de plans du troisième ordre et que ce dernier est le* faisceau double *du système de rayons. En général, un plan quelconque ne contient qu'un seul axe du faisceau de plans du troisième ordre; c'est seulement quand le plan appartient au faisceau qu'il renferme une infinité d'axes; ceux-ci forment un faisceau de rayons du second ordre et sont les intersections du plan donné avec tous les autres plans du faisceau du troisième ordre. Chaque plan de ce faisceau contient un axe par lequel ne passe pas de second plan du faisceau; on le nomme le* rayon de contact *du plan et le point de cet axe, qui n'est situé sur aucun autre axe, est dit le* point de contact *du plan. Par chaque point de l'espace, il passe au plus trois plans réels et au moins un plan réel du faisceau, et le même nombre d'axes réels du faisceau. Le faisceau de plans du troisième ordre est coupé par deux quelconques de ses axes suivant des ponctuelles projectives, chaque plan du faisceau donnant deux points homologues des ponctuelles. Le système d'axes est coupé par deux plans quelconques de son faisceau double suivant deux systèmes plans collinéaires, chaque plan du faisceau double donnant deux rayons homologues et chaque rayon du système d'axes deux points homologues des systèmes collinéaires. Trois ponctuelles projectives, dont les lieux* $a_1, a_1, a_2$ *ne sont pas situés dans un même plan, engendrent en général un faisceau de plans du troisième ordre, dont* $a_1, a_1, a_2$ *sont trois axes; une ponctuelle rectiligne et un système réglé projectifs donnent les mêmes résultats. Par six plans, dont*

*quatre ne passent pas par un même point, on ne peut faire passer qu'un seul faisceau de plans du troisième ordre, etc.*

Nous pouvons distinguer plusieurs espèces de courbes gauches du troisième ordre, comme nous l'avons fait pour les coniques, en ayant égard au nombre et à la position de leurs points à l'infini. Nous pouvons appeler *asymptotes* les tangentes aux points à l'infini et *plans asymptotiques* les plans osculateurs en ces points. La courbe gauche du troisième ordre est projetée de chacun de ses points à l'infini suivant une surface cylindrique du second ordre. La courbe gauche est coupée par le plan à l'infini en trois points, ou elle n'a avec lui qu'un seul point commun, ou bien elle le coupe en un point et lui est tangente en un autre point, ou enfin le plan à l'infini est un plan osculateur en l'un de ses points. Nous avons d'après cela quatre espèces de courbes gauches du troisième ordre auxquelles *Seydewitz* a donné les noms suivants :

1° *L'hyperbole gauche.* Elle a trois points à l'infini dont les asymptotes et les plans asymptotiques sont à l'infini. Elle est l'intersection de trois cylindres hyperboliques dont les plans asymptotiques sont parallèles deux à deux.

2° *L'ellipse gauche* (fig. 15). Elle n'a qu'un point à l'infini avec une asymptote et un plan asymptotique à l'infini. Par cette courbe on ne peut faire passer qu'un seul cylindre qui est du genre elliptique.

3° *L'hyperbole parabolique* a deux points à l'infini ; l'une de ses asymptotes est à l'infini ; l'autre au contraire et les deux plans asymptotiques sont à distance finie. On peut, par l'hyperbole parabolique, faire passer un cylindre parabolique et un cylindre elliptique.

4° *La parabole gauche* n'a qu'un seul point à l'infini dont l'asymptote et le plan asymptotique sont à l'infini. On ne peut faire passer par elle qu'un seul cylindre, qui est du genre parabolique.

---

# TREIZIÈME LEÇON.

## Projectivité et polarité des courbes gauches et des faisceaux de plans du troisième ordre.

La plupart des théorèmes établis jusqu'ici pour les courbes gauches et les faisceaux de plans du troisième ordre peuvent s'énoncer bien plus simplement, si l'on étend la notion de projectivité à ces formes. A cet effet, nous poserons les définitions suivantes :

Quatre points d'une courbe gauche $k^3$ du troisième ordre sont appelés *points harmoniques*, s'ils sont projetés d'une corde quelconque, et par suite (II, page 100) de toutes les cordes de la courbe suivant quatre plans harmoniques et d'un point quelconque S de la courbe suivant quatre rayons harmoniques d'un cône du second ordre $Sk^3$.

Quatre plans d'un faisceau $K^3$ du troisième ordre sont appelés *plans harmoniques*, s'ils sont coupés par l'un quelconque, et par suite par tous les axes du faisceau suivant quatre points harmoniques, et par un plan quelconque $\sigma$ du faisceau suivant quatre rayons harmoniques d'un faisceau $\sigma K^3$ du second ordre.

Nous donnerons en outre aux courbes gauches et aux faisceaux de plans du troisième ordre le nom de *formes élémentaires du troisième ordre*.

Les définitions et théorèmes généraux énoncés antérieurement pour les formes élémentaires du premier et du second ordre (I, pages 129

et 151) trouvent immédiatement leur application ici; par exemple : *Deux courbes gauches du troisième ordre, projectives et situées l'une sur l'autre ont tous leurs points correspondants communs, ou bien elles en ont au plus deux.*

La courbe gauche du troisième ordre $k^3$ est projetée de chacune de ses cordes $a$ suivant un faisceau de plans du premier ordre perspectif à $k^3$ et de chacun de ses points S suivant un cône $Sk^3$ du second ordre qui lui est perspectif. Deux faisceaux de plans $a$ et $a_1$ perspectifs à $k^3$ engendrent un cône ou un système réglé perspectif à la courbe suivant que leurs axes se rencontrent ou ne se rencontrent pas.

Beaucoup des théorèmes qui précèdent peuvent maintenant être réunis ensemble ainsi qu'il suit :

*Tous les faisceaux de plans, cônes du second ordre et systèmes réglés perspectifs à une courbe gauche du troisième ordre, sont projectifs entre eux.*

*Toutes les ponctuelles, tous les faisceaux de rayons du second ordre et les systèmes réglés perspectifs à un faisceau de plans du troisième ordre, sont projectifs entre eux.*

Pour rapporter deux courbes gauches $k^3$ et $k_1^3$ du troisième ordre projectivement l'une à l'autre de telle sorte qu'aux points A,B,C de $k$ correspondent respectivement les points $A_1, B_1, C_1$ de $k_1^3$, nous rapporterons projectivement l'un à l'autre deux faisceaux de plans perspectifs l'un $u$ à $k^3$, l'autre $v_1$ à $k_1^3$, de manière que les plans $\overline{uA}$, $\overline{uB}$, $\overline{uC}$ du premier aient respectivement pour correspondants les plans $\overline{v_1A_1}, \overline{v_1B_1}, \overline{v_1C_1}$ du second. Les points de la courbe qui seront projetés par deux plans homologues des faisceaux se correspondront alors deux à deux. — Les courbes gauches projectives sont en même temps des formes homologues de deux systèmes collinéaires de l'espace. En effet, soient D,E,F trois nouveaux points de la courbe $k^3$ auxquels correspondent les points $D_1, E_1, F_1$ de $k_1^3$, nous pouvons rapporter collinéairement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$, de manière qu'aux cinq points A,B,C,D,E de $\Sigma$ correspondent respectivement les cinq points $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ de $\Sigma_1$. Au faisceau de plans $\overline{AB}$ (CDEF) correspond alors le faisceau $\overline{A_1B_1}$ $(C_1D_1E_1F_1)$ qui lui est projectif, par suite au plan $\overline{ABF}$ de $\Sigma$ correspond aussi le plan $\overline{A_1B_1F_1}$ de $\Sigma_1$; et l'on peut démontrer de même que tout autre plan de $\Sigma$ qui réunit le point F à un côté quelconque du pen-

tagone ABCDE a pour correspondant le plan de $\Sigma_1$ qui joint $F_1$ au côté correspondant du pentagone $A_1B_1C_1D_1E_1$. Comme d'après cela le point F de $\Sigma$ qui est l'intersection de trois de ces plans a pour correspondant le point $F_1$ de $\Sigma_1$ qui est l'intersection des trois plans homologues aux précédents, la courbe $k^3$ sur laquelle sont situés les six points A,B,C,D,E,F doit avoir pour correspondante la courbe $k_1^3$ qui réunit les six points homologues $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$; car par six points de l'espace on ne peut faire passer qu'une seule courbe gauche du troisième ordre.

Une courbe gauche involutive du troisième ordre est projetée de chacun de ses points suivant une surface conique involutive du second ordre et les rayons conjugués de cette dernière sont d'après cela situés deux à deux dans un même plan avec une droite $g$, qui passe par le sommet du cône, mais qui n'est pas située sur sa surface (I, page 147).

Les points conjugués de la courbe gauche sont donc situés deux à deux dans un même plan avec $g$, et les droites qui les joignent appartiennent à un système réglé de cordes dont $g$ est une directrice. Si la courbe involutive a deux points doubles, leurs tangentes appartiennent aussi à cette surface réglée; elles séparent sur la surface réglée les cordes propres des cordes impropres. Si nous avons égard aux théorèmes précédents, on déduit de là, en passant, que :

*Si l'on fait passer une surface réglée par une courbe gauche du troisième ordre, tout rayon de l'un des systèmes réglés de cette surface est une corde de la courbe, tandis que tout rayon du second système réglé ne coupe la courbe qu'en un seul point. Les points de la courbe sont accouplés involutivement par les rayons du premier système; chaque rayon de ce système est une corde propre ou bien deux d'entre eux sont tangents à la courbe et séparent les cordes propres des cordes impropres.*

Les théorèmes de Pascal et de Brianchon nous conduisent à d'autres propriétés importantes des courbes gauches et des faisceaux de plans du troisième ordre. Nous allons auparavant faire quelques remarques sur les courbes gauches du troisième ordre déterminées par deux points $S, S_1$ et quatre cordes quelconques $a, b, a_1, b_1$ (voir II, page 105).

Nous établirons entre les quatre cordes un certain ordre de succession de manière qu'elles soient projetées dans la gerbe à partir de $S, S_1$ et d'un point quelconque $S_2$ de la courbe suivant un angle quadrarête et que chaque couple de cordes $a, a_1$, et $b, b_1$ donne un couple de faces opposées de cet angle quadrarête. Dans chacun de ces angles nous joi-

gnons par un plan les deux rayons suivant lesquels se coupent les deux faces opposées et nous obtenons ainsi dans les gerbes $S, S_1$ et $S_2$ les plans $\sigma, \sigma_1$ et $\sigma_2$. Ce sont des plans homologues des gerbes et, par conséquent, ils se coupent suivant une seule et même corde $s$. Si le point $S_2$ se meut sur la courbe gauche, le plan $\sigma_2$ tourne autour de la corde $s$. Cette propriété sert de base à *une construction extrêmement simple de la courbe gauche du troisième ordre.*

*Soit une courbe gauche du troisième ordre donnée par deux points* $S, S_1$ *et deux couples de cordes* $a, a_1$ *et* $b, b_1$. *Nous menons par* S *un premier rayon qui rencontre* a *et* $a_1$ *et un second rayon qui coupe* b *et* $b_1$ *et nous joignons ces deux rayons par un plan* $\sigma$. *Nous menons de même par* $S_1$ *un plan* $\sigma_1$, *passant par deux rayons issus de* $S_1$ *et rencontrant : le premier* $a, a_1$ *et le second* $b, b_1$, *et nous déterminons la droite d'intersection* s *des plans* $\sigma$ *et* $\sigma_1$. *Tout plan* $\sigma_2$ *conduit par* s *coupe les cordes* $a, a_1$ *et* $b, b_1$ *en deux couples de points* $A, A_1$ *et* $B, B_1$; *les droites* $\overline{AA}_1$ *et* $\overline{BB}_1$ *qui joignent ces points se coupent en un point* $S_2$ *de la courbe gauche du troisième ordre.*

On reconnaît l'exactitude de cette construction en remarquant que la corde $s$ et la courbe gauche cherchée du troisième ordre sont l'intersection des deux surfaces réglées qui joignent $s$ avec $a, a_1$ et $b, b_1$.

Soit maintenant un hexagone inscrit dans la courbe gauche $k^3$ du troisième ordre; il est projeté d'un point quelconque S de la courbe suivant un angle sexarête inscrit dans le cône $Sk^3$ du second ordre. En ayant égard à ce qui précède, on déduit ainsi du théorème de Pascal que :

*Tout hexagone inscrit dans une courbe gauche du troisième ordre est projeté d'un point quelconque* S *de la courbe suivant un angle sexarête, dont les trois couples de faces opposées se coupent suivant trois droites menées dans un même plan* $\sigma$. *Lorsque* S *se meut sur la courbe, le plan* $\sigma$ *tourne autour d'une corde fixe* s.

Cette corde $s$ est complètement déterminée déjà par deux couples de côtés opposés $a, a_1$ et $b, b_1$ de l'hexagone; les deux surfaces réglées qui unissent respectivement la courbe gauche aux couples de cordes $a, a_1$ et $b, b_1$ se coupent suivant la corde $s$.

Parmi les autres théorèmes qui découlent du théorème de Pascal, nous ne ferons usage que de celui relatif au triangle inscrit (I, page 85) pour en déduire le théorème suivant sur les courbes gauches du troisième ordre :

*Soit* SABC *un tétraèdre inscrit à la courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre et soient* $S_1, A_1, B_1, C_1$ *les points où les tangentes en* S,A,B,C *coupent respectivement les faces opposées ; les points* $S_1, A_1, B_1, C_1$ *déterminent un second tétraèdre qui est en même temps inscrit et circonscrit au premier. Le plan* $\overline{A_1B_1C_1}$, *par exemple, passe par* S ; *il tourne autour d'une corde impropre* s, *quand* S *se meut sur la courbe* $k^3$ *sans que les points* $A_1B_1C_1$ *changent de position.*

En effet, le triangle ABC est projeté de S suivant un angle triarête inscrit à la surface conique $Sk^3$ du second ordre et les tangentes aux points A,B,C sont elles-mêmes projetées suivant les plans tangents le long des trois arêtes $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ du cône. Les trois rayons $\overline{SA_1}$, $\overline{SB_1}$, $\overline{SC_1}$ suivant lesquels les faces de cet angle trièdre sont coupées par les plans tangents aux arêtes opposées doivent donc se trouver dans un même plan $\overline{A_1B_1C_1}$. Remplaçons S par un autre point $S_1$ de la courbe ; au lieu de $\overline{A_1B_1C_1}$ nous avons un autre plan $\overline{A'_1B'_1C'_1}$ ; ces deux plans se coupent suivant une corde *s*, puisqu'ils se correspondent dans les gerbes collinéaires qui projettent la courbe gauche du troisième ordre et son système de sécantes des points S et $S_1$. La corde *s* est impropre ; en effet, le plan $\overline{SA_1B_1C_1}$ n'a aucun rayon réel commun avec le cône $Sk^3$ puisqu'il est séparé harmoniquement de chaque face de l'angle triarête S (ABC) par le rayon polaire de la face et les plans tangents des arêtes opposées.

On peut faire une application très importante de ces théorèmes aux plans osculateurs d'une courbe gauche du troisième ordre.

Désignons par *a,b,c* les tangentes $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ aux points A,B,C et par P le point où la corde *s* est rencontrée par le plan $\overline{ABC}$.[1] Comme on vient de le démontrer, la droite d'intersection des plans $\overline{SBC}$ et $\overline{Sa}$ doit être dans un même plan avec la corde *s*, quelle que soit la position du point S sur la courbe. Le point S s'approchant indéfiniment de A, le plan $\overline{Sa}$ devient le plan osculateur du point A, $\overline{SBC}$ devient le plan $\overline{ABC}$ et la droite d'intersection de ces deux plans doit coïncider avec $\overline{AP}$ puisqu'elle doit couper constamment la droite *s*. On voit de même que les plans osculateurs des points B et C doivent passer par le point P ; donc :

*Les plans osculateurs de trois points quelconques* A,B,C *d'une*

1. La corde *s* ne peut être contenue dans le plan $\overline{ABC}$, parce que ce dernier ne peut renfermer au plus que trois cordes ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$).

*courbe gauche du troisième ordre se coupent en un point* P *situé dans le plan des points* A,B,C; *il passe par ce même point une sécante impropre de la courbe.*

On déduit immédiatement de là que :

*La courbe gauche du troisième ordre est de troisième classe, c'est-à-dire que, par aucun point* P *de l'espace, il ne passe plus de trois de ses plans osculateurs et, par aucune droite, plus de deux de ces plans.*

Car si les plans osculateurs de quatre points A,B,C,D passaient par P, les points C,D devraient aussi être situés dans le plan $\overline{ABP}$; ce qui est impossible, puisque le plan ne peut avoir plus de trois points communs avec la courbe gauche du troisième ordre.

Une deuxième conséquence immédiate du théorème précédent constitue la première partie de la double proposition qui suit :

Quatre points d'une courbe gauche du troisième ordre constituent un tétraèdre, et leurs quatre plans osculateurs un autre tétraèdre; chacun d'eux est à la fois inscrit et circonscrit à l'autre.

Quatre plans d'un faisceau de plans du troisième ordre constituent un tétraèdre et leurs quatre points de contact un autre tétraèdre; chacun de ces tétraèdres est à la fois inscrit et circonscrit à l'autre.

On peut, au moyen de ce théorème, construire le plan osculateur en chaque point d'une courbe gauche du troisième ordre, du moment qu'on connaît les plans osculateurs de trois points. On voit de plus que la situation relative de quatre points d'une courbe gauche du troisième ordre et de leurs quatre plans osculateurs est la même que celle de quatre points de contact d'un faisceau de plans du troisième ordre et de leurs quatre plans correspondants. Cette remarque nous conduit à la propriété fondamentale suivante des courbes gauches et faisceaux de plans du troisième ordre :

*Tous les plans osculateurs d'une courbe gauche du troisième ordre* $k^3$ *forment un faisceau de plans du troisième ordre.*

*Tous les points de contact d'un faisceau de plans du troisième ordre forment une courbe gauche du troisième ordre.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les plans osculateurs des points A,B,C de la courbe et P

eur point d'intersection situé dans $\overline{ABC}$. Lorsque le point C parcourt la courbe gauche $k^3$, le plan $\overline{ABC}$ décrit un faisceau de plans $\overline{AB}$ perspectif à $k^3$; en même temps, il coupe dans chacune de ses positions la droite $\overline{\alpha\beta}$ en un point P, par lequel doit passer le plan osculateur $\gamma$ du point C. Le faisceau de plans $\overline{AB}$, décrit par $\overline{ABC}$, est donc aussi perspectif à la ponctuelle $\overline{\alpha\beta}$ que le point $\alpha\beta\gamma$ ou P décrit dans le mouvement simultané du plan osculateur $\gamma$. Remplaçons A et B par deux autres points fixes quelconques $A_1$ et $B_1$ de la courbe et remarquons que les deux faisceaux de plans $\overline{AB}$ et $\overline{A_1B_1}$, qui sont tous deux perspectifs à la courbe $k^3$, sont projectifs entre eux; nous voyons alors que :

*Les plans osculateurs d'une courbe gauche du troisième ordre rapportent projectivement entre elles toutes les ponctuelles suivant les lieux desquelles se coupent deux quelconques de ces plans osculateurs* ($\alpha,\beta$ *ou* $\alpha_1,\beta_1$).

Choisissons trois quelconques de ces ponctuelles projectives, qui ne soient pas situées dans un même plan; elles engendrent tous les plans osculateurs, trois points homologues déterminant chacun de ces plans. D'autre part, nous savons déjà que les trois ponctuelles engendrent un faisceau de plans du troisième ordre (II. page 106); il est donc démontré que les plans osculateurs d'une courbe gauche du troisième ordre constituent un faisceau de plans du troisième ordre.

Ce théorème et un grand nombre des précédents font entrevoir une analogie remarquable entre les courbes gauches du troisième ordre et les coniques. Cette analogie ressort encore mieux de ce fait que toute courbe gauche du troisième ordre détermine un système focal, de même que toute conique détermine un système polaire plan. Ainsi :

*Une courbe gauche du troisième ordre* $k^3$ *et le faisceau des plans qui l'osculent peuvent être regardés comme deux formes conjuguées d'un système focal, dans lequel chaque point est conjugué à son plan osculateur et chaque tangente conjuguée à elle-même. La courbe gauche* $k^3$ *a reçu le nom de* courbe double *du système focal qu'elle détermine.*

Si ce théorème est exact, la proposition précédente se trouvera démontrée une seconde fois par son moyen. En effet, dans deux espaces réciproques, toute courbe gauche du troisième ordre a pour forme correspondante un faisceau de plans du troisième ordre; et par conséquent, dans le système focal, la courbe gauche du troisième ordre a pour conjugué un faisceau de plans du troisième ordre.

On peut prouver comme il suit l'existence du système focal dont il vient d'être question. Soient A,B,C,D,E,F six points quelconques de la courbe gauche $k^3$ et $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\varphi$ leurs plans osculateurs respectifs. Nous pouvons rapporter réciproquement l'un à l'autre deux systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ de l'espace de telle manière qu'aux cinq points A,B,C,D,E de $\Sigma$ correspondent respectivement les cinq plans $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$. La ponctuelle $\overline{\alpha\beta}$ de $\Sigma_1$ correspond alors au faisceau de plans $\overline{AB}$ de $\Sigma$ et en est une section, parce que trois points de $\overline{\alpha\beta}$, à savoir $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$ et $\alpha\beta\varepsilon$ sont situés dans les plans $\overline{ABC}$, $\overline{ABD}$, $\overline{ABE}$ du faisceau $\overline{AB}$ qui leur correspondent (II, page 115). Pour la même raison, tout autre point de $\Sigma_1$, commun à deux des plans $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ est situé dans le plan qui lui correspond dans $\Sigma$. Deux systèmes réciproques de l'espace, $\Sigma$ et $\Sigma_1$, forment un système focal tel que tout point de $\Sigma_1$ soit situé sur le plan correspondant de $\Sigma$, ou bien tous les points de $\Sigma_1$, pour lesquels ceci a lieu, sont situés sur une surface du second ordre. Dans le cas actuel, cette dernière hypothèse ne peut se réaliser, parce que la surface du second ordre devrait avoir quatre droites communes avec chacun des cinq plans $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$, par exemple, elle aurait avec $\alpha$ les droites $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\alpha\delta}$, $\overline{\alpha\varepsilon}$ communes, ce qui est impossible. En conséquence, les systèmes réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ constituent un système focal et tout point quelconque F de la courbe gauche $k^3$ a pour conjugué un plan $\varphi^1$ qui passe par lui. Comme F est situé dans le plan $\overline{ABF}$, $\varphi^1$ doit passer par le pôle de ce plan, c'est-à-dire par le point d'intersection de la droite $\overline{\alpha\beta}$ avec le plan $\overline{ABF}$; mais le plan osculateur $\varphi$ du point F passe par ce même point et de même les droites $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\alpha\delta}$, $\overline{\alpha\varepsilon}$, etc., doivent avoir avec $\varphi^1$ les mêmes points communs qu'avec $\varphi$; donc $\varphi^1$ doit coïncider avec $\varphi$. Tout point F de la courbe a donc pour conjugué son plan osculateur $\varphi$ et, comme la tangente en F est située dans $\varphi$, elle est conjuguée à elle-même et est une directrice du système focal.

Deux gerbes collinéaires S et $S_1$, qui engendrent la courbe gauche $k^3$ et son système de sécantes, ont pour conjugués dans le système focal deux systèmes collinéaires plans $\sigma$ et $\sigma_1$ qui engendrent le faisceau de plans du troisième ordre, qui oscule $k^3$, et tous ses axes. Toute corde de la courbe a donc pour conjugué un axe du faisceau de plans et à toute sécante impropre correspond un axe impropre. Comme le point d'intersection de trois plans osculateurs réels de la courbe gauche est toujours situé sur une sécante impropre (II, page 115), on voit que :

*Un plan quelconque contient un axe propre ou un axe impropre*

*du faisceau de plans, suivant qu'il coupe la courbe gauche du troisième ordre en un seul point réel ou en trois points réels.*

Chaque tangente fait partie du système de cordes de la courbe et par suite aussi du système d'axes du faisceau de plans du troisième ordre, puisqu'elle est conjuguée à elle-même. En passant, on déduit de là que :

*Toutes les tangentes d'une courbe gauche du troisième ordre sont projetées d'un point quelconque* S *de la courbe suivant un faisceau de plans du second ordre et sont coupées par un plan osculateur quelconque* $\sigma$ *suivant une ponctuelle du second ordre.*

La première partie de ce théorème a été démontrée précédemment (II, page 102) ; la seconde partie en est la conséquence. Comme la parabole cubique a un plan osculateur à l'infini, on voit en particulier que :

*Les tangentes et les plans osculateurs d'une parabole gauche sont parallèles aux rayons et aux plans tangents d'un cône du second ordre.*

La courbe gauche du troisième ordre et le faisceau de plans du troisième ordre qui l'oscule, étant des formes conjuguées l'une à l'autre dans le système focal, sont aussi projectifs. Une troisième forme quelconque perspective à l'une d'elles doit donc être projective à l'autre.

Une courbe gauche du troisième ordre est déterminée, quand on connaît trois de ses points $S, S_1, A$ et les tangentes et les plans osculateurs en deux d'entre eux. Car la courbe est projetée de chacun de ces deux points suivant un cône du second ordre dont on peut immédiatement trouver trois rayons et les plans tangents le long de deux d'entre eux ; ces cônes sont donc connus et se coupent suivant la courbe gauche. Le théorème réciproque est le suivant :

*Un faisceau de plans du troisième ordre est déterminé par trois de ses plans et les rayons et points de contact de deux d'entre eux.*

On énonce généralement ce théorème ainsi qu'il suit :

*Une courbe gauche du troisième ordre est déterminée par deux de ses points, leurs tangentes et leurs plans osculateurs et par un troisième plan osculateur.*

Nous allons énoncer sous une forme analogue les réciproques de quelques-uns des théorèmes démontrés précédemment. Nous les réunissons ensemble ainsi qu'il suit :

*Une courbe gauche du troisième ordre est déterminée en général quand on donne :*

1° *Six plans osculateurs ;* 2° *cinq plans osculateurs et la tangente de l'un d'eux;* 3° *quatre plans osculateurs et les tangentes de deux d'entre eux;* 4° *trois plans osculateurs et leurs tangentes ;* 5° *deux plans osculateurs et quatre axes* (II, page 106); 6° *trois plans osculateurs et trois axes ;* 7° *cinq plans osculateurs et un axe*, etc.

On peut, dans chacun des cas énoncés, construire facilement la courbe gauche ou plutôt le faisceau de plans du troisième ordre qui l'oscule. Soient donnés, par exemple, dans le cinquième cas, les plans osculateurs $\Sigma$ et $\Sigma_1$ et les quatre axes $a, b, c, d$ ; nous rapportons les deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ collinéairement l'un à l'autre de manière que chacun des axes $a, b, c, d$ contienne deux points homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$. Les deux systèmes collinéaires engendrent alors le faisceau de plans du troisième ordre et son système d'axes. Les cas d'exception, où la construction est impossible ou bien où la courbe se décompose, se reconnaissent d'eux-mêmes.

---

# QUATORZIÈME LEÇON.

## Points conjugués par rapport à une courbe gauche du troisième ordre.

Nous ne pouvons pas abandonner la théorie des courbes gauches du troisième ordre, sans faire connaître une propriété essentielle dont elles jouissent et dont nous ferons un très fréquent usage dans la suite. Nous avons démontré qu'il existe une infinité de surfaces réglées et de cônes du second ordre qui se coupent suivant la courbe gauche du troisième ordre; nous savons en effet que la courbe peut être réunie à deux quelconques de ses cordes au moyen d'une pareille surface réglée du second ordre. Nous ajoutons maintenant que :

*Les plans polaires d'un point quelconque A, par rapport à toutes les surfaces du second ordre menées par la courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre, se coupent en un même point* $A_1$ *situé sur la corde de la courbe qui passe par le point A.*

Si A est un point de la courbe, sa tangente $a$ touche la courbe $k^3$ et par suite aussi toutes les surfaces du second ordre menées par $k^3$. Dans ce cas, tous les plans polaires du point A passent donc par la tangente $a$ et un point quelconque $A_1$ de cette dernière peut être regardé comme le point d'intersection de ces plans polaires. Si A n'est pas situé sur $k^3$, il passe par A une seule sécante $s$ de la courbe. Supposons d'abord que ce soit une sécante propre, qui ait deux points M et N communs avec la courbe; le point $A_1$ de $s$, qui est harmoniquement séparé de A par M et N, doit se trouver dans tous ces plans polaires. La corde $s$ peut aussi être tangente à la courbe $k^3$ en un point S; elle est alors tangente

en S à toutes les surfaces du second ordre menées par $k^3$ et tous les plans polaires de A se coupent au point S, qui dans ce cas est identique avec $A_1$. Nous n'avons donc plus à démontrer le théorème que pour le cas où la corde *s* est impropre.

Soient $F^2$ et $F_1^2$ deux surfaces du second ordre menées par $k^3$ et supposons que $F^2$ soit un cône. Nous joignons le point A au sommet de ce cône par une droite *g* et nous cherchons les plans polaires de tous les points de *g* par rapport à $F^2$ et $F_1^2$. Nous obtenons alors un seul plan polaire $\gamma$ par rapport à la surface $F^2$ et un faisceau $g_1$ de plans polaires par rapport à $F_1^2$ ; ce dernier est projectif à la ponctuelle *g*.

Toutes les cordes, qu'on peut mener des points de la droite *g* à la courbe gauche du troisième ordre, forment un système réglé perspectif à *g*, qui sera coupé par le plan $\gamma$ suivant une ponctuelle du premier ou du second ordre projective à *g* et conséquemment à $g_1$. Nous savons déjà que toute corde *propre* du système réglé a avec $\gamma$ un point commun, situé sur le plan qui lui correspond dans $g_1$ ; cette ponctuelle doit donc être perspective au faisceau de plans $g_1$, parce qu'une infinité de ses points sont situés dans les plans qui leur correspondent. Les plans polaires de A par rapport à toutes les surfaces du second ordre $F_1^2$, menées par $k^3$, passent donc par le point $A_1$, où la corde $\overline{AA_1}$ ou *s* est coupée par le plan *g*.

Le système de cordes perspectif à *g* est en général coupé par le plan $\gamma$ suivant une courbe du second ordre qui passe par le centre de la surface conique $F^2$. C'est seulement dans le cas où *g* est situé dans le plan osculateur de ce centre, et où par suite la tangente en ce point appartient au système de cordes, que cette courbe du second ordre se décompose en deux droites, qui sont cette tangente et une directrice $g'$ du système de cordes ; en effet, $\gamma$ étant le plan polaire de *g* par rapport au cône $F^2$, $\gamma$ doit contenir les rayons de contact des deux plans tangents menés par *g* à $F^2$ et l'un de ces rayons est la tangente de la courbe gauche du troisième ordre.

Pour abréger, nous dirons que deux points sont *conjugués* par rapport à la courbe gauche $k^3$ du troisième ordre, quand ils sont, comme A et $A_1$, conjugués par rapport à toutes urface du second ordre passant par $k^3$. Nous dirons de même que deux plans sont conjugués par rapport à un faisceau de plans du troisième ordre, quand ils sont conjugués par rapport à toute surface réglée ou autre du second ordre inscrite dans le faisceau de plans. Il résulte alors de notre démonstration que :

Toute droite, qui joint deux points A et $A_1$ conjugués par rapport à une courbe gauche $k^3$ du troisième ordre, est une corde de $k^3$. Si la corde $\overline{AA_1}$ coupe la courbe en deux points réels M et N, les points A et $A_1$ sont harmoniquement séparés par ces points M et N. Si $\overline{AA_1}$ est tangente à la courbe, l'un des points A et $A_1$ coïncide avec le point de contact. Un point de la courbe gauche est conjugué à chacun des points de sa tangente et par suite aussi il est conjugué à lui-même. Les points d'une corde sont accouplés involutivement, quand on fait correspondre deux à deux les points conjugués situés sur cette corde.

La droite d'intersection de deux plans $\alpha$ et $\alpha_1$, conjugués par rapport à un faisceau de plans du troisième ordre, est un axe du faisceau. S'il passe par $\overline{\alpha\alpha_1}$ deux plans réels $\mu$ et $\nu$ du faisceau de plans, les plans $\alpha$ et $\alpha_1$ sont harmoniquement séparés par $\mu$ et $\nu$. Si $\overline{\alpha\alpha_1}$ est un rayon de contact du faisceau, l'un des plans $\alpha$ et $\alpha_1$ coïncide avec le plan du faisceau qui passe par $\overline{\alpha\alpha_1}$. Un plan du faisceau est conjugué à tout plan qui passe par son rayon de contact, et par suite aussi il est conjugué à lui-même. Les plans passant par un axe sont accouplés involutivement, quand on fait correspondre deux à deux les plans conjugués qui passent par cet axe.

*Si une droite* g *coupe la courbe gauche du troisième ordre en un seul point* P, *tous les points qui sont conjugués aux points de* g *sont en général situés sur une courbe du second ordre passant par* P, *et le point* P *lui-même a pour conjugués tous les points de sa tangente* p. *Il résulte de là que les polaires de la droite* g, *par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui contiennent la courbe gauche, doivent couper la courbe du second ordre et aussi la tangente* p; *ces polaires forment donc un système de rayons de premier ordre et de seconde classe.*

*Si la droite* g *est située dans le plan osculateur du point* P, *ses points sont conjugués à ceux d'une autre droite* g′ *qui coupe la courbe gauche en un point* P′. *La droite* g′ *est située dans le plan osculateur de* P′ *et coupe la tangente du point* P ; *de même,* g *coupe aussi la tangente de* P′. *Les polaires de* g *par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par la courbe gauche forment un système de rayons de premier ordre et de première classe, dont les axes sont* g′ *et la tangente du point* P.

Les points milieux de toutes les cordes d'une courbe gauche du troisième ordre, qui sont parallèles à un plan asymptotique, sont situés sur une droite qui coupe la courbe gauche; en effet, ils sont conjugués aux points à l'infini du plan asymptotique.

Soit $l$ une droite absolument quelconque et soient $l_1, l_2, l_3$ ses polaires par rapport à trois surfaces du second ordre menées par la courbe gauche. Les polaires de tous les points de $l$ forment alors trois faisceaux de plans $l_1, l_2, l_3$, projectifs à la ponctuelle $l$ et par suite projectifs entre eux, et qui par conséquent engendrent en général une courbe gauche du troisième ordre. Les droites $l_1, l_2, l_3$, sont des cordes de cette nouvelle courbe gauche du troisième ordre et chacun de ses points est conjugué à un point de $l$. Donc :

*Les points conjugués des points d'une droite quelconque* l, *par rapport à une courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre, sont en général situés sur une deuxième courbe gauche du troisième ordre, et toutes les polaires de* l, *par rapport aux surfaces du second ordre qui passent par* $k^3$, *appartiennent au système de cordes de cette seconde courbe.*

C'est seulement quand $l$ est une corde de la courbe gauche $k^3$, ou quand elle a avec $k^3$ un point commun, que ce théorème comporte des cas d'exception traités dans les propositions qui précèdent.

Si l'on considère la courbe gauche $k^3$ comme une courbe double d'un système focal, si par suite elle est conjuguée au faisceau de plans $K^3$ du troisième ordre qui l'oscule, les points qui sont conjugués deux à deux par rapport à la courbe $k^3$ ont pour conjugués dans le faisceau $K^3$ deux plans conjugués l'un à l'autre. On peut, d'après cela, trouver facilement les théorèmes réciproques de ceux qui précèdent. Nous ne mentionnons que la proposition qui suit :

*Étant donnée une droite* g, *qui coupe la courbe gauche* $k^3$ *en un point P et qui est située dans le plan osculateur de ce point, on peut construire une droite* g', *qui soit également coupée par* $k^3$ *en un point* P', *qui soit située dans le plan osculateur de* P' *et qui soit telle que non seulement chaque point de* g *ait pour conjugué par rapport à* $k^3$ *un point de* g', *mais que tout plan passant par* g' *soit conjugué par rapport à* $K^3$ *à un plan passant par* g.

La première partie de cette proposition a été démontrée précédemment; la deuxième s'en déduit si l'on remarque que $g$ et $g'$ sont conjuguées à elles-mêmes dans le système focal.

Les points d'un plan $\gamma$ ont pour conjugués par rapport à la courbe

gauche $k^3$ les points d'une surface courbe $F^3$. Cette surface a en commun avec une droite $l$ qui n'est pas située entièrement sur elle, trois points au plus ; elle est donc du troisième ordre. En effet, les points de $l$ ont pour conjugués ceux d'une courbe gauche du troisième ordre, qui a au plus trois points communs avec le plan $\gamma$ et qui ne se décompose en une droite et en une conique que dans des cas particuliers. La surface $F^3$ passe par la courbe gauche $k^3$, parce que $\gamma$ contient un point de chacune des tangentes de cette courbe ; elle passe en outre par toutes les courbes gauches du troisième ordre conjuguées aux droites du plan $\gamma$. Soit A un point commun à $\gamma$ et à la courbe $k^3$, $F^3$ passe par la tangente de A ; toute droite de $\gamma$, passant par A, a pour conjuguée une courbe du second ordre située sur la surface $F^3$ ; cette dernière peut donc aussi être décrite par une courbe variable du second ordre. Le plan osculateur du point A est coupé par $\gamma$ suivant une droite qui a pour conjuguée une droite située sur $F^3$. Cette surface passe aussi par toute corde de la courbe $k^3$ qui est contenue dans $\gamma$.

Si, par exemple, un plan $\gamma$ a les trois points A, B, C communs avec la courbe gauche $k^3$, il coupe la surface $F^3$ suivant les trois cordes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$ ; $F^3$ doit aussi contenir les tangentes des points A, B, C. Si l'on désigne par P le point de $\gamma$ où se coupent les plans osculateurs des trois points A, B, C, la surface du troisième ordre $F^3$ passe par les trois droites dont les points sont conjugués à ceux de $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ et $\overline{PC}$. Ces trois droites doivent se couper au point conjugué à P et être situées dans le plan conjugué à $\gamma$. Si le plan $\gamma$ est osculateur à la courbe gauche $k^3$ en un point A, la surface $F^3$ est réglée et peut être décrite par une droite. Si $\gamma$ passe à l'infini, on a ce théorème : *Les points milieux de toutes les cordes d'une courbe gauche du troisième ordre sont situés sur une surface du troisième ordre.*

Nous allons terminer cette leçon en démontrant ce théorème important :

*Une courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre peut être réunie à une corde quelconque* s *par une infinité de surfaces réglées du second ordre ; par tout point* P *extérieur à* $k^3$ *et* s *il ne passe qu'une seule de ces surfaces dont l'ensemble peut s'appeler un* faisceau de surfaces. *Les plans polaires d'un point quelconque* A, *par rapport à toutes les surfaces du faisceau, se coupent suivant une même droite.*

Par le point P passe une corde $p$ de la courbe $k^3$, et $p$ détermine avec la corde $s$ une surface réglée ou un cône du second ordre (II,

page 100) passant par $k^3$, qui fait partie du faisceau de surfaces et contient le point P.

Pour démontrer la dernière partie du théorème, nous distinguerons trois cas. Nous supposerons d'abord A situé sur la courbe gauche $k^3$; les plans polaires de ce point par rapport à toutes les surfaces du second ordre menées par $k^3$ se coupent alors suivant la tangente de A. Si de plus le point A est situé sur la corde $s$ par laquelle passent toutes les surfaces du faisceau, ses plans polaires sont tangents en A aux surfaces correspondantes des faisceaux et par conséquent doivent tous passer par $s$. Si enfin le point A n'est situé, ni sur la courbe $k^3$, ni sur la corde $s$, tous ses plans polaires doivent d'abord passer par le point $A_1$ qui lui est conjugué. Nous pouvons immédiatement construire un deuxième point $A_2$ commun aux plans polaires de A dans le plan $\overline{As}$, pourvu que ce plan ne passe pas par la corde $\overline{AA_1}$, et qu'il ne soit pas tangent à la courbe gauche $k^3$ en un point de $s$ et ne la coupe pas en un autre point. En effet, le plan $\overline{As}$ coupe alors la courbe en un point M, extérieur aux cordes $\overline{AA_1}$ et $s$, et $A_2$ est le point de la droite $\overline{AM}$ qui est harmoniquement séparé de A par M et $s$, et qui par suite est conjugué au point A par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

Les plans polaires de A doivent donc passer par la droite $\overline{A_1A_2}$ et le théorème est démontré pour tout point A, dont la corde $\overline{AA_1}$ ne rencontre pas $s$ en un point de la courbe et n'est pas contenue dans un plan tangent à la courbe $k^3$ mené par $s$.

Suivant que $s$ sera une sécante impropre ou propre, nous n'aurons donc plus de démonstration à donner pour aucun point, ou bien nous devrons prouver le théorème pour les points situés sur les deux cônes du faisceau ou sur les deux plans tangents à $k^3$ menés par $s$.

Supposons maintenant A situé sur l'une de ces deux surfaces ou de ces plans tangents; soit $g$ une droite quelconque passant par A et soient de plus $F_1, F_2, F_3$ trois surfaces quelconques du faisceau. Les plans polaires de tous les points de $g$ par rapport aux surfaces $F_1, F_2, F_3$ forment trois faisceaux de plans $g_1, g_2, g_3$ projectifs à la ponctuelle $g$ et conséquemment projectifs entre eux. Il y a une infinité de points de la droite $g$ pour lesquels on a démontré le théorème, à savoir que leurs plans polaires par rapport au faisceau se coupent suivant une seule et même droite; donc les faisceaux de plans $g_1, g_2$ et $g_3$ doivent engendrer une seule et même forme de rayons du premier ou du second ordre; c'est en général un système réglé, auquel les faisceaux de plans sont

perspectifs; il s'ensuit que les plans polaires du point A doivent se couper suivant une seule et même droite. On voit en même temps que :

*Si un point se meut sur une droite* g, *la droite suivant laquelle se coupent ses plans polaires par rapport aux surfaces du faisceau décrit en général un système réglé; les polaires de la droite* g *sont les directrices de ce système réglé*.

Le faisceau de surfaces est coupé par un plan quelconque suivant un faisceau de courbes du second ordre. Ce dernier a les propriétés suivantes, qui résultent de ce qu'on vient de démontrer.

*Par chaque point du plan passe une conique du faisceau. Les polaires d'un point quelconque, par rapport à toutes les coniques du faisceau, passent par un seul et même point. Si deux coniques quelconques du faisceau se coupent ou sont tangentes en un point, toutes les coniques du faisceau doivent se couper ou être tangentes en ce même point; car le point est situé sur toutes ses polaires et, dans le dernier cas, ces dernières se confondent avec la tangente commune aux courbes.*

Un point quelconque P du plan a donc pour conjugué par rapport à toutes les coniques du faisceau un point $P_1$ par lequel passent les polaires de P. Les polaires de tous les points d'une droite *g* par rapport à deux de ces coniques forment deux faisceaux de rayons projectifs à *g*; ces derniers engendrent une conique qui passe par les centres des faisceaux, c'est-à-dire par les pôles de *g*. Donc :

*Les points d'une droite* g *ont pour conjugués par rapport au faisceau de coniques les points d'une conique projective à* g, *qui passe par les pôles de* g *par rapport aux coniques du faisceau.*

La correspondance géométrique du second degré nous fera découvrir d'autres propriétés des faisceaux de coniques.

---

# QUINZIÈME LEÇON.

**Projectivité d'un système de rayons du premier ordre et d'un système plan. — Surfaces réglées du quatrième ordre engendrées par deux faisceaux projectifs de plans du second ordre.**

Différents théorèmes de la onzième et de la douzième leçon, que nous allons prendre comme point de départ pour des recherches ultérieures, peuvent être réunis dans l'énoncé suivant :

*Deux gerbes collinéaires* S, S′, *qui ne sont ni perspectives ni concentriques, engendrent un système de rayons du premier ordre et, de plus, une courbe* $k^3$ *du troisième ordre qui passe par tous les points d'intersection des rayons homologues des gerbes. Cette courbe* $k^3$ *contient tous les points singuliers du système de rayons, et chaque rayon de ce système est une corde (ou une tangente) de* $k^3$. *Le système de rayons est de la troisième, de la seconde ou de la première classe, suivant que la ligne* $k^3$ *est une courbe gauche du troisième ordre, qu'elle se décompose en une conique et une droite ou qu'elle se réduit à* $\overline{SS'}$ *et à deux autres droites* u, v. *Dans ce dernier cas,* u *et* v *peuvent être imaginaires conjuguées ou coïncider. La ligne* $k^3$ *passe par les centres des gerbes collinéaires* S, S′ *et elle en est projetée par des cônes du second ordre qui, dans le second et le troisième des cas précités, peuvent aussi se décomposer en deux plans.*

Nous laissons au lecteur le soin de trouver les réciproques de ces théorèmes dont nous ferons également usage.

Rapportons maintenant réciproquement les gerbes $S$, $S'$ à un système plan $\Sigma_1$ ; le système de rayons du premier ordre se trouve de la sorte rapporté projectivement à $\Sigma_1$. En effet, à tout point de $\Sigma_1$ cor-

respondent dans les gerbes collinéaires deux plans homologues et leur droite d'intersection, qui fait partie du système de rayons, et toute ponctuelle rectiligne de $\Sigma_1$ a pour correspondante une surface conique ou réglée du second ordre engendrée par deux faisceaux homologues de plans de S et S′.

Au système de rayons formé par les cordes de la ligne $k^3$ correspondent ainsi les points du plan $\Sigma_1$; et en particulier, les points et les tangentes de $k^3$ ont pour correspondants les points et tangentes d'une conique $\varkappa_1^2$, projective à $k^3$; cette courbe de seconde classe se réduit à deux points, quand $k^3$ se décompose en une conique et une droite ou en trois droites. Une ponctuelle rectiligne de $\Sigma_1$ a pour correspondante dans le système de rayons une surface conique ou une surface réglée suivant que cette droite est ou n'est pas tangente à la conique $\varkappa_1^2$. Un point quelconque de $\Sigma_1$ aura donc pour élément correspondant une corde propre ou impropre de $k^3$, suivant qu'il sera à l'extérieur ou à l'intérieur de $\varkappa_1^2$.

Aux rayons du système, qui coupent une droite $g$ n'appartenant pas à ce système, correspondent dans $\Sigma_1$ les points d'une conique $\gamma_1^2$ projective à $g$. En effet, projetons de S la ponctuelle $g$ par un faisceau de rayons, ce dernier aura pour correspondant dans la gerbe S′ un faisceau de rayons projectif à $g$, qui engendre avec $g$ un faisceau de plans du second ordre (ou exceptionnellement du premier ordre); tout plan de ce faisceau, auquel correspond dans $\Sigma_1$ la conique $\gamma_1^2$, a, en commun avec le plan homologue de la gerbe S un rayon du système qui rencontre la droite $g$.

La conique $\gamma_1^2$ se décompose en une tangente à $\varkappa_1^2$ et en une ponctuelle rectiligne projective à $g$ quand, par exception, deux rayons homologues des gerbes S et S′ se coupent en un point de $g$, quand par conséquent $g$ a un point U commun avec $k^3$. Comme on peut, en général, mener par la droite $g$ une infinité de plans contenant chacun trois cordes de $k^3$, on peut aussi, en général, inscrire dans la conique $\gamma_1^2$ une infinité de triangles circonscrits à la conique $\varkappa_1^2$.

A une courbe quelconque du second ordre $\varphi_1^2$ de $\Sigma_1$ correspond dans le système de rayons du premier ordre une surface réglée $F^4$, et chaque point de $\varphi_1^2$ a pour correspondant une génératrice rectiligne de $F^4$. Comme $\varphi_1^2$ a au plus quatre points communs avec $\gamma_1^2$, il y a au plus quatre rayons de $F^4$ qui coupent la droite arbitraire $g$; la surface $F^4$ est donc du quatrième ordre. Elle passe, en général, deux fois

par les points de la ligne $k^3$, parce que $\varphi_1^2$ a, en général, deux points communs avec chacune des tangentes de $\varkappa_1^2$ ; elle est engendrée par deux faisceaux projectifs de plans du second ordre qui correspondent à la courbe $\varphi_1^2$ dans les gerbes collinéaires S et S'. Comme ces deux faisceaux projectifs de plans déterminent complètement la collinéation des gerbes, on voit que :

*Deux faisceaux projectifs et non concentriques de plans du second ordre engendrent, en général, une surface réglée du quatrième ordre, qui a une ligne double* $k^3$ *du troisième ordre; les rayons de la surface sont des cordes de* $k^3$ *et sont projetés de deux points quelconques de cette ligne par des faisceaux projectifs de plans du second ordre.*

La dernière partie de ce théorème n'est sujette à quelques exceptions bien faciles à établir que dans le cas où $k^3$ se décompose en une conique et une droite, ou en trois droites. En effet, dans le premier cas, les rayons de la surface réglée du quatrième ordre sont projetés de deux points quelconques de la conique et, dans le second cas, de deux points quelconques de la droite $\overline{SS'}$ qui fait partie de $k^3$ et sur laquelle sont situés les sommets des faisceaux générateurs de plans, suivant des faisceaux projectifs de plans du second ordre. Dans le dernier cas, $\overline{SS'}$ est un rayon double de la surface.

Faisons coïncider la conique $\varphi_1$ avec $\varkappa_1^2$ ou avec l'une des coniques $\gamma_1^2$, nous voyons que :

*Les tangentes de la courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre sont situées sur une surface (développable) du quatrième ordre. Les cordes de la courbe gauche* $k^3$, *qui coupent une droite arbitraire* g, *sont également situées sur une surface réglée du quatrième ordre.*

Cette dernière surface a, en général, trois cordes communes avec un plan mené par $g$ et elle est tangente à ce plan aux points d'intersection de $g$ et des trois cordes. Les plans du faisceau $g$ sont donc des plans tangents triples de cette surface.

La surface plus générale $F^4$ peut aussi être décrite au moyen d'une ligne du troisième ordre $k^3$ et d'une surface conique du second ordre dont le sommet est situé sur $k^3$. En effet, toutes les cordes de $k^3$, qui sont tangentes à cette surface conique, sont situées sur une surface $F^4$ du quatrième ordre, parce qu'elles sont projetées du sommet du cône suivant un faisceau de plans du second ordre. Par un point quelconque P de $k^3$ passent deux droites de la surface $F^4$ qui sont réelles ou imaginaires, selon que P est situé à l'extérieur ou à l'intérieur de la sur-

face conique. Les deux droites de $F^4$, issues de P, coïncident lorsque P est situé sur la surface conique du second ordre; dans ce cas, P est un point de rebroussement de la surface $F^4$, et cette dernière est tangente à un plan unique tout le long de la génératrice *singulière* qui passe par P. En général, la surface réglée $F^4$ a tout au plus quatre points de rebroussement et quatre génératrices singulières; et aux points de rebroussement correspondent les tangentes communes aux coniques $\varkappa_1^2$ et $\varphi_1^2$. C'est seulement dans le cas où $\varphi_1^2$ et $\varkappa_1^2$ se confondent et où, par suite, $F^4$ est la surface formée par les tangentes de la courbe gauche du troisième ordre $k^3$, que tous les points de cette courbe sont des points de rebroussement de $F^4$. En général, $F^4$ contient au plus quatre tangentes de $k^3$; ces dernières ont pour correspondants les points communs à $\varphi_1^2$ et $\varkappa_1^2$.

Un plan, joignant deux rayons de la surface $F^4$ qui se rencontrent, coupe en outre cette dernière, suivant une courbe du second ordre $\varphi$, projective à $\varphi_1^2$. En effet, les deux faisceaux projectifs de plans du second ordre, qui engendrent la surface $F^4$, sont coupés par le plan en question, suivant deux faisceaux de rayons du second ordre projectifs à $\varphi_1^2$; et comme ces faisceaux ont deux rayons correspondants communs, ils engendrent une conique $\varphi^2$ qui leur est projective (I. p. 142). Lorsque $F^4$ est formée par toutes les cordes de la ligne $k^3$, qui coupent une droite $g$, $\varphi^2$ se décompose en la droite $g$ et en une corde de $k^3$; dans tous les autres cas, la surface $F^4$ peut être engendrée, non seulement par des faisceaux de plans projectifs, mais encore, en suivant la marche réciproque, elle peut être engendrée par des courbes projectives $\varphi^2$ du second ordre. Les plans de toutes les courbes du second ordre situées sur $F^4$, forment un faisceau de plans $K^3$ du troisième ordre et sont des plans tangents doubles de la surface $F^4$.

On obtient trois variétés principales de la surface réglée $F^4$ du quatrième ordre, suivant que la ligne $k^3$, formée par ses points doubles, est une courbe irréductible du troisième ordre, qu'elle se décompose en une conique et une droite, ou bien en trois droites.

Dans le premier cas, comme nous le verrons, le faisceau formé par les plans tangents doubles est un faisceau de plans irréductible du troisième ordre; dans le second et le troisième cas, il se décompose respectivement en un faisceau de plans du premier ordre et un du second, ou en trois faisceaux de plans du premier ordre. Nous allons étudier chacune de ces variétés en particulier.

Lorsque la ligne $k^3$ se décompose en trois droites $\overline{SS'}$, $u$, $v$, dont les deux dernières peuvent aussi être imaginaires ou coïncidentes, les rayons de la surface $F^4$ sont projetés des points de la droite $\overline{SS'}$ par des faisceaux de plans du second ordre, et ils sont coupés par des plans passant par $\overline{SS'}$, suivant des courbes du second ordre. Tous ces faisceaux de plans et ces courbes sont projectifs entre eux (II, page 89) et à la conique $\varphi_1{}^2$. Quand une droite se meut en glissant sur deux droites $u$, $v$, qui ne se coupent pas et en rencontrant une conique $\varphi^2$, ou en restant tangente à une surface conique quelconque du second ordre, elle décrit cette variété de surfaces du quatrième ordre. Les droites $u$ et $v$, comme le montre aisément ce mode de génération, sont des droites doubles de la surface $F^4$. La droite $\overline{SS'}$, qui est située dans le plan de la conique $\varphi^2$ et coupe $u$ et $v$, est un rayon double propre ou isolé, ou bien un rayon de rebroussement de $F^4$, suivant qu'elle a avec $\varphi^2$ deux points communs réels ou imaginaires, ou bien qu'elle est tangente à $\varphi^2$. Les plans doublement tangents à cette surface $F^4$ forment trois faisceaux de plans dont les axes sont $\overline{SS'}$, $u$ et $v$. Les plans du faisceau $\overline{SS'}$ coupent la surface suivant deux génératrices réelles ou imaginaires. La surface $F^4$ est réciproque à elle-même et elle est sa propre conjuguée dans une infinité de systèmes focaux, parce que ses rayons appartiennent à un système de rayons de premier ordre et de première classe et font, en conséquence, partie d'une infinité de complexes linéaires de rayons.

En second lieu, si la ligne $k^3$ se décompose en une droite $v$ et une courbe $k^2$ du second ordre, qui a un point commun avec $v$, (II, p. 97), les rayons de $F^4$ font partie d'un système de rayons du premier ordre et de seconde classe, et ils sont projetés des points de $k^2$ suivant des faisceaux projectifs de plans du second ordre. Quand une droite se meut en rencontrant constamment une droite $v$ et une conique $k^2$ qui se coupent et en restant toujours tangente à une surface conique du second ordre, dont le sommet est situé sur $k^2$, elle décrit la seconde variété de surfaces du quatrième ordre. Un point de $k^2$ est un point double propre ou isolé de la surface $F^4$, suivant qu'il est situé à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface conique.

Tout plan du faisceau $v$ est doublement tangent à la surface $F^4$ ; il la coupe suivant $v$ et suivant deux rayons réels ou imaginaires qui ont en commun avec $v$ les deux points de contact. Nous obtenons d'autres plans doublement tangents en réunissant par un plan deux rayons

de $F^4$ passant par un même point de $v$ ; ces plans coupent en outre la surface $F^4$, suivant des courbes projectives du second ordre par lesquelles on peut engendrer $F^4$, et ils forment un faisceau de plans du second ordre. Ils ne peuvent, en effet, former deux faisceaux de plans du premier ordre ; car s'il en était ainsi, la surface appartiendrait à la variété que nous avons considérée précédemment. Le faisceau de plans $K^3$ du troisième ordre, qui renferme les plans doublement tangents de cette surface $F^4$, se décompose ainsi dans le faisceau de plans $v$ et dans un faisceau de plans du second ordre, qui a un plan commun avec $v$. Cette variété de surface réglée du quatrième ordre est encore réciproque à elle-même ; mais il n'existe pas de système focal dans lequel ses rayons soient à eux-mêmes leurs conjugués.

La surface $F^4$ pouvant aussi, en général, être engendrée au moyen de courbes projectives du second ordre, il découle de ce qui précède que ses plans doublement tangents ne peuvent appartenir à trois faisceaux de plans du premier ordre, ou à deux faisceaux de plans, l'un du premier et l'autre du second ordre, que si la ligne double $k^3$ se décompose en trois droites, ou en une droite et une conique.

Si donc les points doubles de la surface $F^4$ sont situés sur une courbe gauche irréductible du troisième ordre $k^3$, les plans doublement tangents forment un faisceau de plans $K^3$, irréductible et du troisième ordre.

Il n'y a d'exception que pour la surface particulière qui contient toutes les cordes de $k^3$ rencontrant une droite $g$ ; cette surface est réciproque à celle qui passe par tous les axes d'un faisceau irréductible de plans du troisième ordre qui coupent une même droite et pour laquelle les points de cette droite sont des points triples. En faisant abstraction de ce cas particulier, nous avons alors le théorème suivant [1].

*La surface réglée $F^4$ du quatrième ordre, sur laquelle les points doubles forment une courbe irréductible du troisième ordre* $k^3$, *est réciproque à elle-même et se compose de tous les rayons d'un complexe linéaire de rayons qui sont des cordes de* $k^3$.

Nous démontrons ce théorème dans l'hypothèse où il y a sur $k^3$ des points doubles *propres* de $F^4$ où se coupent deux rayons réels de la

1. Ce théorème est dû à *Clebsch* (Math. Ann. t. II) ; la démonstration synthétique qui suit a été donnée par *M. Richard Krause* (Über ein specielles Gebüsch von Flächen II Ordnung. Thèse. Strasbourg, 1879).

surface. Soient A et B deux de ces points doubles, $a,a'$ et $b,b'$ les couples de rayons de $F^4$ qui passent par eux et $\alpha$ et $\beta$ leurs plans. Les rayons de la surface $F^4$ sont alors projetés des points A et B par deux faisceaux de plans du second ordre et ils sont coupés par les plans $\alpha$ et $\beta$ suivant deux coniques, qui sont rapportées projectivement l'une à l'autre par ces rayons. Ces formes élémentaires projectives du second ordre établissent une réciprocité entre les gerbes A,B, que nous considérons comme faisant partie d'un espace $\Sigma$, et les systèmes plans $\alpha,\beta$ que nous supposerons appartenir à un autre espace $\Sigma_1$ ; et en outre Aa avec $\alpha$ et B avec $\beta$ un faisceau de rayons commun, parce que tout rayon de la gerbe A, situé dans $\alpha$ et qui coupe deux droites $p,q$ de $F^4$ différente de $a$ et $a'$ coïncide avec le rayon correspondant de $\alpha$ qui doit couper ces mêmes droites $p$ et $q$. Le rayon $\overline{AB}$ commun aux deux gerbes a pour correspondant la droite $\overline{\alpha\beta}$ commune aux deux systèmes plans ; en effet, les plans $\overline{Ab}$ et $\overline{Ab'}$ de A ou $\overline{Ba}$ et $\overline{Ba'}$ de B qui passent par $\overline{AB}$ ont respectivement pour correspondants les points $\alpha b$ et $\alpha b$ de $\alpha$ et $\beta a$ et $\beta a'$ de $\beta$ qui sont situés sur $\alpha\beta$. Les gerbes A et B de $\Sigma$ sont rapportées réciproquement aux systèmes $\alpha$ et $\beta$ de $\Sigma_1$ par le moyen de la surface $F^4$ de telle manière qu'elles aient chacune avec ces systèmes plans un faisceau de rayons correspondants commun et que tout plan commun à A et B ait pour correspondant un point commun à $\alpha$ et $\beta$ situé sur lui-même. Les deux espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont ainsi rapportés réciproquement l'un à l'autre de telle manière qu'ils ont comme éléments correspondants communs non seulement ces deux faisceaux de rayons, mais aussi tous les rayons de $F^4$. Ces deux espaces considérés ensemble forment donc un système focal (voir II, pages 76-77) aux directrices duquel appartiennent les droites de $F^4$ ; tout point double de $F^4$ a pour conjugué dans ce système focal un plan doublement tangent de $F^4$. La surface $F^4$ est aussi formée des directrices du système focal qui sont des axes du faisceau de plans du troisième ordre constitué par les plans doublement tangents.

# SEIZIÈME LEÇON.

## Correspondance géométrique de second degré.

Quand un système plan $\Sigma$ est rapporté réciproquement d'une double manière à un autre système plan et quand par suite il est rapporté collinéairement à lui-même, à tout point $P_1$ de $\Sigma_1$ correspondent deux droites homologues $p$ et $p'$ de $\Sigma$ et par suite aussi leur point d'intersection P ; réciproquement, au point P de $\Sigma$ correspondent deux droites dans $\Sigma_1$ et leur point d'intersection $P_1$. Lorsque le point $P_1$ se déplace sur une droite, le point P qui lui correspond ne décrit pas en général une droite, mais une courbe du second ordre ; en effet, les rayons homologues $p$ et $p'$ forment deux faisceaux projectifs de rayons, et ces derniers, quand ils ne sont pas perspectifs, engendrent la courbe du second ordre décrite par P. Dans l'hypothèse que la collinéation du système $\Sigma$ avec lui-même (collinéation qui résulte de la double réciprocité) n'est pas une relation de perspectivité, nous avons ce théorème :

*La double réciprocité de $\Sigma$ et de $\Sigma_1$ donne naissance entre ces systèmes à une* RELATION QUADRATIQUE *ou à une* CORRESPONDANCE GÉOMÉTRIQUE DU SECOND DEGRÉ *telle qu'en général un point de l'un des systèmes a pour correspondant un point de l'autre système et qu'à une ponctuelle du premier ordre dans l'un correspond une ponctuelle projective du second ordre dans l'autre. La correspondance quadratique de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ est réciproque ou permutable, c'est-à-dire qu'elle subsiste, quel que soit celui des systèmes que l'on considère en premier lieu.*

Cette correspondance quadratique a pour corrélative une autre correspondance dans laquelle chaque rayon de $\Sigma_1$ a pour correspondant un

rayon de $\Sigma$, mais où chaque faisceau quelconque de rayons du premier ordre a pour correspondant un faisceau de rayons du second ordre. En remplaçant l'un des deux systèmes plans par un système qui lui soit réciproque, on obtient encore entre les systèmes plans une troisième espèce de correspondance dans laquelle un point a pour correspondant un rayon et une ponctuelle du premier ordre dans le premier système, un faisceau de rayons du second ordre dans le deuxième. Nous allons étudier de plus près la correspondance quadratique dont nous avons parlé en premier lieu ; nous ne nous occuperons pas davantage ici des correspondances analogues qu'on peut établir entre les gerbes de rayons.

$\Sigma$ étant rapporté réciproquement à $\Sigma_1$ d'une double manière, de telle sorte qu'à tout point ou tout rayon de $\Sigma_1$ correspondent respectivement deux rayons ou deux points de $\Sigma$, nous obtenons sur $\Sigma$ deux systèmes plans collinéaires. Projetons ces deux systèmes collinéaires de deux points tels que la droite qui les joint ne passe pas par un point se correspondant à lui-même et ne coupe pas une droite qui se corresponde à elle-même, nous obtenons deux gerbes collinéaires, réciproques à $\Sigma_1$, qui engendrent le système de cordes d'une courbe gauche $k^3$ du troisième ordre. Mais ce système de cordes est rapporté projectivement à $\Sigma_1$, par le moyen des deux gerbes (II, page 125) et l'autre système plan $\Sigma$ en est une section. L'étude de la correspondance quadratique entre $\Sigma$ et $\Sigma_1$ se trouve de la sorte ramenée à un problème qui a la connexion la plus intime avec une de nos précédentes recherches.

A tout point de $\Sigma_1$ correspond une corde de $k^3$ et son point d'intersection sur $\Sigma$ ; à toute droite $a_1$ de $\Sigma$ correspond dans le système de cordes une surface du second ordre, passant par la courbe gauche $k^3$, et par suite dans $\Sigma$ une conique qui contient tous les points communs à $\Sigma$ et $k^3$ ; si la droite $a_1$ de $\Sigma_1$ pivote autour de l'un de ses points, la surface correspondante du second ordre décrit dans le système de cordes un faisceau de surfaces et la conique correspondante décrit dans $\Sigma$ un faisceau de coniques (II, page 124). Nous pouvons immédiatement déduire de la correspondance quadratique quelques-unes des propriétés principales d'un pareil faisceau de courbes du second ordre.

Soit $A_1$ le centre d'un faisceau de rayons situé dans $\Sigma_1$ et $A$ le point correspondant de $\Sigma$ par lequel passent toutes les courbes du faisceau correspondant de coniques, soit de plus $g$ une ponctuelle quelconque du premier ordre de $\Sigma$ à laquelle correspond dans $\Sigma_1$ une conique $\gamma_1^2$

projective à $g$. Si la droite $g$ ne passe pas par A, $\gamma_1^2$ ne passe pas par $A_1$; dans ce cas, les points de la conique $\gamma_1^2$ sont alors accouplés involutivement par le moyen du faisceau de rayons $A_1$ et conséquemment ceux de la droite $g$ le sont aussi par le moyen du faisceau de coniques A. Il faut remarquer ici que si $g$ coupe la courbe gauche $k^3$ en un point U, la conique $\gamma_1^2$ se décompose en deux droites $g_1$ et $u_1$ dont l'une $g_1$ est projective à $g$ (II, page 126). Si la droite $g$ passe par le point A, elle a encore en commun avec les coniques du faisceau un point différent de A, et en même temps $\gamma_1^2$ passe par $A_1$. Comme toutes les droites $g_1$ situées dans $\Sigma_1$ et toutes les coniques $\gamma_1^2$ passant par $A_1$ sont rapportées projectivement les unes aux autres par le moyen du faisceau de rayons $A_1$, il s'ensuit que :

*Toutes les ponctuelles* g *du premier ordre, passant par un point commun à toutes les coniques du faisceau, sont projectivement rapportées les unes aux autres par ce faisceau de telle manière qu'un groupe de points homologues des ponctuelles est situé sur chaque conique. Toute droite, qui ne passe par aucun des points communs aux coniques, est coupée par le faisceau de ces coniques suivant une ponctuelle involutive telle que les points conjugués sont situés deux à deux sur une seule et même conique du faisceau.*

Il résulte du second de ces théorèmes que le faisceau est complètement déterminé par deux de ces coniques. En effet, pour construire une troisième conique quelconque du faisceau passant par un point donné P, nous mènerons par P des rayons qui coupent chacun en deux points les deux coniques données $\alpha^2$ et $\beta^2$. Comme, d'après la manière dont est constitué le faisceau dont il s'agit, $\alpha^2$ et $\beta^2$ ont au moins un point commun, il est possible de mener une infinité de rayons de ce genre. Les deux couples de points, où un pareil rayon $s$ est coupé par $\alpha^2$ et $\beta^2$, déterminent sur $s$ une ponctuelle involutive ; cherchons-y le point conjugué à P, il se trouvera sur la conique du faisceau qui passe par P.

Étant données trois coniques du faisceau, il est facile d'en construire une quatrième quelconque au moyen du premier des théorèmes qui précèdent.

Le plan $\Sigma$ qui, nous l'avons vu, peut être considéré comme une section du système de cordes de la courbe gauche $k^3$ projectif à $\Sigma_1$, contient aussi des cordes isolées et des points de $k^3$; il renferme au plus trois points et trois cordes et au moins un point et une corde. Les différents points d'une pareille corde correspondent à un seul et même point

$U_1$ du système plan $\Sigma_1$; et un point U, commun à $\Sigma$ et à $k^3$, a pour correspondant dans $\Sigma_1$ les différents points d'une droite $u_1$ à laquelle correspond dans le système de cordes la surface conique $Uk^3$ du second ordre. Les points U et $U_1$ font donc exception à la règle d'après laquelle un point quelconque de l'un des systèmes a pour correspondant un point unique de l'autre système. Nous les appellerons *points principaux* des systèmes plans et nous donnerons aux droites qui leur correspondent le nom de *lignes principales*. Dans tout plan $\Sigma$, il y a (II, page 103) autant de points que de cordes de la courbe gauche du troisième ordre; donc :

*Le système plan $\Sigma$ renferme autant de lignes principales que de points principaux, c'est-à-dire, une au moins et trois au plus; $\Sigma_1$ en contient autant que $\Sigma$, puisqu'à tout point principal de l'un des systèmes correspond une ligne principale de l'autre. La droite qui unit deux points principaux de l'un des systèmes est une ligne principale, et le point d'intersection de deux lignes principales est un point principal de ce système.*

La dernière partie de ce théorème résulte de ce que toute droite, qui réunit deux points de la courbe gauche $k^3$, est une de ses cordes et que le point d'intersection de deux cordes est situé sur la courbe.

A toute ponctuelle rectiligne de $\Sigma_1$ correspond une surface du second ordre dans le système des cordes de la courbe gauche $k^3$ et nous savons que les points d'une corde quelconque sont conjugués deux à deux par rapport à toutes les surfaces du second ordre menées par $k^3$. Or les coniques de $\Sigma$, qui correspondent aux droites de $\Sigma_1$, sont situées sur ces surfaces du second ordre; il en résulte donc que :

*Les coniques de l'un des systèmes $\Sigma$, qui correspondent aux droites de l'autre système $\Sigma_1$, passent par tous les points principaux de $\Sigma$; les points de chacune des lignes principales de $\Sigma$ sont conjugués deux à deux par rapport à toutes ces coniques.*

Il en est de même pour les coniques de $\Sigma_1$ qui correspondent aux droites de $\Sigma$.

Une conique quelconque $\varphi_1^2$ de $\Sigma_1$ a pour correspondante (II, page 126) dans $\Sigma$ une courbe $\varphi^4$ du quatrième ordre, qui a pour points doubles chacun des points principaux de $\Sigma$. Si $\varphi_1^2$ passe par un point principal de $\Sigma_1$, $\varphi^4$ se décompose en une droite principale et en une courbe du troisième ordre ayant un point double. Si $\varphi_1^2$ passe par deux points principaux de $\Sigma_1$, $\varphi^4$ se décompose en deux droites principales de $\Sigma$ et en

une courbe du second ordre projective à $\varphi_1^2$. Imaginons qu'on ait établi la correspondance géométrique de $\Sigma$ et $\Sigma_1$, en rapportant réciproquement ces deux systèmes l'un à l'autre et d'une double manière ; à la conique $\varphi_1^2$ de $\Sigma_1$ correspondent dans $\Sigma$ deux faisceaux de rayons du second ordre, ainsi que la courbe sur laquelle les rayons homologues se coupent deux à deux, c'est-à-dire :

*Deux faisceaux projectifs de rayons du second ordre, situés dans le même plan, engendrent en général une courbe du quatrième ordre ayant au plus trois points doubles et au moins un. Cette courbe peut se décomposer en une droite et une courbe du troisième ordre qui a un point double, ou en deux droites et une conique, ou bien enfin en quatre droites.*

Soit U un point principal et $g$ une droite quelconque de $\Sigma$ passant par ce point ; la conique de $\Sigma_1$, qui correspond à $g$, se décompose alors en la droite principale $u_1$ correspondant au point U et en une droite $g_1$ projective à $g$. En effet, toutes les cordes de la courbe gauche $k^3$ qui sont rencontrées par $g$ en dehors du point U forment une surface réglée et cette dernière a la ponctuelle $g_1$ pour élément correspondant dans $\Sigma_1$. La droite $g_1$ doit passer par un point principal $U_1$ du système plan $\Sigma$ ; en effet, $g$ étant une directrice du système réglé, le plan $\Sigma$ passant par $g$ contient un de ses rayons $u$ et le point principal $U_1$, qui correspond à $u$, est par conséquent situé sur $g_1$.

Toutes les droites $g$ de $\Sigma$, qui passent par U, doivent donc avoir pour correspondantes les droites $g_1$ de $\Sigma_1$ qui passent par $U_1$. Nous dirons que les points U et $U_1$ sont deux points principaux *conjugués l'un à l'autre* dans les systèmes. Les faisceaux U et $U_1$ sont projectifs ; car une droite quelconque $a$ de $\Sigma$ a pour correspondante dans $\Sigma_1$ une conique $\alpha_1^2$, projective à $a$ et passant par $U_1$, et les faisceaux U et $U_1$ sont respectivement perspectifs à $a$ et à $\alpha_1^2$. Donc :

*Les points principaux des systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont deux à deux conjugués entre eux de telle manière que toute droite* g *de $\Sigma$, passant par un point principal U, a pour correspondante une droite $g_1$ de $\Sigma_1$, projective à $g$ et passant par le point principal conjugué $U_1$. Les faisceaux U et $U_1$ sont projectifs eu égard à leurs droites qui se correspondent.*

Une courbe du second ordre de $\Sigma$, qui passe par deux points principaux U et V, étant projetée de U et V par deux faisceaux projectifs de rayons, et ces faisceaux ayant pour correspondants dans $\Sigma_1$ deux faisceaux projectifs $U_1$ et $V_1$, on voit que :

*Toute conique de l'un des systèmes plans, qui passe par deux points principaux a pour correspondante dans l'autre système une conique qui lui est projective et qui passe par les deux points principaux conjugués.*

Nous pouvons amener les deux systèmes plans dans une position telle que les faisceaux U et $U_1$ deviennent perspectifs, c'est-à-dire soient des sections d'un seul et même faisceau de plans. Soit $z$ l'axe de ce faisceau de plans qui passe par U et $U_1$ ; deux points correspondants quelconques des systèmes sont alors un même plan avec $z$. Projetons respectivement les systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ de deux points S et $S_1$ situés sur $z$, nous obtenons deux gerbes en correspondance quadratique. Deux rayons homologues quelconques de ces gerbes sont situés dans un même plan avec $z$ et se coupent ; et tous les points d'intersection ainsi obtenus sont situés sur une surface passant par S et $S_1$, qui a une conique commune avec tout plan des gerbes S et S et qui par suite doit être une surface du second ordre. En effet, considérons un plan quelconque passant par $\overline{SS_1}$ ; ce plan contient deux faisceaux projectifs de rayons des gerbes S et $S_1$ et ces faisceaux engendrent la conique. Si le plan passe par le point S, il renferme un faisceau de rayons, auquel correspond dans la gerbe $S_1$ une surface conique du second ordre passant par $\overline{S_1U_1}$, et cette surface a en commun avec le plan considéré la conique en question qui passe par S. Soit $u$ la ligne principale de $\Sigma$ qui correspond au point principal $U_1$ de $\Sigma_1$, $\overline{Su}$ est le plan tangent de la surface du second ordre au point S ; en effet, tout rayon de S situé dans $\overline{Su}$ correspond au rayon principal $\overline{SS_1}$ commun aux gerbes et est tangent en S à la surface. Les surfaces du second ordre permettent de cette manière de se faire une idée très simple et très claire de la correspondance géométrique du second degré.

Nous avons déjà fréquemment rencontré des exemples de la correspondance géométrique du second degré dans la première partie de cet ouvrage (pages 105, 189, 205, 206) ; nous mentionnerons en particulier le principe des rayons recteurs réciproques. Nous ajouterons encore les exemples suivants :

*Un système de rayons de premier ordre et de première classe est coupé par deux plans quelconques suivant des systèmes plans en correspondance quadratique et est projeté de deux points quelconques suivant deux faisceaux de plans en correspondance quadratique.*

*Une gerbe de plans du second ordre est coupée par deux quelconques de ses plans suivant des systèmes de rayons en correspondance quadratique.*

*Si dans un système polaire plan on fait correspondre à tout rayon le rayon conjugué qui lui est normal, on obtient deux systèmes involutifs plans de rayons en correspondance quadratique.*

---

# DIX-SEPTIEME LEÇON.

**Systèmes collinéaires superposés. — Systèmes involutifs dans le plan et dans l'espace.**

Deux systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$, situés dans un même plan, ont tous leurs éléments correspondants communs et sont identiques, quand ils ont quadrangle correspondant commun (II, page 16) ; ils sont perspectifs, c'est-à-dire ont une ponctuelle et un faisceau de rayons du premier ordre correspondants communs, quand ils ont comme éléments correspondants communs trois points situés sur une même droite ou trois rayons issus d'un même point (II, page 19). Combien existe-t-il de points et de rayons correspondants qui leur soient communs, quand ils ne sont ni identiques, ni en perspective ?

Pour répondre à cette question, en dehors du plan qui contient les systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ prenons deux points arbitraires S et $S_1$ tels que la droite qui les joint ne rencontre ni un point, ni un rayon qui se corresponde à lui-même dans les systèmes.

Projetons maintenant ces systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ des points S et $S_1$ respectivement ; ces derniers deviennent les centres de deux gerbes collinéaires qui engendrent une courbe gauche du troisième ordre.

Tout point, qui est correspondant commun à $\Sigma$ et $\Sigma_1$, est situé sur cette courbe gauche ; car il est le point d'intersection de deux rayons homologues des gerbes S et $S_1$ ; de même tout rayon qui est correspondant commun à $\Sigma$ et $\Sigma_1$ est une corde de la courbe gauche du troisième ordre. Nous avons ainsi ce théorème (II, pages 100 et 105).

*Deux systèmes collinéaires plans superposés, mais non perspectifs, ont comme éléments correspondants communs, soit les sommets et les*

*côtés d'un triangle, soit deux points et deux droites (l'une des droites joint les deux points et l'autre la coupe en l'un de ces points), soit enfin un point et une droite.*

On a l'un ou l'autre de ces trois cas, suivant que la courbe gauche du troisième ordre a trois points, deux points ou un point commun avec le plan des systèmes collinéaires.

Deux gerbes collinaires concentriques, mais non perspectives, ont comme éléments correspondants communs, soit les arêtes et les faces d'un angle triarête, soit deux rayons et deux plans, soit enfin un rayon et un plan.

Ce théorème se déduit du précédent au moyen de la loi de réciprocité, ou bien en coupant les deux gerbes collinéaires par un plan qui donne deux systèmes collinéaires. On voit de même que : étant donnés dans l'espace un système plan $\Sigma$ et une gerbe S qui lui est collinéaire, il y a au moins un rayon et un plan et au plus trois rayons et trois plans de S passant par les éléments qui leur correspondent dans $\Sigma$, pourvu que $\Sigma$ ne soit pas une section de S, ou ne soit pas perspective à S.

Deux systèmes collinéaires de l'espace ont tous leurs éléments correspondants communs et sont identiques, quand ils ont comme éléments correspondants communs cinq points, dont quatre ne sont pas dans un même plan (II, page 26) ; ils sont perspectifs, c'est-à-dire ont une gerbe et un système plan correspondants communs, quand ils ont un quadrangle plan ou un angle quadrarête correspondant commun (II, pages 25 et 30). Lorsque deux systèmes collinéaires de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ont un tétraèdre ABCD correspondant commun et qu'un point P de $\Sigma$, qui n'est pas situé dans une face du tétraèdre, a pour correspondant un point $P_1$ de $\Sigma_1$, les cas suivants peuvent se présenter : Si la droite $\overline{PP_1}$ passe par un sommet A du tétraèdre, les systèmes ont en commun quatre rayons correspondants et par suite tous les éléments correspondants de la gerbe A ; ils ont de même le système plan BCD correspondant commun et sont perspectifs. Si la droite $\overline{PP_1}$ rencontre deux arêtes opposées $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ du tétraèdre, les systèmes collinéaires ont comme éléments correspondants communs trois plans et par suite tous les plans passant par $\overline{AB}$ et par $\overline{CD}$ ; il en est de même pour tous les points situés sur ces arêtes et pour tout rayon qui est coupé par $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$. — Si $\overline{PP_1}$ ne coupe qu'une arête $\overline{AB}$ du tétraèdre, les systèmes ont pour éléments correspondants communs trois plans et par suite tous

les plans passant par AB, tous les points situés sur $\overline{CD}$, et en outre les plans $\overline{ACD}$ et $\overline{BCD}$ ainsi que tous les rayons de ces plans qui passent par A ou C.

Si enfin la droite $\overline{PP_1}$ n'est dans un même plan avec aucune des arêtes du tétraèdre, les systèmes collinéaires n'ont que les sommets, les arêtes et les faces du tétraèdre ABCD qui leur soient correspondants communs.

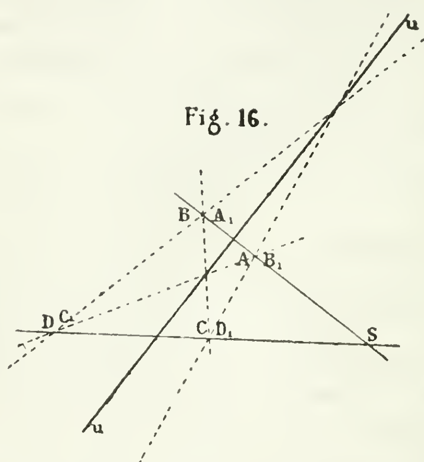
Nous ne nous arrêterons pas à énumérer tous les autres cas où deux espaces collinéaires ont en commun des éléments correspondants isolés ou un nombre infini de ces éléments ; nous nous contenterons de présenter les remarques qui suivent. Il peut arriver (et nous en verrons un exemple dans les systèmes involutifs) que les systèmes n'aient ni point ni plan correspondant commun réel ; mais si un point S du système $\Sigma$ coïncide avec son correspondant $S_1$ de $\Sigma_1$, les gerbes collinéaires S et $S_1$ et par suite aussi les espaces collinéaires ont encore au moins un rayon et un plan correspondant commun.

De même si un plan $\alpha$ de $\Sigma$ coïncide avec son correspondant $\alpha_1$ dans $\Sigma_1$, les systèmes ont au moins un point et un rayon de $\alpha$ correspondants communs (II, page 139); car $\alpha$ renferme deux systèmes plans collinéaires qui se correspondent dans les systèmes de l'espace.

Deux formes fondamentales collinéaires peuvent aussi être en situation involutive de telle sorte qu'à chacun de leurs éléments corresponde doublement un autre élément. Les formes ont alors une infinité d'éléments correspondants communs, par exemple, tous les rayons qui réunissent deux points homologues des formes ou suivant lesquels se coupent deux plans homologues quelconques. En effet, si un point (fig. 16) que nous désignerons par A ou $B_1$, selon qu'il sera considéré comme appartenant à l'un ou à l'autre des systèmes collinéaires, a pour correspondants deux points coïncidents $A_1$ et B, la droite $\overline{AB}$ de la première forme se confond avec la droite correspondante $\overline{A_1B_1}$ de la seconde. Si deux systèmes collinéaires plans sont en involution, ils ont par cela même une infinité de rayons correspondants communs et conséquemment sont perspectifs. Deux points homologues quelconques sont sur une même droite avec le centre S de collinéation qui prend dans ce cas le nom de *centre d'involution ;* et deux rayons homologues quelconques se coupent sur l'axe de collinéation $u$, qu'on appelle aussi dans ce cas l'*axe d'involution*. Toute droite passant par le centre d'involution S est le lieu d'une ponctuelle involutive, dont S et le point de cette droite situé

sur $u$ sont les points doubles; et de même, tout point de l'axe de collinéation $u$ est le centre d'un faisceau involutif de rayons dont $u$ et le rayon passant par S sont les rayons doubles. Le centre et l'axe de collinéation séparent donc harmoniquement deux points ou deux rayons homologues quelconques des systèmes.

Deux systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$, situés dans le même plan, sont involutifs ou en involution lorsqu'à deux points quelconques $AB_1$ et $CD_1$, (fig. 16) correspondent doublement deux autres points $A_1B$ et $C_1D$ qui forment avec eux un quadrangle. En effet, la droite $\overline{AB}$ correspond à la droite $\overline{A_1B_1}$ c'est-à-dire à elle-même; et comme sur cette droite les points $AB_1$ et $A_1B$ se correspondent doublement, tous les autres points




sont accouplés involutivement (I, page 146). Il en est de même pour la droite $\overline{CD}$ ou $\overline{C_1D_1}$. Les droites $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ se coupent en un point S qui se correspond à lui-même et qui est un point double de chacune des ponctuelles involutives $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$. Toute droite arbitraire du plan, qui ne passe pas par S, coupe les droites $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ en deux points; elle a pour élément lui correspondant doublement la droite qui unit les deux points conjugués des précédents situés sur $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$. Deux points quelconques du système doivent se correspondre doublement, parce qu'on les considère comme les points d'intersection de droites qui se correspondent doublement.

Le point d'intersection S de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ est le centre d'involution et la droite $u$, sur laquelle se coupent les autres côtés opposés du quadrilatère complet ABCD, est l'axe d'involution des systèmes.

Si nous considérons les systèmes en involution comme constituant un système unique dont les points et les droites sont conjugués deux à deux, on donne à ce système le nom de *système plan involutif.* Les propriétés que nous venons de trouver peuvent être résumées comme il suit :

*Dans un système plan en involution, les points conjugués sont deux à deux situés sur des droites passant par le centre d'involution et ils sont harmoniquement séparés par ce point et par l'axe d'involution ; les rayons conjugués se coupent deux à deux sur l'axe d'involution et sont harmoniquement séparés par cet axe et par le centre d'involution. Pour accoupler involutivement les éléments d'un système plan, on peut faire correspondre à deux points P et Q deux autres points quelconques $P_1$ et $Q_1$, qui forment avec P et Q un quadrangle ; ou bien, on peut prendre à volonté dans le plan le centre S et l'axe* u *d'involution.*

Toute courbe KAL limitée par deux points K et L de l'axe d'involution forme avec la courbe $KA_1L$ qui lui est conjuguée une courbe *involutive.* Nous obtenons encore une courbe involutive lorsque, étant donnée une courbe SAK ou $PAP_1$ qui est limitée par le centre d'involution S et un point K de l'axe d'involution ou bien par deux points conjugués P et $P_1$, on lui adjoint la courbe conjuguée $SA_1K$ ou $PA_1P_1$. Par exemple, une conique quelconque se présente comme courbe involutive, quand on prend pour centre d'involution un point quelconque S extérieur ou intérieur à la courbe et pour axe d'involution la polaire $u$ de ce point. Remarquons en passant que la droite de l'infini a pour conjuguée une droite $g$ parallèle à $u$, qui divise en deux parties égales la distance de S à $u$. La conique est donc une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant qu'elle a avec la droite $g$ deux points communs M et N, ou un seul point commun P, ou bien qu'elle n'en a aucun ; dans le premier cas, les asymptotes sont parallèles à $\overline{SM}$ et $\overline{SN}$ ; dans le second, $\overline{SP}$ est un diamètre de la parabole. On résout ainsi d'une manière très simple le problème suivant :

*Étant donnée une portion limitée d'une courbe du second degré, reconnaître si la conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.*

Un système plan involutif est projeté d'un point extérieur suivant une gerbe involutive. Le *plan d'involution* de cette gerbe passe par l'axe d'involution $u$ et l'*axe d'involution* de la gerbe passe par le centre d'involution S du système.

Deux systèmes collinéaires *de l'espace* $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont en situation invo-

lutive, lorsque deux systèmes plans $\alpha$ et $\alpha_1$ qui en font partie et qui ne sont pas superposés se correspondent doublement l'un à l'autre de telle manière qu'à tout élément de l'un corresponde doublement un élément de l'autre. En effet, à tout plan, qui coupe les deux systèmes plans $\alpha$ et $\alpha_1$ suivant les droites $g$ et $l$, correspond alors doublement le plan qui joint l'une à l'autre les droites conjuguées $g_1$ et $l_1$ qui appartiennent respectivement aux plans $\alpha_1$ et $\alpha$ ; et comme tout point ou tout rayon de l'espace peut être considéré comme l'intersection de trois ou de deux de ces plans, il a pour correspondant le point ou la droite d'intersection des plans qui correspondent doublement aux précédents. D'après cela, comme à tout élément correspond doublement un autre élément, nous pouvons regarder les systèmes de l'espace en involution comme un *système involutif* unique, dont les éléments sont conjugués deux à deux.

Tout rayon qui réunit l'un avec l'autre deux points conjugués du système involutif, ou suivant lequel se coupent deux plans conjugués, coïncide avec son correspondant et par conséquent est conjugué à lui-même. Il en est de même des droites $s$ suivant lesquelles se coupent les plans $\alpha$ et $\alpha_1$ qui sont conjugués l'un à l'autre. Nous distinguerons deux espèces essentiellement différentes de systèmes involutifs, suivant que sur les droites $s$ chaque point coïncide ou ne coïncide pas avec son conjugué.

Dans le premier cas, la ponctuelle $s$ est un élément correspondant commun aux systèmes plans $\alpha$ et $\alpha_1$ ; conséquemment ils sont perspectifs et engendrent une gerbe S dont tous les rayons et tous les plans sont conjugués à eux-mêmes, parce qu'ils réunissent l'un et l'autre deux éléments conjugés de $\alpha$ et $\alpha_1$. Les systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ de l'espace ont comme élément correspondant commun la gerbe S et par suite aussi un système plan $\Upsilon$ ; ils sont donc perspectifs. Dans le système involutif qu'ils constituent, chaque élément du plan $\Upsilon$ est donc conjugué à lui-même. Un système involutif de cette espèce est appelé *perspectif-involutif* ; le point S, qui est sur une même droite avec deux points conjugués quelconques et dans un même plan avec deux droites conjuguées quelconques, s'appelle le *centre d'involution*, et le plan $\Upsilon$, sur lequel se coupent deux à deux les rayons ou les plans conjugués, est dit le plan d'*involution du système*.

Nous pouvons résumer comme il suit les propriétés principales de cette espèce de système involutif :

*Dans les systèmes perspectifs involutifs, toute droite ou tout plan*

*passant par le centre d'involution S et tout point ou tout rayon situé dans le plan d'involution Υ sont conjugués à eux-mêmes. Tout plan passant par S est le lieu d'un système involutif plan dont le centre d'involution est le point S et qui est coupé par Υ suivant l'axe d'involution ; de même, tout point situé sur Υ est le centre d'une gerbe involutive, dont Υ est le plan d'involution et dont l'axe d'involution passe par S. Il suit de là que deux points, rayons ou plans conjugués sont harmoniquement séparés par le centre d'involution S et le plan d'involution Υ. Pour accoupler involutivement les éléments de l'espace, on peut prendre à volonté le centre d'involution S et le plan d'involution Υ, ou bien S et deux plans conjugués A et $A_1$.*

Toute courbe gauche, limitée par deux points K et L du plan d'involution, ou par deux points conjugués A et $A_1$, ou enfin par le centre d'involution S et par un point K du plan d'involution, constitue avec la courbe qui lui est conjuguée ce qu'on appelle une *courbe gauche involutive*. Toute surface limitée par une courbe involutive ou bien encore par une courbe conjuguée à elle-même forme avec la surface conjuguée une *surface involutive*. Par exemple, une surface quelconque $F^2$ du second ordre se présente à nous comme surface involutive, lorsque l'on prend pour plan d'involution un plan Υ, qui ne lui est pas tangent, et pour centre d'involution le pôle S de ce plan. La surface $F^2$ est un hyperboloïde, un paraboloïde ou enfin un ellipsoïde, suivant qu'elle coupe suivant une courbe $k^2$, touche en un point P, ou ne rencontre pas le plan $\gamma$ parallèle à Υ qui bissecte la distance de S à Υ ; en effet, tout point G commun à $F^2$ et $\gamma$ a pour conjugué sur le rayon $\overline{SG}$ un point de la surface $F^2$ situé à l'infini, parce que $\gamma$ et le plan à l'infini se correspondent.

Dans le cas de l'hyperboloïde, la surface conique $Sk^2$ est parallèle au cône asymptotique; dans le cas du paraboloïde, $\overline{SP}$ est un diamètre de cette surface.

Nous allons maintenant étudier la seconde espèce de système involutif de l'espace, celui qu'on appelle système involutif gauche. Deux systèmes plans conjugués quelconques $\alpha$ et $\alpha_1$ de ce système ont leur droite d'intersection $s$ correspondante commune, mais tous les points de cette droite ne jouissent pas de cette propriété; de plus les points de $s$ sont conjugués deux à deux et par suite accouplés involutivement. Les droites qui joignent les points homologues de $\alpha$ et $\alpha_1$ sont conjuguées à elles-mêmes dans le système involutif et forment (II, pages 90-91) un système

de rayons de premier ordre et de première classe. Comme il passe toujours par un point quelconque de l'espace un rayon de ce système de rayons qui est conjugué à lui-même, et comme un plan quelconque contient toujours un de ces rayons, on voit que :

*Dans les systèmes involutifs gauches, les droites joignant les points conjugués et les droites d'intersection des plans conjugués sont conjuguées à elles-mêmes et forment un système de rayons de premier ordre et de première classe.*

Nous donnerons à ces droites conjuguées à elles-mêmes le nom de *directrices* du système involutif gauche. Chacune de ces directrices est le lieu d'une ponctuelle involutive et l'axe d'un faisceau involutif de plans, dont les éléments sont conjugués deux à deux dans le système involutif.

Les deux axes non concourants $u, v$ du système de directrices (II, page 91) passent par les points doubles de la ponctuelle involutive et sont contenus dans les plans doubles du faisceau de plans. Ces axes, réels ou imaginaires $u$ et $v$, que nous appellerons les *axes d'involution* du système involutif gauche, séparent harmoniquement deux à deux les points, rayons ou plans conjugués du système. Sur ces axes d'involution sont situés tous les points qui sont conjugués à eux-mêmes et par eux passent tous les plans du système involutif qui sont conjugués à eux-mêmes; ils coupent toutes les directrices du système. Lorsque deux directrices ou deux rayons conjugués $a, b$ se coupent, leur point d'intersection $ab$ est situé sur l'un des axes d'involution et leur plan $\overline{ab}$ passe par l'autre; dans ce cas, les deux axes sont réels. Tout plan réel passant par l'un des axes contient un système involutif, dont le centre est situé sur l'autre axe et qui fait partie du système involutif gauche; de même, tout point réel situé sur l'un des axes est le centre d'une gerbe involutive contenue dans le système, dont le plan d'involution passe par l'autre axe.

Pour déterminer un système involutif gauche, on peut prendre arbitrairement les deux axes d'involution non concourants $u, v$.

Une surface du second ordre $F^2$, par rapport à laquelle $u$ est la polaire de $v$, se présente à nous comme une surface involutive de ce système, puisque deux quelconques de ses points, dont la droite de jonction coupe les axes $u$ et $v$, sont harmoniquement séparés par $u$ et $v$. Si la surface $F^2$ est réglée, ses génératrices sont conjuguées deux à deux dans le système involutif et harmoniquement séparées par les axes $u, v$;

les rayons de ses deux systèmes réglés sont accouplés involutivement et un plan quelconque mené par $u$ (ou $v$) les coupe suivant les couples de points d'une courbe involutive du second ordre, dont l'axe d'involution est situé sur l'autre axe $v$ (ou $u$).

Un système de rayons de premier ordre et de première classe, dont les axes sont ou bien imaginaires, ou bien réels et distincts l'un de l'autre, détermine un système involutif gauche (II, page 95) dont les directrices forment le système de rayons. Deux points ou deux plans conjugués de ce système involutif sont conjugués par rapport à toutes les surfaces réglées du second ordre contenues dans le système de rayons. Chacune de ces surfaces réglées se compose de directrices du système, l'autre au contraire est un système réglé involutif contenu dans le système.

*Un système réglé en involution* $aa_1$. $bb_1$. $cc_1$..... *détermine un système involutif gauche qui contient le système réglé en involution et dont chaque directrice est conjuguée à elle-même.*

En effet, soient $p,q,r$ trois directrices quelconques du système réglé, on peut rapporter deux espaces collinéairement l'un à l'autre de telle sorte qu'aux droites $a,b,a_1,p,q,r$ de l'un, correspondent respectivement les droites $a_1,b_1,a,p,q,r$ de l'autre (II. page 29) ; ces deux systèmes collinéaires sont en involution, parce que leurs points et leurs plans se correspondent doublement deux à deux, comme $ap$ et $a_1p$, et ils ne forment pas un système perspectif-involutif, mais bien un système involutif gauche, parce que les rayons conjugués $a,a_1$ ne se coupent pas. Le point S, où se rencontrent les plans $ap,bq,cr$ et qu'on peut considérer comme un point quelconque de l'espace, a pour correspondant le point $S_1$ d'intersection des plans $a_1p$, $b_1q$, $c_1r$ et $\overline{SS_1}$ est la directrice du système involutif qui passe par S. Les rayons doubles réels ou imaginaires du système réglé involutif constituent les axes du système.

Deux systèmes réglés involutifs $aa_1$. $bb_1$. $cc_1$..... et $pp_1$. $qq_1$. $rr_1$..., dont chacun est le système directeur de l'autre, déterminent aussi un système involutif gauche, dans lequel ils sont contenus. On obtient ce système en rapportant deux espaces collinéairement l'un à l'autre de manière qu'aux droites $a,a_1$ $b,p$, $p_1,q$ de l'un correspondent respectivement les droites $a_1,a,b_1,p,q_1$ de l'autre. En effet, les points ou les plans $ap$ et $a_1p_1$ se correspondent doublement ; le point d'intersection des plans $ap$, $bq$, $cr$ est conjugué à celui des plans $a_1p_1$, $b_1q_1$, $c_1r_1$, etc. Si l'un des deux

systèmes a deux rayons doubles imaginaires et l'autre au contraire deux rayons doubles $m$ et $n$ réels, les axes du système involutif sont imaginaires ; car, dans ce cas, il n'y a aucun point réel des directrices $m, n$ et aucun plan réel passant par ces droites qui soit conjugué à lui-même.

---

# DIX-HUITIÈME LEÇON.

## Complexes de rayons engendrés par des systèmes collinéaires de l'espace.

Lorsque deux systèmes collinéaires de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ne sont pas perspectifs et n'ont pas pour éléments correspondants communs les rayons d'un système de rayons de premier ordre et de première classe, ils engendrent un *complexe de rayons* auquel nous attribuons comme partie intégrante toute droite d'intersection de deux plans homologues $\alpha$ et $\alpha_1$ des espaces. Tout rayon $s$ de ce complexe, considéré comme élément de $\Sigma$ et de $\alpha$, est situé avec son correspondant $s_1$ de $\Sigma_1$ dans un même plan $\alpha_1$ et se distingue par là d'un rayon quelconque de l'espace. Considérons le point d'intersection $ss_1$ des deux rayons homologues comme appartenant à $\Sigma_1$, le point qui lui correspond dans $\Sigma$ est situé sur $s$, en sorte que ce complexe de rayons se présente aussi à nous comme l'ensemble des droites qui joignent les points homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$. Donc :

*Le complexe de rayons engendré par les deux espaces collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ se compose aussi bien des droites d'intersection des plans homologues que de celles qui unissent les points homologues des espaces; conséquemment, il est réciproque à lui-même; il se compose en outre de toutes les droites qui coupent les droites qui leur correspondent.*

Deux gerbes homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ engendrent l'une avec l'autre le système de cordes d'une courbe gauche du troisième ordre qu'on appellera la *courbe double* du complexe, parce que toutes ses cordes font

partie de ce complexe. Cette courbe peut se décomposer en une droite et une conique ou en trois droites, et cela arrivera nécessairement si les espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ont un faisceau de plans correspondant commun. Toutes les cordes de la courbe gauche qui passent par les centres S et S' des gerbes sont situées sur deux surfaces coniques du second ordre. — De plus, deux systèmes plans homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ engendrent le système d'axes d'un faisceau de plans du troisième ordre qui appartient au complexe et que nous appellerons le *faisceau de plans double* du complexe ; et tous les axes de ce faisceau de plans qui sont situés dans les deux systèmes plans forment un faisceau de rayons du second ordre.

Ainsi :

| | |
|---|---|
| Tous les rayons du complexe, qui passent par un point quelconque S, forment une surface conique du second ordre qui | Tous les rayons du complexe, qui sont situés dans un plan quelconque, forment un faisceau de rayons du second ordre qui |

peut se décomposer en deux faisceaux du premier ordre. C'est à cause de cette propriété fondamentale que nous dirons que le complexe de rayons est du *second degré* ou *quadratique;* les surfaces coniques et les faisceaux de plans qu'il renferme s'appellent *les cônes et les faisceaux de rayons du complexe*.

Les espaces collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ peuvent avoir comme éléments correspondants communs des points et des plans isolés ou en nombre infini ; nous dirons que ce sont les *points principaux* et les *plans principaux* du complexe de rayons engendré par $\Sigma$ et $\Sigma_1$. Les théorèmes qu'on vient d'énoncer sont sujets à une exception pour ces points et ces plans; en effet, comme tout rayon passant par un point principal ou contenu dans un plan principal est coupé par le rayon qui lui correspond, on voit que :

*Tout rayon passant par un point principal ou situé dans un plan principal fait partie du complexe de rayons ; tous les cônes et toutes les courbes doubles du complexe passent donc par tous les points principaux, tous les faisceaux de plans doubles passent par tous les plans principaux du complexe.*

Comme les systèmes plans collinéaires de $\Sigma$ et $\Sigma_1$, qui sont superposés dans un plan principal, ont au moins un point correspondant commun,

(II, page 139-140), tout plan principal doit renfermer au moins un point principal et de même par tout point principal il doit passer au moins un plan principal.

*Si un faisceau S de rayons du premier ordre contient plus de deux rayons du complexe, il se compose uniquement de rayons de ce complexe; son centre est situé sur un plan principal et son plan passe par un point principal du complexe.*

En effet, le faisceau S de rayons de $\Sigma$ ayant pour correspondant le faisceau $S_1$ de $\Sigma_1$, ces faisceaux doivent, dans le cas qui nous occupe, être concentriques, ou dans un même plan, ou perspectifs, en sorte que chaque rayon de S coupe le rayon correspondant de $S_1$. Dans le premier cas, le centre du faisceau est un point principal; dans le second, son plan est un plan principal; nous n'avons donc à démontrer la dernière partie du théorème que pour le troisième cas, où les faisceaux S et $S_1$ ne sont ni concentriques, ni coplanaires, mais perspectifs. Or au rayon $\overline{SS_1}$ de $\Sigma$ correspond un rayon de $\Sigma_1$, passant par $S_1$, qui est situé dans un même plan principal avec $\overline{SS_1}$; car le plan qui unit ces deux rayons homologues contient encore deux autres rayons homologues appartenant aux faisceaux, de sorte qu'il renferme deux rayons de $\Sigma$ et en même temps les deux rayons correspondants de $\Sigma_1$. On voit d'une manière analogue que la droite de $\Sigma$ suivant laquelle se coupent les plans des deux faisceaux perspectifs a un point principal commun avec la droite qui lui correspond.

Nous donnerons à tout point, dont le cône du complexe se décompose en deux faisceaux ordinaires de rayons, le nom de point *singulier;* et à tout plan, dont le faisceau de rayons du complexe se compose de deux faisceaux de rayons du premier ordre, celui de *plan singulier* du complexe. De ce qui précède, on déduit alors le théorème suivant :

*Le lieu de tous les points singuliers du complexe se compose des plans principaux et le lieu de tous les plans singuliers est formé des points principaux du complexe.*

Pour que tous les cônes et les faisceaux de rayons du complexe ne se décomposent pas chacun en deux faisceaux de rayons du premier ordre, nous supposerons désormais que les espaces collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ n'ont comme élément correspondant commun ni un faisceau de plans, ni une ponctuelle. Le complexe n'a alors que des points et plans principaux isolés, et il n'a au plus que quatre points et quatre plans principaux. Lorsqu'il existe quatre points principaux réels, ces points forment un

tétraèdre dont les faces sont les quatre plans principaux du complexe. Si l'on rapporte deux espaces collinéairement l'un à l'autre de telle manière qu'ils aient pour éléments correspondants communs les sommets A,B,C,D d'un tétraèdre et qu'on fasse correspondre entre eux deux points arbitraires $E, E_1$ qui ne soient ni situés sur les faces du tétraèdre, ni coplanaires avec aucune de ses arêtes, ces deux espaces engendrent un complexe *tétraédral* de rayons, dont ABCD est le *tétraèdre principal* et dont $\overline{EE_1}$ est un rayon quelconque.

Soient $\alpha, \alpha_1$ et $\beta, \beta_1$ deux couples quelconques de plans homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$, dont les droites d'intersection sont par conséquent deux rayons $a$ et $b$ du complexe ; $\overline{\alpha\beta}$ et $\overline{\alpha_1\beta_1}$ sont alors les axes de deux faisceaux homologues de plans des espaces collinéaires ; ces faisceaux de plans engendrent une surface réglée ou un cône du second ordre, *contenu dans le complexe*, qui passe par $a, b$ et par tous les points principaux :

Donc :

*Deux rayons quelconques* a, b *du complexe peuvent être réunis par une surface du second ordre, qui renferme un système de rayons du complexe ainsi que tous les points principaux.*

De même il passe par $a$ et $b$ une surface de seconde classe tangente à tous les plans principaux. — Cette surface du second ordre, passant par $a, b$ et tous les points principaux, peut être engendrée par deux faisceaux projectifs de plans $a, b$ dont deux plans homologues se coupent en chaque point principal. Dans le cas d'un tétraèdre principal réel, on a immédiatement les propriétés fondamentales suivantes du complexe tétraédral[1].

*Les sommets du tétraèdre principal sont projetés de deux rayons quelconques du complexe par des faisceaux projectifs de plans.*

*Les faces du tétraèdre principal sont coupées par deux rayons quelconques du complexe suivant des ponctuelles projectives.*

Ces théorèmes fournissent pour le problème 15 du supplément au *Systematische Entwickelung*...... une autre solution que celle qu'attendait *Jacob Steiner*.

*Un complexe tétraédral est complètement déterminé, quand on*

1. Elles ont été énoncées pour la première fois par M. *H. Muller* dans les *Mathemat. Annalem*, t. I.

*donne son tétraèdre principal ABCD et un rayon* s *qui ne coupe aucune arête du tétraèdre.*

En effet, le cône du complexe issu d'un point quelconque S situé sur *s* se trouve tout d'abord déterminé par ses cinq rayons *s*, $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$; lorsque S est situé dans l'un des plans principaux, $\overline{BCD}$ par exemple, ce cône se décompose en deux faisceaux de rayons, dont l'un est dans le plan $\overline{BCD}$ et l'autre dans le plan $\overline{As}$. En effet, ce dernier faisceau contient trois rayons du complexe, à savoir : $\overline{SA}$, *s* et le rayon du complexe situé dans le plan $\overline{BCD}$; par conséquent il se compose uniquement de rayons du complexe. Donc :

*Tous les rayons du complexe, qui coupent une face du tétraèdre en un point quelconque, forment un faisceau de rayons, dont le plan passe par les ommet opposé. Étant donnée une droite* a, *passant par un point principal A et contenue dans un plan principal* $\overline{ACD}$, *on peut en conséquence construire une droite* b, *contenue dans le plan principal* $\overline{BCD}$ *et passant par le point principal B de telle sorte que tout rayon qui coupe les droites* a *et* b *appartient au complexe.*

En s'appuyant sur ce théorème, d'après lequel le complexe tétraédral renferme une infinité de faisceaux de rayons du premier ordre, on peut en partant de *s* construire linéairement tous les autres rayons du complexe ; et comme on a précédemment démontré (II, page 152) qu'il existe un complexe possédant le tétraèdre principal ABCD et le rayon *s*, on voit de plus que ce complexe est complètement déterminé. En passant, on reconnaît encore que :

Tous les cônes du complexe, dont les sommets sont situés sur une droite passant par un point principal A, ont une seule et même conique commune avec le plan principal opposé $\overline{BCD}$.

Tous les faisceaux de rayons du complexe, dont les plans se coupent sur un même plan principal, sont projetés du point principal opposé suivant un seul et même faisceau de plans du second ordre.

Pour tout complexe de rayons engendré par deux espaces collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ on a ce théorème :

*Trois rayons quelconques* a, b, c *du complexe, qui ne sont pas situés sur une même surface réglée ou conique contenue dans le complexe, déterminent une courbe double du complexe, dont ils sont des cordes, et un faisceau double de plans, dont ils sont des axes.*

En effet, les trois couples de plans homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ qui se coupent suivant $a,b$ et $c$ appartiennent à deux gerbes homologues déterminées de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ et ces dernières engendrent la courbe double, déterminée par $a,b,c$, et son système de cordes. Lorsque deux des rayons $a,b,c$ se coupent, la courbe double passe par le point d'intersection P ; et comme tous les rayons du complexe qui passent par P sont engendrés par deux faisceaux homologues de plans de $\Sigma$ et $\Sigma_1$, on voit que :

*Un rayon* a *du complexe et un point P extérieur à* a *déterminent une courbe double du complexe qui passe par P et* a *a pour corde. Par deux points quelconques* $P, P_1$ *d'un rayon* a *d'un complexe il passe toujours une courbe double déterminée.*

Il faut toutefois que P et $P_1$ ne soient pas des points principaux. — Les courbes doubles en nombre infini, qui d'après le théorème précédent sont situées sur un cône quelconque P du complexe, ne peuvent avoir deux à deux plus de quatre points communs différents de P ; car s'il en était autrement, elles coïncideraient (II, page 105) ; il résulte encore de là que le complexe peut avoir tout au plus quatre points principaux. Mais en même temps on reconnaît qu'il y a différentes espèces de complexes, suivant que les quatre points sont réels ou imaginaires deux à deux, que deux, trois d'entre eux ou tous les quatre coïncident.

*Lorsque deux cônes du complexe, ou en général deux surfaces du second ordre contenues dans ce complexe, se coupent suivant un rayon* a *du complexe et une courbe gauche du troisième ordre, cette dernière est une courbe double du complexe.*

En effet, cette courbe coïncide avec la courbe double déterminée par $a$ et deux autres rayons $b,c$ du complexe situés sur les deux surfaces.

Deux courbes doubles quelconques $k^3$ et $l^3$ sont engendrées par deux couples de gerbes homologues $K, K_1$ et $L, L_1$ de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ; elles ont donc pour cordes communes toutes celles suivant lesquelles se coupent les plans correspondants des faisceaux $\overline{KL}$ et $\overline{K_1L_1}$. Comme ces deux faisceaux homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont projectifs, les deux courbes doubles sont situées sur une même surface du second ordre contenue dans le complexe, et :

Les cordes communes de deux courbes doubles quelconques du complexe forment un système

Les axes communs de deux faisceaux doubles de plans du complexe forment un système réglé ou

réglé ou une surface conique du second ordre.

un faisceau de rayons du second ordre.

Le complexe est complètement déterminé quand on donne deux quelconques $k^3$ et $l^3$ de ses courbes doubles. En effet, si l'on réunit $k^3$ et $l^3$ avec l'une quelconque $s$ de leurs cordes communes par deux surfaces du second ordre, ce qui est possible d'une infinité de manières, ces surfaces, étant contenues dans le complexe, se coupent suivant $s$ et suivant une courbe double, qui en général, est différente de $k^3$ et $l^3$.

Toutes les courbes doubles ainsi déterminées ont en général chacune au moins une corde commune avec un plan quelconque et cette corde appartient au faisceau de rayons du complexe contenu dans ce plan; comme ce faisceau est du second ordre, il est déterminé par cinq de ses rayons. $k^3$ et $l^3$ déterminent donc tous les rayons du complexe situés dans un plan quelconque et par suite, d'une manière générale, tous les rayons du complexe.

Nous pouvons de plus énoncer le théorème suivant, dont la démonstration a déjà été donnée (II, page 152) pour le cas d'un tétraèdre principal réel.

*Pour rapporter collinéairement l'un à l'autre deux systèmes de l'espace, de telle manière qu'ils engendrent un complexe de rayons donné, on peut assigner comme éléments correspondants l'un à l'autre deux points quelconques P et $P_1$, situés sur un même rayon du complexe, ou deux plans se coupant suivant un même rayon de ce complexe ou enfin deux rayons du complexe situés dans un même plan. De cette manière, étant donné un élément quelconque de l'un des systèmes, son correspondant dans l'autre système est complètement déterminé.*

Les points P et $P_1$, qui doivent se correspondre dans les systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ de l'espace, sont les centres de deux gerbes collinéaires, dont la collinéation est déterminée par le complexe donné. En effet, tout rayon du complexe passant par P est situé dans un même plan avec un rayon correspondant de la gerbe $P_1$; et les cônes du complexe P et $P_1$, qui ont en commun le rayon $\overline{PP_1}$ et une courbe gauche $k^3$ passant par P et $P_1$, sont projectivement rapportés l'un à l'autre de telle sorte que leurs rayons homologues se coupent deux à deux sur la courbe double $k^3$. En même temps, les gerbes P et $P_1$ sont par là même rapportées collinéairement l'une à l'autre de telle manière que leurs plans homologues ont deux à deux en commun une corde de $k^3$.

Soit maintenant $l^3$ une courbe double quelconque du complexe, différente de $k^3$, et soient Q et $Q_1$ les centres encore inconnus des gerbes collinéaires de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ qui engendrent toutes les cordes de la courbe gauche $l^3$ du troisième ordre. Les cordes communes à $k^3$ et $l^3$ forment un système réglé ou une surface conique du second ordre et par conséquent sont projetées de P et $P_1$ par deux faisceaux de plans. Les axes de ces faisceaux sont ou des directrices du système réglé ou des rayons de la surface conique et ont chacun en commun avec la courbe $l^3$ un point (II. page 102) différent du sommet du cône. Nous devons prendre ces points pour centre des gerbes cherchées Q et $Q_1$ de telle sorte que $\overline{PQ}$ et $\overline{P_1Q_1}$ soient les axes de ces faisceaux de plans. En effet, rapportons collinéairement l'une à l'autre les deux gerbes qui ont ces points Q et $Q_1$ pour centres, de manière que deux plans homologues quelconques se coupent suivant une corde de la courbe double $l^3$; au faisceau de plans $\overline{PQ}$ commun aux gerbes P et Q correspond le faisceau de plans $P_1Q_1$ commun aux gerbes $P_1$ et $Q_1$; et ceci est nécessaire et suffisant pour que les gerbes P et Q de $\Sigma$ et les gerbes $P_1$ et $Q_1$ qui leur sont collinéaires établissent la collinéation entre les deux systèmes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ de l'espace. (Voir II. page 24-25). Le complexe engendré par $\Sigma$ et $\Sigma_1$ est identique avec le complexe donné, ainsi qu'on le demandait, puisqu'il a en commun avec ce dernier toutes les cordes des courbes doubles $k^3$ et $l^3$.

En passant, il résulte de cette démonstration que :

*Deux courbes quelconques du troisième ordre* $k^3$ *et* $l^3$, *dont les cordes communes forment un système réglé ou une surface conique du second ordre, peuvent toujours être considérées comme des courbes doubles d'un complexe de rayons qu'elles déterminent.*

Si l'on nous donne comme éléments homologues des systèmes collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ non plus deux points P et $P_1$ d'un rayon du complexe, mais deux rayons quelconques $s$ et $s_1$ de ce complexe, qui se coupent, ou deux plans quelconques $\pi$ et $\pi_1$ passant par un rayon du complexe, nous pourrons immédiatement ramener ce cas à celui que nous avons considéré d'abord. En effet, à tout point P de $s$ correspond le point $P_1$ de $s_1$ qui est réuni à P par un troisième rayon du complexe situé dans le plan $\overline{ss_1}$; et comme le faisceau de rayons du complexe situé dans $\overline{ss_1}$ nous est donné, puisqu'il fait partie du complexe, nous pouvons trouver immédiatement le point $P_1$ qui correspond à P. De même, étant donné un rayon quelconque du complexe S du plan $\pi$, nous pouvons aisément trouver le rayon correspondant $S_1$ de $\pi_1$, puisque ces

deux droites doivent se couper sur la droite $\overline{\pi\pi_1}$ ; au point P où se coupent deux rayons du complexe situés dans $\pi$ correspond le point $P_1$ où se coupent les deux rayons homologues situés dans $\pi_1$. Comme les gerbes des espaces collinéaires qui contiennent les plans $\pi$ et $\pi_1$, engendrent une courbe double passant par leurs centres $P, P_1$ et dont $\overline{\pi\pi_1}$ est une corde, on voit en passant que :

*Deux plans passant par un rayon* a *du complexe sont coupés en des systèmes de point collinéaires par les courbes doubles qui ont* a *pour corde.*

Étant donné un système $\Sigma$ de l'espace, construisons tous les systèmes collinéaires possibles qui engendrent avec $\Sigma$ un complexe de rayons donné; tous les points qui correspondent à un point donné P de $\Sigma$ sont situés sur le cône du complexe issu de P, parce que chacun d'eux est réuni à P par un rayon du complexe ; tous les plans, qui correspondent à un plan donné $\pi$ de $\Sigma$, passent par les rayons du complexe contenus dans $\pi$ ; si l'on considère les rayons du complexe qui correspondent à à un rayon donné $s$ du complèxe appartenant à $\Sigma$ et qui par conséquent le coupent, tous ceux qui passent par un point donné de $s$ forment un cône du second ordre, et tous ceux qui sont situés avec $s$ dans un plan arbitraire constituent un faisceau de rayons du second ordre.

Deux quelconques de ces espaces collinéaires à $\Sigma$ sont aussi collinéaires entre eux; c'est seulement dans des cas particuliers, qu'ils engendrent l'un avec l'autre le même complexe que chacun d'eux détermine avec $\Sigma$.

Supposons en effet que les espaces collinéaires $\Sigma$, $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ engendrent deux à deux le complexe donné, et soient $P, P_1, P_2$ trois points homologues, $\pi, \pi_1, \pi_2$ trois plans homologues et $s, s_1, s_2$ trois rayons homologues du complexe appartenant respectivement à $\Sigma, \Sigma_1$ et $\Sigma_2$; voici ce qui doit arriver : les points homologues $P, P_1, P_2$ sont situés sur un seul et même rayon du complexe ou sur une seule et même courbe double, parce que les cônes P et $P_1$ du complexe contiennent respectivement les rayons $\overline{PP_1}$ et $\overline{PP_2}$ du complexe, que par suite ils passent tous deux par $P_2$ et ont de plus le rayon $\overline{PP_1}$ qui leur est commun ; de même les trois plans homologues $\pi, \pi_1, \pi_2$, font partie d'un seul et même faisceau double de plans, parce que chacune de leurs trois droites d'intersection est un rayon du complexe, ou bien ils se coupent suivant un seul et même rayon du complexe; enfin les trois rayons homologues $s, s_1, s_2$ du complexe, étant tels que l'un quelconque d'entre eux coupe les deux autres,

doivent être situés dans un seul et même plan et alors faire partie du faisceau du complexe situé dans ce plan, ou bien ils doivent passer par un seul et même point et appartenir au cône du complexe issu de ce point.

Si les plans homologues $\pi, \pi_1, \pi_2$ passent par un même rayon $a$ du complexe, trois points homologues $P, P_1, P_2$ de ces plans sont situés sur une même courbe double $k^3$, dont $a$ est une corde, et trois plans homologues de $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ passant respectivement par $P, P_1, P_2$ se coupent suivant une corde de $k^3$; trois rayons correspondants quelconques du complexe, contenus dans ces plans, passent par un seul et même point de la corde, puisqu'ils doivent se couper. Donc :

*Étant donné un système $\Sigma$ de l'espace, si l'on construit tous les systèmes qui lui sont collinéaires, et qui non seulement engendrent avec $\Sigma$ un complexe donné, mais qui l'engendrent également quand on les prend deux à deux, il se produira l'un des deux cas suivants.*

1° *Tout plan de $\Sigma$ forme avec tous ses plans correspondants un faisceau du premier ordre, dont l'axe est un rayon du complexe, tout point de $\Sigma$ est situé avec ses homologues une courbe double et tout rayon du complexe constitue avec ses homologues un cône du complexe ;*

2° *Ou bien, tout plan de $\Sigma$ forme avec ses homologues un faisceau double de plans, tout point de $\Sigma$ est situé avec ses homologues sur un rayon du complexe et tout rayon du complexe constitue avec ses homologues un faisceau de rayons du complexe.*

# DIX-NEUVIÈME LEÇON.

**Faisceaux de surfaces du second ordre. Courbes gauches et faisceaux de plans du quatrième ordre.**

Si deux systèmes collinéaires de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont rapportés réciproquement à un troisième $\Sigma'$, le complexe de rayons engendré par $\Sigma$ et $\Sigma_1$ se trouve par là même rapporté projectivement à $\Sigma'$ et d'une double manière. En effet, tout point de $\Sigma'$ a pour correspondants deux plans homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ et par conséquent aussi le rayon du complexe suivant lequel ils se coupent; et si un point parcourt une droite quelconque $g'$ ou un plan $\alpha'$ de $\Sigma'$, le rayon correspondant du complexe décrit une surface réglée ou une surface conique projective à $g'$, ou bien le système de cordes projectif à $\alpha'$ d'une courbe double du complexe. D'un autre côté, tout plan de $\Sigma'$ a pour correspondants deux points homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ et le rayon du complexe qui les réunit; et si ce plan pivote autour de l'un de ses points $A'$, le rayon correspondant décrit le système d'axes d'un faisceau de plans double du complexe, projectif à la gerbe $A'$. Tout rayon du complexe de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ a pour correspondants dans $\Sigma'$ deux rayons qui se coupent, aussi bien que leur point d'intersection et le plan qui les réunit. Suivant l'expression usitée, le complexe de rayons engendré par $\Sigma$ et $\Sigma_1$ est *représenté* projectivement aussi bien dans le système de points $\Sigma'$ que dans le système de plans $\Sigma'$ de l'espace.

Nous allons supposer maintenant que les espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$, réciproques à $\Sigma'$, soient en involution avec $\Sigma'$ et constituent avec lui deux systèmes polaires ordinaires de l'espace. Nous pouvons prendre arbitrairement pour leurs surfaces doubles deux surfaces quelconques du second ordre

qui ne soient pas des cônes et qui ne se décomposent pas en plans. Les théorèmes de la dernière leçon deviennent ainsi applicables aux surfaces du second ordre et se présentent avec une clarté et une signification nouvelles. On voit immédiatement que :

*Deux systèmes polaires de l'espace déterminent en général un complexe de rayons du second ordre; ce complexe contient toutes les droites dont les deux plans polaires se coupent. A tout point correspond un rayon du complexe qui lui est doublement conjugué, c'est la droite d'intersection de ses deux plans polaires; de même tout plan a pour correspondant un rayon du complexe, qui lui est doublement conjugué; c'est la droite qui joint ses deux pôles.*

D'après cela, un rayon $g'$ du complexe a pour conjugués dans les deux systèmes polaires aussi bien un plan $\gamma$ qu'un point G; les deux polaires $g$ et $g_1$ de $g'$ passent par G et sont situées dans $\gamma$. Cherchons les deux polaires de $g$; l'une coïncide avec $g'$, l'autre est située avec $g'$ dans l'un des plans polaires de G et coupe $g'$ en l'un des pôles de $\gamma$. Donc :

*Le complexe de rayons se correspond à lui-même dans chacun des deux systèmes polaires, puisque les polaires de chaque rayon du complexe sont encore des rayons du complexe.*

Chaque point principal du complexe de rayons est le point où se réunissent les deux pôles d'un même plan; ce plan est un plan principal du complexe, parce que les deux plans polaires du point principal se confondent avec lui. Par suite

*A chaque point principal du complexe correspond comme polaire dans les deux systèmes polaires un plan principal déterminé.*

Comme dans la dernière leçon, nous excluons le cas particulier où le complexe de rayons comprend un nombre infini de points et de plans principaux. Dans ces conditions, le complexe n'a au plus que quatre points et quatre plans principaux réels et le tétraèdre principal qu'ils constituent est un tétraèdre polaire commun aux deux systèmes polaires, puisque chacun de ses sommets est le pôle de la face opposée. L'hypothèse que nous venons de faire, à savoir qu'il ne doit exister que des points et des plans principaux isolés, peut donc aussi s'exprimer de la manière suivante :

*Les deux systèmes polaires doivent avoir au plus un tétraèdre polaire ABCD commun, de sorte que les plans polaires d'un cinquième point ne peuvent pas coïncider.*

Si ce tétraèdre polaire est réel, ses sommets seront projetés de deux quelconques des rayons du complexe suivant des faisceaux de plans projectifs, et ses faces couperont deux rayons quelconques du complexe en des ponctuelles projectives (II, page 152).

Les points d'un plan quelconque $\alpha$ ont pour conjuguées dans les deux systèmes polaires les cordes d'une courbe double $k^3$ du complexe, laquelle passe par tous les points principaux. Réciproquement, les cordes et les points d'une courbe double quelconque sont doublement conjugués aux points et aux rayons du complexe contenus dans un plan.

Les plans qui passent par un point quelconque ont pour conjugués dans les deux systèmes polaires les axes d'un faisceau double de plans du complexe. Réciproquement, les axes et les plans d'un faisceau double quelconque de plans ont pour conjugués doubles les plans et les rayons du complexe qui passent par un point.

En effet, lorsqu'un point parcourt le plan $\alpha$, ses deux plans polaires décrivent deux gerbes collinéaires et ces dernières engendrent la courbe double $k^3$ et son système de cordes. Réciproquement, si $k^3$ est donnée, déterminons les points doublement conjugués à trois cordes quelconques $a$, $b$, $c$ de $k^3$ et joignons-les par un plan; les points de ce plan ont pour conjuguées les cordes d'une courbe double qui a trois cordes $a$, $b$, $c$, communes avec $k^3$ et qui, par conséquent, est identique avec cette dernière courbe (II, page 155).

Le complexe de rayons est engendré par deux systèmes collinéaires de l'espace $\Sigma$ et $\Sigma_1$, qui sont réciproques à un troisième $\Sigma'$ et sont en involution, de telle sorte qu'ils forment avec $\Sigma'$ les deux systèmes polaires. Construisons maintenant un quatrième système de l'espace $\Sigma_2$, qui soit collinéaire avec $\Sigma$ et $\Sigma_1$ et engendre avec chacun d'eux le complexe donné; il faut (II, page 156) que trois plans homologues de $\Sigma$, $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ se coupent suivant un seul et même rayon du complexe, ou que trois points homologues de ces systèmes soient situés sur un seul et même rayon du complexe.

Dans l'un et l'autre cas, on peut démontrer que $\Sigma_2$ est aussi en involution par rapport au système $\Sigma'$, qui lui est réciproque, et qu'il constitue avec lui un système polaire; ceci du reste est évident par soi-

même, quand le complexe a un tétraèdre principal réel, puisque celui-ci est aussi un tétraèdre polaire des deux derniers systèmes polaires.

Dans le premier cas que nous venons d'indiquer, à tout point P de $\Sigma'$ correspondent respectivement dans $\Sigma$, $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ trois plans $\pi$, $\pi_1$, $\pi_2$ qui se coupent suivant un seul et même rayon du complexe et à tout point R de ce dernier correspondent trois plans $\rho$, $\rho_1$ et $\rho_2$ qui doivent se couper suivant un rayon du complexe passant par P, parce que P et R sont conjugués dans les deux systèmes polaires donnés. Or, comme chacun des points P et R de $\Sigma'$ a pour correspondant dans $\Sigma_2$ un plan passant par l'autre point, la ponctuelle $\overline{PR}$ de $\Sigma'$ est en involution avec le faisceau de plans $\overline{\pi_2\rho_2}$ qui lui correspond dans $\Sigma_2$.

Supposons qu'un système plan $\varepsilon$ soit donné dans $\Sigma'$ et qu'il ait pour correspondant une gerbe $E_2$ de $\Sigma_2$, dont le sommet ne soit pas situé sur $\varepsilon$; nous pourrons de cette manière trouver dans $\varepsilon$ une infinité de ponctuelles qui soient en involution avec les faisceaux de plans correspondants de $E_2$; il résulte de là que $\varepsilon$ et $E_2$ sont en involution (II, page 72). Et comme il en sera de même pour tous les systèmes plans de ce genre appartenant à $\Sigma'$ et pour les gerbes correspondantes de $\Sigma_2$, $\Sigma'$ et $\Sigma_2$ sont en involution, comme on l'a énoncé.

Quant à ce qui regarde le second cas, qui se déduit du premier au moyen de la loi de réciprocité, on peut en donner une démonstration directe en suivant une marche analogue.

Si l'on a égard au dernier théorème de la dix-huitième leçon, (II, page 156), il résulte de ce qui précède que :

*Étant donnés deux systèmes polaires de l'espace, si l'on construit tous les systèmes polaires qui engendrent soit entre eux, soit avec les deux systèmes donnés le même complexe que ces deux systèmes polaires donnés, il se produit l'un des deux cas suivants :*

1° *Les plans polaires d'un point quelconque se coupent suivant un seul et même rayon du complexe, les pôles d'un point quelconque sont situés en général sur une courbe gauche du troisième ordre, dont le système de cordes fait partie du complexe, et les polaires d'un rayon quelconque du complexe forment un cône du complexe, qui est du second ordre ;*

2° *Ou bien, les plans polaires d'un point quelconque constituent en général un faisceau de plans du troisième ordre, dont le système d'axes fait partie du complexe, les pôles d'un plan quelconque sont situés sur un seul et même rayon du complexe et les polaires d'un*

*rayon quelconque du complexe constituent un faisceau de rayons du second ordre appartenant au complexe.*

Nous dirons, dans le premier cas, que toutes les surfaces doubles des systèmes polaires constituent un faisceau ponctuel de surfaces du second ordre $F^2$, ou pour abréger un *faisceau ponctuel de $F^2$*; et que dans le second cas, elles forment un faisceau tangentiel de surfaces de seconde classe $\Phi^2$, ou un *faisceau tangentiel de* $\Phi^2$. Comme, dans ces deux cas, deux systèmes polaires déterminent tous les autres, il en résulte que

*Deux surfaces de second ordre et de seconde classe déterminent un faisceau ponctuel de $F^2$, qui les contient, et un faisceau tangentiel de $\Phi^2$, qui passe par elles.*

Puisque dans le premier cas, les plans polaires d'un point quelconque P constituent un faisceau de plans du premier ordre dont il ne passe en général par P qu'un plan unique $\pi$, le point P est situé sur la surface double du système polaire dans lequel P est le pôle de $\pi$. Cependant, si P est situé sur l'axe de ce faisceau de plans, et par conséquent se trouve sur chacun de ses plans polaires, la surface double de chacun des systèmes polaires passe par P. Les pôles d'un plan $\varepsilon$ sont situés en général sur une courbe gauche du troisième ordre; comme elle a au moins un point et au plus trois points communs avec $\varepsilon$, il y a au moins un et au plus trois des systèmes polaires dont les surfaces doubles soient tangentes à $\varepsilon$ (le contact ayant d'ailleurs lieu aux points d'intersection). Donc :

Dans un faisceau ponctuel de $F^2$, il ne passe qu'une seule surface par un point arbitraire P, quand P n'est pas situé sur chacune des surfaces du faisceau. Il y a au moins une et au plus trois surfaces du faisceau qui soient tangentes à un plan arbitraire $\varepsilon$.

Dans un faisceau tangentiel de $\Phi^2$, il n'y a qu'une seule surface tangente à un plan arbitraire $\pi$, quand $\pi$ n'est pas tangent à toutes les surfaces du faisceau. Par un point arbitraire, il passe au moins une et au plus trois surfaces du faisceau.

Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent, chacune des surfaces du faisceau ponctuel de $F^2$ qu'elles déterminent passe par la courbe d'intersection, d'après ce qui précède. Cette courbe d'intersection s'appelle *la courbe fondamentale*, *la ligne double* ou *la base* du faisceau

ponctuel de $F^2$. C'est en général *une courbe gauche du quatrième ordre*, qui n'a pas plus de quatre points communs avec un plan quelconque, ni plus de deux points communs avec une droite quelconque. En effet, les deux surfaces du second ordre sont coupées par un plan suivant deux courbes du second ordre qui ne peuvent avoir plus de quatre points communs, à moins qu'elles ne coïncident. La courbe du quatrième ordre peut aussi, comme nous l'avons vu (II, pages 56 et 122) se décomposer en deux coniques, ou en une droite et une courbe gauche du troisième ordre, ou bien en quatre droites ; nous ne nous occuperons pas davantage ici de ces cas particuliers.

Les plans tangents communs à deux surfaces du second ordre forment en général un *faisceau de plans du quatrième ordre*, tel qu'il ne passe pas plus de quatre de ses plans par un point quelconque P. En effet, les deux cônes du second ordre, ayant leurs sommets en P et circonscrits aux surfaces données, ne peuvent avoir plus de quatre plans tangents communs, à moins de coïncider. La double proposition énoncée ci-dessus nous donne les théorèmes suivants pour ces courbes gauches et faisceaux de plans du quatrième ordre :

Par une courbe gauche du quatrième ordre $k^4$, intersection de deux surfaces $F^2$ et $F_1^2$ du second ordre, et par un point quelconque P extérieur à $k^4$, on peut faire passer une surface $F^2_2$ du second ordre. Cette surface appartient au faisceau ponctuel de $F^2$ déterminé par $F^2$ et $F_1^2$.

Étant donné un faisceau de plans du quatrième ordre, circonscrit à deux surfaces $\Phi^2$ et $\Phi_1^2$ de seconde classe, on peut y inscrire une troisième surface $\Phi^2_2$ de seconde classe qui soit tangente à un plan arbitraire donné. Cette surface $\Phi^2_2$ appartient au faisceau tangentiel de $\Phi^2$ déterminé par $\Phi^2$ et $\Phi_1^2$.

Choisissons le point P (théorème de gauche) de manière qu'il soit situé sur une même droite $g$ avec deux points de la courbe $k^4$, la surface $F^2_2$ sera réglée, parce qu'elle contiendra trois points et par suite tous les points de $g$. Tout plan mené par $g$, qui sera rencontré par $k^4$ en deux nouveaux points Q et R, aura en commun avec $F^2_2$ la droite $g$ et la droite $\overline{QR}$ ; cette dernière en effet a en commun avec $F^2_2$ les points Q et R et un point de $g$ ; elle est donc située tout entière sur $F^2_2$. Donc.

*Toutes les cordes $\overline{QR}$ de la courbe gauche du quatrième ordre, qui*

*coupent une corde donnée* g *en des points extérieurs à la courbe, constituent un système réglé ou une surface conique du second ordre.*

Si ces cordes sont situées sur une surface conique du second ordre, le centre A de cette surface est un point principal du complexe de rayons. En effet, il existe sur chaque corde un point qui est harmoniquement séparé de A par deux points de la courbe gauche du quatrième ordre et par suite aussi par chacune des surfaces $F^2$ et $F_1^2$ ; et tous ces quatrièmes points harmoniques sont situés sur le plan polaire du point A par rapport aux deux surfaces $F^2$ et $F_1^2$. Réciproquement :

Si deux surfaces du second ordre, qui ont un tétraèdre polaire ABCD commun,

| | |
|---|---|
| se coupent suivant une courbe gauche $k^4$ du quatrième ordre, cette courbe est projetée de chacun des sommets du tétraèdre polaire suivant une surface conique du second ordre. | sont inscrites dans un faisceau de plans du quatrième ordre, ce faisceau sera coupé par chacune des faces du tétraèdre polaire suivant un faisceau de rayons du second ordre. |

En effet, toute droite, qui réunit le sommet A à un point quelconque Q de la courbe $k^4$, contient encore un second point R de la courbe ; et de plus Q et R sont harmoniquement séparés par A et par son plan polaire $\overline{BCD}$. Une corde $g$ passant par A sera donc coupée au point A par toute autre corde qui est située dans un même plan avec $g$, mais qui n'a en commun avec $g$ aucun point de la courbe $k^4$.

| | |
|---|---|
| Deux courbes gauches du quatrième ordre, $k^4$ et $l^4$, ont au plus huit points communs. | Deux faisceaux de plans du quatrième ordre ont au plus huit plans communs. |

Soient P, Q et R trois quelconques des points communs aux courbes gauches $k^4$ et $l^4$; la corde commune $\overline{PQ}$ peut alors être réunie aux deux courbes par le moyen de deux surfaces réglées du second ordre qui auront en commun, en plus de la corde $\overline{PQ}$, une courbe gauche du troisième ordre.

Cette courbe gauche du troisième ordre, dont $\overline{PQ}$ est une corde (II, page 104) doit passer par R et par tous les autres points différents de P et Q, qui sont communs à $k^4$ et $l^4$. La corde $\overline{PR}$ nous donne de même une seconde courbe gauche du troisième ordre, qui doit égale-

ment passer par tous les points communs des courbes $k^4$ et $l^4$ différents de P, Q et R. Deux courbes gauches du troisième ordre, qui ne sont pas identiques, peuvent avoir au plus cinq points communs ; par conséquent, en dehors de P, Q et R, il y a au plus cinq autres points communs aux deux courbes gauches du quatrième ordre.

La démonstration ci-dessus montre de plus que

*Si deux courbes gauches du quatrième ordre ont huit points communs, et si l'on réunit six de ces points par une courbe gauche du troisième ordre et les deux autres par une droite, cette droite est une corde de la courbe gauche du troisième ordre*[1].

Si dans la démonstration du théorème précédent on remplace la courbe gauche du quatrième ordre $k^4$ par une courbe gauche du troisième ordre et l'une de ses cordes, on déduit par la même méthode que

*Une courbe gauche du troisième ordre et une courbe gauche du quatrième ordre ont au plus six points communs.*

D'après cela, une courbe gauche du troisième ordre est rencontrée en six points au plus par une surface du second ordre qui ne passe pas par elle.

*Trois surfaces du second ordre, qui n'ont en commun ni une droite, ni une courbe du second, du troisième ou du quatrième ordre, ont au plus huit points communs.*

*Trois surfaces de seconde classe, dont les plans tangents communs ne forment pas un faisceau du premier, du second, du troisième ou du quatrième ordre, ont au plus huit plans tangents communs.*

En effet, quand l'une des trois surfaces du second ordre est coupée par les deux autres suivant des courbes gauches du quatrième ordre, le théorème de gauche est une conséquence immédiate des précédents. Si l'une des deux courbes d'intersection, ou chacune d'elles, se décompose en des droites ou des coniques, ou en une droite et une courbe gauche du troisième ordre, la démonstration, très facile du reste, du théorème se déduit en partie des théorèmes précédents et en partie des propriétés connues des courbes du second, du troisième et du quatrième ordre.

---

1. Cette propriété importante des huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre a été énoncée pour la première fois par *Hesse* (Journal de Crelle, t. 26).

*Sept points quelconques déterminent en général un huitième point, qui est situé sur toutes les surfaces du second ordre passant par les sept points donnés*[1].

Si, parmi les sept points donnés, trois sont situés sur une droite et cinq sur une conique, ou s'ils sont tous les sept sur une courbe gauche du troisième ordre, tout point de cette ligne du premier, du second ou du troisième ordre peut être considéré comme le huitième point déterminé (incomplètement) par elle. S'il ne se produit aucun de ces cas particuliers, on trouvera le huitième point par la construction linéaire qui suit. Par six des sept points donnés on fait passer une courbe gauche du troisième ordre et par le septième point on lui mène une corde $s$ (II, page 101) ; puis on recommence la même construction en remplaçant le septième point dont on vient de se servir, par l'un des six autres ; les deux cordes $s$, que l'on obtient ainsi, se coupent suivant le huitième point cherché. La corde construite en premier lieu a le point ainsi déterminé qui lui est commun avec une surface quelconque du second ordre menée par les sept points ; cela résulte immédiatement de l'un des théorèmes précédents et de ce que la corde peut être réunie à la courbe gauche correspondante du troisième ordre par un faisceau de surfaces du second ordre.

Par huit points quelconques de l'espace, dont cinq ne sont pas contenus dans un même plan, ni trois situés sur une même droite, on ne peut en général faire passer qu'une seule courbe du quatrième ordre : car lorsque deux de ces courbes se coupent suivant ces huit points, les points ont une position particulière, puisque toute courbe du troisième ordre, qui passe par six d'entre eux, a pour corde la droite qui joint les deux autres. Nous pouvons considérer la courbe gauche du quatrième ordre comme construite, du moment qu'on nous donne deux surfaces quelconques du second ordre qui se coupent suivant cette courbe ; et nous aurons effectivement deux surfaces de ce genre en résolvant le problème suivant :

*Faire passer des surfaces réglées du second ordre par huit points donnés quelconques, dont six ne sont pas dans un même plan ni quatre sur une même droite.*

---

1. Les sommets de deux tétraèdres polaires quelconques d'un système polaire de l'espace constituent (II, page 79) un groupe de huit points par lesquels on peut faire passer un nombre doublement infini de surfaces du second ordre.

Si trois quelconques des points donnés sont situés sur une droite $g$, celle-ci appartient à chacune des surfaces cherchées. Si en même temps les cinq autres points sont dans un même plan $\varepsilon$, et par suite sur une même conique $\varkappa$, qui peut aussi se composer de deux droites, toute surface du second ordre menée par les huit points se décompose en deux plans, et $\varepsilon$ est l'un deux ; en effet, $\varepsilon$ a en commun avec la surface six points qui ne sont pas situés sur une même conique. Si les huit points sont sur quatre droites passant par un seul et même point et dont l'une contient trois de ces points, ces droites sont situées sur toutes les surfaces du second ordre passant par les huit points et ces surfaces sont des cônes. Dans tous les autres cas, le problème peut se résoudre comme il suit :

Parmi les huit points, on peut en général en choisir six de différentes manières, de telle sorte que quatre d'entre eux ne soient pas dans un même plan. Nous réunissons ces six points par une courbe gauche du troisième ordre, par le septième et le huitième point nous lui menons des cordes et enfin par ces cordes et la courbe gauche du troisième ordre nous faisons passer une surface réglée. Un autre groupement des huit points donnés nous fournit une seconde surface réglée. Le groupement supposé n'est quelquefois inadmissible que lorsque les huit points sont situés sur les quatre côtés $a, b, c, d$ d'un quadrilatère gauche. Dans ce cas, nous coupons deux côtés opposés $a$ et $c$ du quadrilatère par une droite $f$ qui ne passe par aucun des quatre sommets ; le système réglé auquel appartiennent les trois rayons $b, d, f$ est alors situé sur une surface réglée passant par les huit points.

*Par neuf points donnés quelconques, mener une surface du second ordre.*

*Mener une surface de seconde classe tangente à neuf plans donnés quelconques.*

Par huit des points donnés nous menons deux surfaces réglées $F^2$ et $F_1^2$ et nous cherchons ensuite la surface $F_2^2$ du faisceau déterminé par $F^2$ et $F_1^2$ qui passe par le neuvième point. Nous verrons plus loin (II, pages 175-176) comment on peut construire très simplement cette surface $F^2_2$.

*Par neuf points quelconques donnés, on peut mener une surface du second ordre et, en géné-*

*Par neuf plans quelconques donnés, on peut faire passer une gerbe de plans du second ordre et*

*ral, on ne peut en mener qu'une seule.*

*en général on n'en peut faire passer qu'une seule.*

En effet, s'il passe plusieurs surfaces du second ordre par les neuf points, ceux-ci sont situés sur une courbe gauche du quatrième ordre suivant laquelle se coupent deux quelconques de ces surfaces et qui peut aussi se décomposer en lignes d'ordre moins élevé. Il convient aussi de remarquer que la surface peut se décomposer en deux plans pour des positions particulières des neuf points, par exemple, quand six d'entre eux sont situés dans un même plan.

---

# VINGTIÈME LEÇON.

**Projectivité des faisceaux ponctuels de surfaces $F^2$ et des faisceaux de coniques.**

Dans la dernière leçon et à la fin de la quatorzième, nous sommes arrivés à des faisceaux de surfaces du second ordre qui, entre autres propriétés, possèdent les suivantes :

*Les plans polaires d'un point quelconque P par rapport à toutes les surfaces du faisceau forment un faisceau de plans du premier ordre. Dans le cas seulement où P est un point principal du faisceau de surfaces, tous ses plans polaires se confondent.*

Nous prenons ce théorème comme point de départ d'une théorie des faisceaux ponctuels de $F^2$. La loi de réciprocité nous permettra d'étendre immédiatement tous les théorèmes que nous trouverons aux faisceaux tangentiels de surfaces de seconde classe, dont nous étudierons du reste un cas particulier dans la vingt-troisième leçon. Dans la leçon précédente, nous avons déduit des théorèmes ci-dessus mentionnés que, par chaque point de l'espace n'appartenant pas aux surfaces du faisceau, il ne passe qu'une seule de ces surfaces.

Nous dirons maintenant que deux points sont *conjugués par rapport au faisceau ponctuel de* $F^2$, quand chacun d'eux est situé sur tous les plans polaires de l'autre. Le théorème ci-dessus peut donc aussi dans un certain sens être énoncé comme il suit :

*Deux points sont conjugués par rapport à un faisceau ponctuel de* $F^2$, *quand ils sont conjugués par rapport à deux surfaces de ce faisceau.*

Un point P de l'espace a donc pour conjugués tous les points d'une droite $p$ qu'on peut construire à l'aide de deux surfaces quelconques $F^2$ et $F_1^2$ du faisceau ; car les plans polaires du point P par rapport aux deux surfaces $F^2$ et $F_1^2$ se coupent suivant $p$. Si maintenant P décrit une droite $g$, ses deux plans polaires par rapport à $F^2$ et $F_1^2$ décrivent deux faisceaux de plans projectifs à $g$ et la droite $p$ conjuguée à P décrit elle-même une surface conique du second ordre ou un système réglé, suivant que les axes des deux faisceaux de plans se coupent ou ne se rencontrent pas. Il résulte de là que :

*Les droites, conjuguées aux points d'une droite quelconque* g *par rapport à un faisceau de* $F^2$, *constituent une surface conique du second ordre ou un système réglé projectif à* g. *Dans le premier cas, les polaires de* g *par rapport aux surfaces du faisceau sont situées sur la surface conique du second ordre ; dans le second cas, elles sont les directrices du système réglé. Au lieu de la surface conique du second ordre, nous n'avons plus que deux plans, quand* g *contient un point principal du faisceau de surfaces.*

. La droite $g$ peut être considérée comme la droite qui réunit deux points quelconques P et Q de l'espace, auxquels sont conjuguées deux droites $p$ et $q$. D'après le théorème précédent, la polaire de $g$ par rapport à une surface quelconque $F^2$ du faisceau est située sur une surface conique du second ordre passant par $p$ et $q$, ou sur un système réglé dont $p$ et $p$ sont deux directrices ; de plus, la polaire de $g$ sera projetée de $p$ et $q$ par deux plans qui sont les plans polaires de P et Q par rapport à la surface $F^2$. Or comme une surface conique est projetée de deux de ses rayons et un système réglé de deux de ses directrices suivant des faisceaux projectifs de plans, on voit que :

*Les deux faisceaux de plans* p *et* q, *formés par les plans polaires de deux points quelconques P et Q, sont projectifs, si l'on fait correspondre deux à deux les plans qui sont les plans polaires de P et Q par rapport à une seule et même surface* $F^2$ *du faisceau.*

Les plans polaires de quatre points arbitraires forment quatre faisceaux projectifs de plans et il existe en général (II, page 105) au plus quatre points où se coupent quatre à quatre les plans homologues de ces faisceaux. Nous déduisons de là (voir aussi II, page 165) que

*Le faisceau ponctuel de* $F^2$ *renferme en général tout au plus quatre surfaces coniques du second ordre.*

En effet, les plans polaires des quatre points par rapport à une surface conique se coupent au sommet de cette dernière.

L'avant-dernier théorème sert de base à la définition suivante :

*Quatre surfaces du faisceau ponctuel de $F^2$ sont dites harmoniques, quand les quatre plans polaires d'un même point, et par suite de tout point arbitraire, par rapport à ces surfaces, forment un faisceau harmonique de plans.*

Nous exceptons tout naturellement ici les points principaux du faisceau, parce que leurs plans polaires coïncident. Nous pouvons de plus appliquer aux faisceaux ponctuels de $F^2$ la définition générale de la projectivité (II, pages 51 et 129) et par suite les rapporter projectivement à des formes élémentaires quelconques. Par exemple, faisons correspondre chaque surface $F^2$ du faisceau au plan qui est le plan polaire d'un point arbitraire P par rapport à $F^2$, le faisceau de surfaces sera rapporté projectivement au faisceau de plans ; et au moyen de ce faisceau de plans, nous pourrons rapporter projectivement le faisceau de surfaces à une autre forme élémentaire quelconque. Par exemple, on voit immédiatement ainsi que

*Les polaires d'une droite g par rapport au faisceau de surfaces forment une surface conique du second ordre ou un système réglé projectif au faisceau.*

La surface réglée du second ordre, sur laquelle ces polaires sont situées, a au plus huit points communs (II, page 166) avec la courbe d'intersection $k^4$ de deux courbes quelconques du faisceau. Chacun de ces points est le point de contact d'un plan tangent qu'on peut mener par $g$ à $k^4$. Une droite quelconque rencontre donc au plus huit tangentes de la courbe gauche $k^4$ du quatrième ordre.

Nous construirons le pôle d'un plan quelconque par rapport au faisceau de surfaces, en choisissant arbitrairement dans ce plan les sommets P, Q, R d'un triangle et en cherchant le point de rencontre de leurs plans polaires par rapport à chacune des surfaces du faisceau.

Les trois faisceaux de plans, formés par ces plans polaires sont projectifs au faisceau de surfaces et projectifs entre eux. Donc :

*Les pôles d'un plan quelconque par rapport aux surfaces d'un faisceau ponctuel de $F^2$ forment en général une courbe gauche du troisième ordre projective au faisceau. Les points du plan sont conjugués aux cordes de la courbe (II,* pages 103-104). *Le plan est tangent à trois surfaces*

*du faisceau au plus; les points de contact sont situés sur la courbe gauche.*

Nous arrivons encore au même résultat en déterminant les plans polaires de chaque point du plan par rapport à deux surfaces quelconques du faisceau. Nous obtenons ainsi deux gerbes collinéaires qui engendrent la courbe gauche du troisième ordre et son système de cordes. Le cas où le plan passe par un point principal du faisceau constitue une exception au théorème. Soit R ce point principal et $\rho$ son plan polaire par rapport à toutes les surfaces du faisceau. Les deux faisceaux des plans polaires de P et Q engendrent alors une surface réglée ou conique du second ordre projective au faisceau de surfaces et qui a en commun avec $\rho$ tous les pôles du plan donné ; donc

*Les pôles d'un plan passant par l'un des points principaux du faisceau de surfaces constituent une conique projective à ce faisceau.*

Il se produit encore un cas d'exception facile à reconnaître quand le plan contient deux points principaux, ou quand il est lui-même un plan principal du faisceau.

Les théorèmes précédents nous ont déjà conduits dans la dernière leçon à cette conclusion que tout plan est tangent au moins à une surface et au plus à trois. Si le plan donné est situé à l'infini, ses pôles coïncident avec les centres des surfaces du second ordre ; ou autrement dit

*Les centres de toutes les surfaces d'un faisceau ponctuel de* $F^2$ *sont situés sur une courbe gauche du troisième ordre ou sur une conique suivant que le faisceau n'a pas de point principal à l'infini ou qu'il en a un. Donc, en général, le faisceau ponctuel de* $F^2$ *contient au plus trois paraboloïdes et au moins un.*

L'intersection d'un faisceau ponctuel de $F^2$ par un plan quelconque est appelée un *faisceau de coniques*. Par tout point du plan, non situé sur toutes les coniques de ce faisceau, il ne passe qu'une seule de ces courbes ; et deux points, qui sont conjugués par rapport à deux coniques quelconques du faisceau, sont conjuguées par rapport à toutes les coniques de ce faisceau (II, page 170). Les théorèmes (II, page 171) subsistent également :

*Les points qui sont conjugués aux points d'une droite* g *par rapport à un faisceau de coniques, forment en général une courbe du second ordre, projective à* g *et qui passe aussi par les pôles de* g *par rapport aux coniques du faisceau. Les polaires de deux points quelconques*

*P et Q du plan prises par rapport à ces coniques, forment deux faisceaux de rayons du premier ordre ; dans ces derniers, les polaires de P et Q par rapport à une même conique sont deux rayons correspondants.*

Si donc on donne trois coniques quelconques du faisceau, la projectivité des faisceaux de rayons, formés par les polaires de points quelconques du plan, se trouve complètement déterminée et l'on peut construire linéairement la polaire de tout point du plan par rapport à une conique quelconque du faisceau, du moment qu'on connaît la polaire d'un point arbitraire par rapport à cette courbe. Il résulte de là que le faisceau est entièment déterminé par trois de ses coniques.

Mais nous pouvons montrer actuellement que le faisceau de coniques est défini par deux de ses courbes. Par un point P convenablement choisi dans le plan, on peut faire passer une infinité de droites qui ne coupent aucune des deux coniques, ou qui en rencontrent une, ou bien qui le coupent toutes les deux en des points réels ; et dans ce dernier cas, on peut s'arranger pour que l'un des couples de points d'intersection ne soit pas séparé par l'autre. Sur chacune des droites $s$ du plan ainsi menées par P, il existe (I, page 181) deux points réels M et N qui sont conjugués par rapport aux deux coniques et conséquemment aussi par rapport au faisceau de coniques ; le point où $s$ est coupée pour la seconde fois par la conique du faisceau qui passe par P, est donc complètement déterminé, puisqu'il est harmoniquement séparé de P par M et N. Il découle de là que la conique du faisceau qui passe par P, et par suite le faisceau tout entier lui-même, se trouve déterminé. On autrement dit :

*Deux faisceaux de coniques sont identiques, quand ils ont en commun deux coniques quelconques. Si deux surfaces quelconques d'un faisceau ponctuel de $F^2$ passent par deux coniques d'un faisceau de coniques, ce dernier est une section du faisceau ponctuel de $F^2$.*

Deux coniques choisies arbitrairement dans le plan déterminent un faisceau de coniques, qui passe par elles ; ce faisceau est une section de tout faisceau ponctuel de $F^2$, dont deux surfaces passent par les deux coniques.

Un faisceau de coniques dont les courbes ont un point réel commun U peut par exemple être considéré comme une section d'un faisceau ponctuel de $F^2$, dont les surfaces se coupent suivant une droite et une courbe gauche du troisième ordre. En effet, si l'on mène par U une droite $a$ non

située dans le plan du faisceau et si on la réunit à deux coniques quelconques du faisceau par deux surfaces du second ordre, qui se coupent suivant $a$, ces dernières ont encore en commun une courbe gauche du troisième ordre $k^3$, dont $a$ est une corde ; et le faisceau de coniques est une section du faisceau ponctuel de $F^2$ qui passe par $a$ et $k^3$. Mais nous avons déjà démontré (II, page 154) pour la section d'un pareil faisceau de $F^2$ le théorème suivant :

*Une droite, qui ne passe par aucun point commun aux coniques d'un faisceau de coniques, coupe ce faisceau suivant une ponctuelle involutive telle que deux points conjugués de cette ponctuelle sont situés sur une seule et même conique du faisceau.*

D'après ce qui précède, le théorème a lieu pour tout faisceau de coniques dont les courbes ont un point réel commun et il a d'ailleurs lieu aussi pour tout autre faisceau de coniques. En effet, si deux coniques d'un faisceau ne se coupent ou ne se touchent en aucun point réel, il n'y a aucune droite du plan les coupant suivant des couples de points qui se séparent mutuellement ; il existe donc sur chaque droite deux points M, N qui sont conjugués par rapport à ces deux coniques et conséquemment par rapport à toutes les coniques du faisceau ; ces deux points M et N sont les points doubles de la ponctuelle involutive suivant laquelle le faisceau de coniques est rencontré par la droite.

Comme un faisceau ponctuel de $F^2$ a toujours un faisceau de coniques en commun avec un plan, il résulte du théorème précédent que :

*Un faisceau ponctuel de $F^2$ est coupé suivant une ponctuelle involutive par une droite qui ne passe par aucun des points communs à ses surfaces ; il y a au plus deux surfaces du faisceau tangentes à la droite et les points de contact sont les points doubles de la ponctuelle.*

Cette propriété du faisceau ponctuel de $F^2$ nous donne une solution très simple d'un problème déjà posé précédemment (II, page 168) :

*Construire la surface du second ordre qui fait partie d'un faisceau ponctuel de $F^2$, déterminé par deux de ses surfaces, $F^2$ et $F_1^2$, et qui passe par un point P choisi arbitrairement.*

Par le point P menons des droites qui rencontrent chacune des surfaces $F^2$ et $F_1^2$ en deux points réels. Chacune de ces droites est coupée par le faisceau ponctuel de $F^2$ suivant une ponctuelle involutive, entièrement déterminée par ces deux couples de points d'intersection ; la surface cherchée passe par le point qui est conjugué à P

dans cette ponctuelle. — La construction n'est pas toujours directement applicable quand les deux surfaces $F^2$ et $F_1^2$ se pénètrent mutuellement. Dans ce cas, nous construirons suivant la méthode indiquée, une troisième surface $F^2_2$ du faisceau, intérieure à $F^2$; nous pourrons alors mener par P une infinité de sécantes à $F^2$ à $F_2^2$ et la construction donnée nous conduira à la solution cherchée. On peut s'en servir dans ce problème : *Par neuf points donnés faire passer une surface du second ordre,* dont la solution a été donnée à la fin de la précédente leçon.

Quatre coniques d'un faisceau de coniques sont dites *harmoniques*, quand elles sont situées sur quatre surfaces harmoniques d'un faisceau ponctuel de $F^2$. Les polaires d'un point quelconque du plan par rapport à quatre coniques harmoniques forment un faisceau harmonique de rayons, quand par exception elles ne se confondent pas. Il existe en général dans le plan d'un faisceau un point au moins et trois points au plus pour lesquels les différentes polaires coïncident; en effet, comme les droites conjuguées aux points d'un plan par rapport au faisceau ponctuel de $F^2$ se composent en général des cordes d'une courbe gauche du troisième ordre, un plan quelconque en renferme au moins une et au plus trois.

Nous pouvons rapporter projectivement le faisceau de coniques à une forme élémentaire quelconque de manière que quatre coniques harmoniques du faisceau correspondent à quatre éléments harmoniques de la forme en question. Par exemple, faisons correspondre chaque conique $k^2$ du faisceau à la droite qui est la polaire par rapport à $k^2$ d'un point quelconque du plan; le faisceau de rayons formé par les polaires sera rapporté projectivement au faisceau de coniques, et à l'aide d'un faisceau de rayons de ce genre, nous pourrons rapporter projectivement une autre forme élémentaire quelconque au faisceau de coniques. Ce dernier est aussi projectif à tout faisceau ponctuel de $F^2$, dont il est une section; car quatre coniques harmoniques quelconques du faisceau de coniques ont pour correspondantes les quatre surfaces harmoniques du faisceau de surfaces qui passent par elles.

Il peut aussi se produire ici le cas remarquable où chacune des surfaces du second ordre n'est pas coupée par le plan du faisceau de courbes; en sorte qu'en réalité chaque conique de ce faisceau a pour correspondante une des surfaces du second ordre, tandis que chacune des surfaces n'a pas pour correspondante une conique. Les faisceaux

de rayons formés des polaires d'un point arbitraire par rapport aux coniques sont alors incomplets et se composent seulement d'angles; cependant les relations projectives énoncées ci-dessus subsistent pour ces angles. Les surfaces du second ordre, qui ne sont pas rencontrées par le plan du faisceau de coniques, déterminent également dans ce plan un système polaire qui, à la vérité, n'a pas de courbe double mais qui, à beaucoup d'égards, remplace complètement une courbe du second ordre. Le cas en question ne peut du reste se produire que lorsque les coniques n'ont aucun point réel commun.

Si les surfaces d'un faisceau ponctuel de $F^2$ ont un point réel U commun, une droite quelconque $g$, menée par U et qui n'est contenue sur aucune des surfaces, sera coupée par chacune d'elles en un point différent de U et, réciproquement, par chacun des points de $g$ il ne doit passer qu'une seule surface du faisceau. Je dis maintenant que :

*Si l'on mène un plan tangent à chacune des surfaces du faisceau ponctuel de $F^2$ au point, différent de U, où la droite* g *la rencontre, tous ces plans tangents forment un faisceau de plans du premier ou du second ordre perspectif à la ponctuelle* g.

Chacun de ces plans tangents réunit un point de $g$ avec la droite qui lui est conjuguée. De plus, toutes les droites conjuguées aux points de $g$ forment une surface conique ou un système réglé projectif à $g$ (II, page 171), et le point U est situé sur le rayon de cette forme qui lui est conjugué. Dans le cas de la surface conique du second ordre, le théorème découle d'une proposition démontrée antérieurement (I, page 158). Dans le cas du système réglé, joignons trois points quelconques A, B, C, de la ponctuelle $g$ aux droites qui leur sont conjuguées par des plans qui se coupent en un point S. Le système réglé sera projeté de S par un faisceau de plans du premier ou du second ordre, qui est projectif à la ponctuelle $g$ et qui lui est en même temps perspectif, parce que quatre plans du faisceau passent par les points U, A, B, C de $g$ auxquels ils correspondent (I, page 155).

Chaque plan du faisceau du premier ou du second ordre contient aussi la polaire de $g$ par rapport à la surface du second ordre qui est tangente au plan. Le faisceau de plans est donc aussi perspectif à la surface conique du second ordre ou au système réglé formé des polaires de la droite $g$ et par suite il est projectif au faisceau ponctuel de $F^2$. Par conséquent, il résulte également de là que la ponctuelle $g$ est aussi rapportée projectivement au faisceau ponctuel de $F^2$, quand on fait corres-

pondre chaque surface au point de $g$, différent de U, par lequel elle passe. Par analogie avec les théorèmes précédents, nous dirons dans ce cas que la ponctuelle $g$ est perspective au faisceau de surfaces, ou qu'elle en est une section ; nous obtenons ainsi ce théorème :

*Toutes les droites, qui contiennent un point commun aux surfaces du second ordre, mais qui n'appartiennent à aucune de ces surfaces, sont coupées par le faisceau de surfaces suivant des ponctuelles projectives ; ces ponctuelles sont aussi projectives à ce faisceau et de plus elles lui sont perspectives.*

Nous avions déjà énoncé précédemment (II, page 154) ce même théorème pour les faisceaux de coniques en ce qu'il a d'essentiel, quoique sous une autre forme. La démonstration se simplifie quand la droite $g$ est contenue dans un plan principal du faisceau de surfaces.

La projectivité que l'on peut établir entre les faisceaux de surfaces du second ordre et des formes élémentaires quelconques nous conduit à une quantité de problèmes nouveaux et intéressants. Nous n'énoncerons que ceux qui suivent :

*Quel est l'ordre de la surface engendrée par un faisceau ponctuel de $F^2$ et par le faisceau de plans du premier ordre qui lui est projectif?*

La surface engendrée contient chaque conique qui est commune à une surface du faisceau ponctuel de $F^2$ et au plan qui lui correspond ; elle contient donc l'axe du faisceau de plans et chacun des points communs aux surfaces du second ordre. Une droite qui coupe l'axe du faisceau de plans a encore, outre ce point d'intersection, deux autres points communs avec la surface, quand elle n'est pas située tout entière sur elle. Nous allons montrer que la surface a en commun avec une droite quelconque $g$, qui n'est pas tout entière sur elle, au moins un point et au plus trois, et que par conséquent elle est du troisième ordre.

La droite $g$ est coupée par le faisceau de plans suivant une ponctuelle projective à ce faisceau de plans et au faisceau de surfaces. Nous allons démontrer d'abord que :

*Si une forme rectiligne* g *est rapportée projectivement à un faisceau ponctuel de $F^2$ et si l'on construit pour chaque point P de* g *son plan polaire par rapport à la surface $\pi^2$ qui lui correspond, tous ces plans polaires forment un faisceau de plans du second ordre projectif à* g *et c'est seulement dans des cas tout à fait particuliers qu'ils se coupent suivant une seule et même droite.*

Nous construirons le plan polaire du point P de $g$ par rapport à la surface $\pi^2$ qui lui correspond en joignant la polaire de $g$ par rapport à $\pi^2$ avec la droite qui est la conjuguée du point P par rapport au faisceau de surfaces. Mais les points de $g$ ont pour conjugués les rayons d'un système réglé ou d'une surface conique du second ordre projective à $g$ et les polaires de $g$ forment elles-mêmes un second système réglé ou une seconde surface conique du second ordre projective au faisceau de surfaces. Les deux formes de rayons, que nous obtenons ainsi, sont projectives, parce que la forme rectiligne et le faisceau de surfaces sont projectifs et elles engendrent (I, page 158) en général un faisceau de plans du second ordre projectif à $g$, parce que, dans le premier cas, chacun des système réglés est le système directeur de l'autre et parce que, dans le second cas, les deux surfaces coniques sont situées l'une sur l'autre (II, page 171). Les plans polaires en question qui joignent deux à deux les rayons correspondants ne passent par une seule et même droite que si, dans le dernier cas, les surfaces coniques du second ordre sont en situation involutive. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce point, parce que le second cas ne peut se produire que pour une situation particulière de la droite $g$.

La ponctuelle $g$ est perspective au faisceau de plans du second ordre que nous venons de trouver, ou bien il y a au moins un des points de $g$ et au plus trois qui sont situés dans les plans correspondants du faisceau (I, page 154) [1]. Chacun de ces points est conjugué à lui-même par rapport à la surface qui lui correspond dans le faisceau ponctuel de $F^2$; autrement dit :

*Quand une forme rectiligne* g *est rapportée projectivement à un faisceau ponctuel de* $F^2$, *il y a au plus trois points et au moins un point de* g *qui sont situés sur les surfaces du second ordre qui leur correspondent, à moins que la forme rectiligne ne soit perspective au faisceau de surfaces.*

La solution du problème posé plus haut peut s'énoncer sous la forme du théorème suivant :

*Un faisceau de surfaces du second ordre engendre avec un faisceau*

---

1. Si deux surfaces coniques du second ordre en involution correspondent à la droite $g$, nous arriverons au même résultat de la manière suivante. De l'axe d'involution des surfaces coniques nous projetterons la ponctuelle $g$ suivant un faisceau de plans. Ce dernier est projectif aux surfaces coniques et par conséquent au moins un et au plus trois de ses plans passant par les rayons correspondants des surfaces.

*de plans du premier ordre, qui lui est projectif, une surface du troisième qui a au moins un point et au plus trois points communs avec toute droite qui n'est pas située sur elle. Cette surface du troisième ordre passe par tous les points communs aux surfaces du second ordre et par l'axe* a *du faisceau de plans. Les plans de ce faisceau la coupent suivant des coniques, qui déterminent elles-mêmes sur l'axe* a *une ponctuelle involutive.*

Si le faisceau de plans se compose des plans polaires d'un point quelconque par rapport aux surfaces du second ordre du faisceau, on en déduit que :

*Les points de contact de toutes les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque aux surfaces d'un faisceau ponctuel de* $F^2$ *sont situés sur une surface du troisième ordre. Cette surface passe par le point en question, par la droite* a *qui lui est conjuguée, et elle a en commun avec tout plan mené par* a *soit cette droite seule, soit cette droite et une conique; elle passe en outre par tous les points communs aux surfaces du second ordre.*

# VINGT ET UNIÈME LEÇON.

**Axes des coniques situées sur une surface du second ordre.
Normales de la surface du second ordre.**

Nous allons faire une nouvelle application des théorèmes de la dix-huitième leçon relatifs au complexe tétraédral de rayons, en montrant que les normales d'une surface du second ordre et les axes de toutes les coniques contenues sur la surface constituent un complexe de ce genre. Nous verrons ainsi que les théorèmes les plus importants que l'on connaît jusqu'ici sur ces normales et ces axes se relient très simplement les uns aux autres. Nous n'excluons dès à présent de notre étude que le cas où la surface donnée du second ordre est une surface cylindrique.

La polaire d'une normale à la surface du second ordre, c'est-à-dire d'une droite perpendiculaire à un plan tangent à la surface en son point de contact, est située dans ce plan tangent et conséquemment est perpendiculaire à la normale. Si donc nous cherchons toutes les droites de l'espace qui sont perpendiculaires à leurs polaires, les normales à la surface du second ordre seront comprises parmi elles. A ces droites appartiennent aussi les axes de toutes les coniques situées sur la surface; en effet, un pareil axe est conjugué à toutes les droites qu'on peut lui mener normalement dans le plan de la conique; et comme le point à l'infini par lequel passent ces droites doit aussi être situé sur la polaire de l'axe (II, page 44), cette polaire est encore perpendiculaire à l'axe, sans cependant le couper. Réciproquement, toute droite de l'espace, qui est normale à sa polaire, est l'axe d'une conique de la surface du second

ordre ou bien encore d'un système polaire plan qui fait partie du système polaire de l'espace déterminé par la surface ; le plan de ce système polaire passe par la droite et est parallèle à sa polaire. Si la droite est coupée par sa polaire, toutes deux sont situées dans un plan tangent à la surface du second degré et leur point d'intersection coïncide avec le point de contact ; la conique, dont elles peuvent être considérées comme les axes, se réduit au point de contact, ou encore à une ou à deux droites de la surface du second ordre.

Les trois axes principaux de toute surface conique du second ordre, circonscrite à la surface donnée du second ordre, font également partie des droites que nous considérons ici. En effet, ces trois axes principaux se coupant à angle droit et étant conjugués deux à deux, la polaire de chacun d'eux est située dans le plan des deux autres et est perpendiculaire à l'axe auquel elle correspond.

Toute droite, qui est normale à sa polaire, peut être considérée comme un axe principal d'un pareil cône circonscrit ou encore d'une gerbe polaire, qui appartient au système polaire de l'espace déterminé par la surface du second ordre ; cette droite est coupée au centre du cône ou de la gerbe par un plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par sa polaire.

En raison de ce qui précède, nous dirons que toute droite de l'espace qui est normale à sa polaire est un *axe* de la surface du second ordre ; nous pouvons résumer ce qui précède de la manière suivante :

*Les axes de toutes les coniques situées sur la surface du second ordre, les axes principaux de toutes les surfaces coniques qui lui sont circonscrites et toutes les normales à la surface du second ordre sont des axes de cette surface, c'est-à-dire sont perpendiculaires à leurs polaires respectives. Réciproquement, tout axe de la surface est à la fois un axe d'un système polaire plan et d'une gerbe polaire qui appartiennent tous deux au système polaire déterminé par la surface du second ordre. Les axes de la surface sont conjugués deux à deux dans ce système polaire.*

Une surface du second ordre, qui n'est pas de révolution, a trois plans de symétrie, qui se coupent normalement suivant les axes principaux (II, pages 49 et 51) et un centre ; ou bien, elle n'a que deux plans de symétrie, qui se coupent normalement suivant un axe et c'est un paraboloïde qui n'a pas de centre. Comme les droites, perpendiculaires à un plan de symétrie, sont en même temps perpendiculaires à

leurs polaires, puisque ces dernières sont situées dans le plan de symétrie, il s'ensuit que :

*Toute droite, qui est située dans un plan de symétrie ou qui lui est perpendiculaire, est un axe de la surface du second ordre.*

Un diamètre quelconque de la surface du second ordre n'est pas en général perpendiculaire au plan qui lui est conjugué; cependant, dans chacun de ces plans, il y a des rayons perpendiculaires au diamètre correspondant. Comme ces rayons sont en même temps conjugués au diamètre, le plan mené par le diamètre parallèlement à ces rayons coupe la surface du second ordre suivant une conique dont le diamètre est un axe ; ou bien encore ce plan est le lieu d'un système polaire plan, aux axes duquel le diamètre appartient. Donc :

*Tout diamètre de la surface du second ordre est aussi un de ses axes.*

Quand la surface du second ordre a un centre, chacun de ses axes principaux est perpendiculaire à un plan de symétrie; mais si la surface est un paraboloïde elliptique ou hyperbolique, tous les diamètres sont parallèles à son axe principal. Des deux derniers théorèmes, il résulte donc que :

*Toute droite parallèle à un axe principal est un axe de la surface du second ordre.*

Par tout point P de l'espace, il passe un nombre infini d'axes de la surface du second ordre et l'un d'eux est la droite $n$ qu'on peut amener par P perpendiculairement à son plan polaire $\pi$. Soit $n_1$ la polaire de $n$ située dans $\pi$ et cherchons d'abord tous les autres axes situés dans ce même plan $\pi$. Chacun d'eux est perpendiculaire au plan polaire du point où il est coupé par $n_1$ ; car ce plan polaire, en outre de $n$, contient aussi la polaire de l'axe, c'est-à-dire deux droites perpendiculaires à cet axe. Nous trouverons donc tous les axes contenus dans $\pi$ en abaissant de chaque point de la droite $n_1$ une perpendiculaire sur son plan polaire. Ces plans polaires forment un faisceau $n$ projectif à la ponctuelle $n_1$; il en résulte alors que toutes ces perpendiculaires passent par un même point ou enveloppent une parabole. En effet, nous pouvons rapporter projectivement la ponctuelle à l'infini du plan $\pi$ au faisceau de plans $n$ de telle sorte que chaque plan du faisceau soit perpendiculaire à la direction sur laquelle est situé le point correspondant à l'infini. Par ce moyen la ponctuelle à l'infini est rapportée projectivement à la ponctuelle $n_1$ et elle engendre avec elle le système de perpendiculaires en question.

Ces dernières enveloppent en général une courbe du second ordre aux tangentes de laquelle appartiennent aussi $u_1$ et la droite à l'infini ; c'est donc une parabole. Les axes qui passent par le point P sont les polaires des axes situés dans le plan $\pi$ et comme ces derniers enveloppent une parabole, les premiers sont situés sur une surface conique du second ordre. En ayant égard à ce qui précède nous pouvons alors énoncer les théorèmes suivants :

*Les axes, qui sont situés dans un plan $\pi$ donné, enveloppent une parabole; cette courbe est tangente aux droites suivant lesquelles $\pi$ coupe les plans de symétrie de la surface du second ordre.*

*Les axes, qui passent par un point P donné, forment une surface conique du second ordre ; cette surface passe par les normales que l'on peut abaisser de P sur les plans de symétrie de la surface du second ordre et par un diamètre de cette surface.*

La démonstration de ces théorèmes a fait pressentir que la parabole peut aussi se réduire à un point, de sorte qu'à la place de ses tangentes nous aurons dans ce cas un faisceau de rayons du premier ordre ; la surface conique P peut aussi se réduire à un faisceau de rayons du premier ordre. C'est ce qui devra arriver, par exemple, pour tout point P et tout plan $\pi$, quand la surface du second ordre est de révolution, parce qu'il existe alors une infinité de plans de symétrie qui se coupent suivant un axe principal $h$. D'après les théorèmes qui précèdent, dans ce cas, toute droite qui est dans un même plan avec l'axe de révolution $h$ ou qui lui est perpendiculaire, est un axe. Dorénavant nous exclurons les surfaces de révolution de nos considérations.

Sur un axe quelconque, qui n'est ni un diamètre de la surface du second ordre, ni une perpendiculaire à un plan de symétrie, prenons deux points propres M et N qui ne soient pas situés dans des plans de symétrie. Les deux cônes d'axes, qui ont leurs sommets en M et N, se coupent suivant la droite $\overline{MN}$ et suivant une courbe gauche $k^3$ du troisième ordre. Cette courbe $k^3$ a trois points à l'infini, qui sont les pôles des plans de symétrie ou les points à l'infini des axes principaux ; en effet, les droites, issues de M et N, qui sont perpendiculaires aux plans de symétrie ou bien encore parallèles aux axes principaux, sont également des axes et se coupent deux à deux en ces trois points à l'infini. Quand la surface a un centre, ce point est aussi situé sur la courbe gauche du troisième ordre. Un troisième cône d'axes quelconque, dont le sommet O est situé sur la courbe $k^3$ doit passer par cette courbe,

parce qu'il contient les cinq axes qui joignent O à M, à N et aux trois points de la courbe situés à l'infini. Donc :

*Il y a une infinité de courbes gauches du troisième ordre, dont les tangentes et les cordes se composent uniquement d'axes de la surface du second ordre.*

*Toutes ces courbes ont en commun trois points à l'infini (les pôles des plans de symétrie et les points à l'infini des axes principaux) et le centre de la surface du second ordre, quand celle-ci en a un.*

Étant données deux de ces courbes gauches du troisième ordre, et par suite aussi une infinité de cônes d'axes ne passant pas tous par une seule et même courbe gauche, les cônes d'axes engendrent une infinité d'autres courbes gauches du même genre. Ces dernières déterminent dans un plan arbitraire une infinité d'axes, et par conséquent aussi le faisceau du second ordre que constituent tous les axes contenus dans le plan ; tous les axes de la surface du second ordre sont donc complètement déterminés par ces deux courbes gauches du troisième ordre. Si les deux courbes sont situées sur un seul et même cône d'axes, on peut les regarder comme des courbes doubles d'un complexe de rayons engendré par deux systèmes collinéaires de l'espace. Mais d'après ce qui précède, ce complexe doit contenir tous les axes de la surface du second ordre et se compose de ces axes. Donc :

*Les axes d'une surface du second ordre constituent un complexe de rayons qui peut aussi être engendré par deux systèmes collinéaires de l'espace. Si la surface a un centre, ce point et les trois points à l'infini sur les axes principaux forment le tétraèdre principal du complexe; si au contraire la surface du second ordre est un paraboloïde, le complexe de rayons n'a que trois points principaux (qui sont les pôles à l'infini des deux plans de symétrie et le point à l'infini de l'axe principal) et trois plans principaux (qui sont les plans de symétrie et le plan à l'infini).*

Les théorèmes de la dix-huitième leçon sur le complexe de rayons du second ordre s'appliquent donc aussi au complexe des axes d'une surface du second ordre ; par exemple, ce théorème que les rayons du complexe qui passent par un point P ou sont situés dans un plan $\pi$ ne constituent deux faisceaux de rayons du premier ordre que si P est situé dans un plan principal ou si $\pi$ passe par un point principal.

Cependant, en raison de leur importance, nous allons démontrer encore une fois et directement les différents cas de ce théorème pour le complexe des axes d'une surface du second ordre.

*Les axes qui sont contenus dans un plan diamétral de la surface du second ordre forment un faisceau de diamètres et un faisceau de rayons parallèles ; et, réciproquement, tous les axes qui ont une direction donnée sont situés dans un plan diamétral de la surface du second ordre.*

Supposons en effet que $\pi$ soit un plan diamétral, son pôle B est situé à l'infini sur la direction de la corde conjuguée à $\pi$. Les parallèles, que l'on peut tracer dans $\pi$ normalement à cette direction, sont des axes de la surface du second ordre et il en est de même pour leurs polaires qui passent par P et qui sont situées dans un deuxième plan diamétral. On voit, en passant, que :

*Les axes qui passent par deux points arbitrairement choisis sur un diamètre, sont deux à deux parallèles ; les deux surfaces coniques sur lesquelles ils se trouvent sont tangentes suivant ce diamètre et passent par la même conique à l'infini.*

*Les paraboles, qui sont enveloppées par tous les axes situés dans des plans parallèles, sont des sections d'une surface conique ou cylindrique, dont les rayons se composent de diamètres de la surface donnée du second ordre.*

Quand un point P est situé dans un plan de symétrie $\gamma$ de la surface du second ordre, tout rayon mené par P dans $\gamma$ est un axe de la surface ; la surface conique sur laquelle se trouvent tous les axes passant par P se décompose donc en deux faisceaux de rayons. L'un d'eux est contenu dans $\gamma$, l'autre passe par l'axe qui est normal en P au plan de symétrie $\gamma$. Donc :

*Les axes passant par un point quelconque d'un plan de symétrie $\gamma$ constituent deux faisceaux de rayons ; l'un d'eux est contenu dans $\gamma$ et l'autre dans un plan normal à $\gamma$.*

On déduit de ce théorème que :

*Si la droite* n *est perpendiculaire au plan de symétrie $\gamma$, les axes qui sont coupés par* n *forment des surfaces coniques du second ordre dont les sommets sont situés sur* n *et qui ont en commun avec $\gamma$ une seule et même hyperbole équilatère.*

En effet, une quelconque de ces surfaces coniques a en commun avec $\gamma$ une hyperbole qui passe par le point d'intersection de $n$ et de $\gamma$ et par le centre de la surface du second ordre, quand celle-ci en a un, et dont les asymptotes sont l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à un plan de symétrie différent de $\gamma$. D'après le théorème précédent, toute

droite qui unit un point de l'hyperbole à un point de la droite est également un axe de la surface du second ordre. On en déduit aussi ce théorème :

*Les axes, qui coupent un plan de symétrie* $\gamma$ *suivant une droite* g *située dans ce plan, sont tangents à un cylindre prabolique perpendiculaire à* $\gamma$*: ou bien quand* g *est normale à un second plan de symétrie* $\gamma_1$, *elles coupent une droite* $g_1$ *contenue dans* $\gamma_1$ *et perpendiculaire à* $\gamma$.

Dans le dernier cas, toutes les droites qui coupent $g$ et $g_1$ appartiennent au complexe des axes. Si des points où un axe quelconque $a$ de la surface du second ordre coupe les deux plans de symétrie $\gamma$ et $\gamma_1$ on abaisse des perpendicaires sur l'axe principal $\overline{\gamma\gamma_1}$, on obtient deux droites correspondantes $g$ et $g_1$. Si l'axe $a$ décrit dans un plan diamétral un faisceau d'axes parallèles, ces deux perpendiculaires décrivent deux faisceaux de rayons parallèles projectifs dans $\gamma$ et $\gamma_1$ ; les distances des droites $g$ et $g_1$ au centre de la surface sont entre elles dans un rapport constant ; quand il n'y a pas de centre, $g$ et $g_1$ sont à une distance constante l'une de l'autre. Donc :

*Si des points où chacun des axes d'une surface du second ordre est coupé par deux plans de symétrie* $\gamma$ *et* $\gamma_1$, *on abaisse des perpendiculaires sur l'axe principal* $\overline{\gamma\gamma_1}$ *par lequel passent* $\gamma$ *et* $\gamma_1$, *dans le cas de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde le rapport des distances de ces deux perpendiculaires au centre de la surface est constant ; dans le cas de paraboloïde, ces deux perpendiculaires déterminent sur l'axe principal* $\overline{\gamma\gamma_1}$ *un segment de longueur constante.*

Ce théorème et cet autre précédemment démontré que les rayons d'un complexe tétraédral sont coupés par les faces du tétraèdre principal (ici ce sont les plans de symétrie et le plan à l'infini) suivant des ponctuelles projectives, nous donnent la proposition suivante :

*Les segments déterminés sur les axes d'un ellipsoïde, d'un hyperboloïde ou d'un cône du second ordre par les trois plans de symétrie de la surface, sont entre eux dans un rapport constant.*

Étant donnés les trois plans de symétrie et un axe quelconque $a$ d'une surface du second ordre, on peut facilement construire tous les autres axes de la surface. Pour cela, nous cherchons les points d'intersection de $a$ avec deux plans de symétrie $\gamma$ et $\gamma_1$ et de ces points nous abaissons deux perpendiculaires $g$ et $g_1$ sur l'axe principal $\overline{\gamma\gamma_1}$ ; toutes les droites qui coupent $g$ et $g_1$ appartiennent aux axes de la surface.

Un plan diamétral quelconque $\delta$ contient toujours un de ces axes qui coupent les droites $g$ et $g_1$ ; parmi les autres axes contenus dans $\delta$, les uns sont parallèles à cet axe, les autres forment un faisceau de diamètres et par suite peuvent tous se construire. Or, comme chaque axe de la surface est situé dans un certain plan diamétral, on pourra toujours arriver à le construire de cette manière. Donc :

*Le complexe des axes d'une surface du second ordre est complètement déterminé, quand on donne les plans de symétrie de la surface et un axe quelconque* a, *qui n'est coplanaire avec aucun des axes principaux.*

Nous pouvons aller plus loin et démontrer maintenant le théorème important qui suit :

*Étant donné un complexe d'axes, on peut construire une infinité de surfaces du second ordre, qui s'y rapportent; autrement dit, il existe une infinité de surfaces du second ordre qui ont les mêmes axes qu'une surface donnée.*

Supposons le complexe d'axes défini par les plans de symétrie et un axe $a$ pris arbitrairement, comme dans le théorème précédent. Nous menons par un point quelconque S de $a$ un plan $\sigma$ perpendiculaire à $a$ et nous construisons une surface du second ordre qui ait pour plans de symétrie les plans donnés et qui soit tangente à $\sigma$ au point S. La droite $a$ étant une normale à cette surface, elle fait partie des axes de la surface de même que tout autre rayon du complexe d'axes donné. Comme le point S est pris sur $a$ d'une manière tout à fait arbitraire et comme, pour cette construction, nous pouvons nous servir d'un autre axe quelconque du complexe, le théorème sera démontré du moment que nous aurons prouvé qu'il est possible de construire la surface en question.

S'il existe trois plans de symétrie, ils forment avec le plan à l'infini un tétraèdre polaire de la surface cherchée ; et cette dernière se trouve complètement déterminée comme surface double du système polaire de l'espace dans lequel, outre ce tétraèdre polaire, on donne encore le pôle S du plan $\sigma$ (II, page 78). La surface du second ordre passe par les huit sommets du parallélipipède rectangle dont les faces sont parallèles aux plans de symétrie de la surface, dont les diagonales sont divisées en deux parties égales par le centre M de cette surface et dont le point S est un sommet. Les trois faces du parallélipipède qui passent par S coupent la surface suivant des courbes du second ordre dont on connaît quatre points et la tangente à l'un d'eux S, qui est située dans le

plan $\sigma$. Ces courbes sont donc complètement déterminées et elles permettent de construire la conique commune à la surface et à un plan quelconque.

S'il n'y a que deux plans de symétrie et un axe principal, la surface cherchée est un paraboloïde elliptique ou hyperbolique. Chacun des deux plans que l'on peut mener par S parallèlement aux plans de symétrie coupe alors la surface suivant une parabole, dont l'axe est situé dans le second plan de symétrie et dont on connaît de plus le point S et sa tangente qui est située dans $\sigma$. On peut donc construire chacune de ces paraboles. Nous déterminons de plus un point $S_1$ de telle sorte que la droite $SS_1$ soit perpendiculaire à l'axe principal et bissectée par lui; le point $S_1$ se trouve aussi sur la surface cherchée. Par $S_1$ et par les deux paraboles qui se coupent en S et au point à l'infini sur l'axe principal, on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre (II, page 56). Cette surface satisfait à toutes les conditions et c'est un paraboloïde, puisqu'elle est tangente au plan à l'infini au point où l'axe principal le rencontre.

Par tout point S de l'espace, il passe une infinité de surfaces du second ordre qui ont en commun un complexe d'axes donné. En effet, chacun des axes passant par S est normal en S à l'une de ces surfaces, et, comme nous le savons, ces axes forment une surface conique du second ordre. Les plans tangents à toutes ces surfaces au point S enveloppent d'après cela une surface conique du second ordre.

*Les pôles d'un plan quelconque $\varepsilon$, par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui ont en commun un complexe d'axes donné, sont situés dans un plan diamétral perpendiculaire à $\varepsilon$. Les surfaces sont coupées par le plan $\varepsilon$ suivant des courbes du second ordre dont les axes enveloppent une parabole et dont les centres sont situés sur une droite, la directrice de la parabole.*

En effet, toute perpendiculaire abaissée sur le plan $\varepsilon$ de l'un de ses pôles est un axe des surfaces du second ordre ; et comme toutes ces perpendiculaires sont parallèles entre elles, elles sont situées dans un même plan diamétral (II, page 186). Ce plan est conjugué à $\varepsilon$ par rapport à toutes ces surfaces du second ordre et par conséquent sa droite d'intersection avec $\varepsilon$ est le lieu des centres de toutes les coniques communes à $\varepsilon$ et aux surfaces du second ordre. Comme les axes de toutes ces coniques se coupent rectangulairement en leurs centres et que de plus ils sont tangents à une parabole (II, page 184), la dernière partie du

théorème découle immédiatement aussi de la propriété de la parabole (I, page 165) :

*Deux tangentes à la parabole sont perpendiculaires l'une à l'autre, quand leur point d'intersection est situé sur la directrice.*



# VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

**Surfaces du second ordre, semblables, concentriques et semblablement placées. — Normales à ces surfaces.**

Nous allons maintenant considérer quelques groupes simples de surfaces du second ordre auxquelles appartient un complexe d'axes donné. Nous énoncerons d'abord le théorème suivant :

*Les plans de symétrie d'une surface du second ordre et un diamètre conjugué à un plan quelconque* $\varepsilon$, *qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'un quelconque des axes principaux, déterminent le complexe des axes de la surface ainsi que le centre et les axes de toute conique située sur cette surface.*

Le pôle du plan $\varepsilon$ est situé sur le diamètre qui lui est conjugué ; et comme la perpendiculaire que l'on peut abaisser de ce pôle sur $\varepsilon$ est un axe de la surface, toute droite perpendiculaire à $\varepsilon$ et coupant ce diamètre doit être (II, page 186) un axe. Le complexe des axes se trouve complètement déterminé de la sorte (II, page 188). Les centres de toutes les courbes, suivant lesquelles la surface du second ordre est coupée par des plans parallèles, sont situés sur un même diamètre conjugué aux plans. Pour démontrer la dernière partie du théorème, il nous suffit donc de prouver que le diamètre conjugué à tout plan passant par un plan donné P est déterminé sans ambiguïté ; car les deux axes d'un plan, qui se coupent sur le diamètre conjugué à ce plan, sont en même temps les axes de la conique, située sur la surface du second

ordre et dans ce plan ; et comme ce sont des rayons du complexe d'axes, ils sont connus.

Chaque axe principal de la surface du second ordre est conjugué au plan passant par P, qui est perpendiculaire à cet axe ; et tout plan mené par P parallèlement à un plan de symétrie est conjugué au diamètre normal à ce plan de symétrie (dans le cas du paraboloïde, ce diamètre est situé à l'infini dans l'autre plan de symétrie). Nous connaissons aussi le diamètre conjugué au plan mené par P parallèlement à $\varepsilon$ ; par conséquent, nous avons les diamètres conjugués à quatre plans passant par P, dont trois quelconques ne se coupent pas suivant une seule et même droite. Or, comme on le sait, la gerbe de plans P se trouve rapportée réciproquement à la gerbe de diamètres, lorsqu'on rapporte chaque plan de P au diamètre qui lui est conjugué ; et comme nous connaissons déjà les diamètres conjugués à quatre plans passant par P, la réciprocité des deux gerbes se trouve complètement établie. On peut trouver effectivement le diamètre conjugué à un plan passant par P, au moyen d'une construction linéaire, et le théorème est démontré.

Soient $a$ et $a_1$ deux axes parallèles du complexe et supposons qu'ils soient respectivement coupés en A et $A_1$ par un diamètre quelconque. Nous pouvons construire deux surfaces du second ordre auxquelles appartient le complexe d'axes et qui soient respectivement normales en A et $A_1$ aux axes $a$ et $a_1$. Les plans tangents en A et $A_1$ sont alors parallèles et conjugués au même diamètre $\overline{AA_1}$. Mais, d'après ce que nous venons de dire précédemment, deux diamètres qui sont conjugués à des plans parallèles par rapport aux deux surfaces du second ordre, doivent se confondre. Nous dirons que les deux surfaces sont *semblables, concentriques et semblablement placées* ou, pour abréger, qu'elles sont *coaxiales et homothétiques*. La propriété que nous venons de reconnaître pour ces surfaces peut s'énoncer comme il suit :

*Les centres et les axes des coniques déterminées par un plan dans des surfaces coaxiales et homothétiques coïncident. Aux points où un diamètre quelconque coupe les surfaces, les plans tangents sont parallèles. Les points milieux des cordes parallèles des surfaces sont tous situés dans un seul et même plan diamétral.*

Deux de ces cordes parallèles passent par A et $A_1$ et coupent à nouveau les surfaces du second ordre aux points B et $B_1$. Comme A, $A_1$ et les milieux des cordes AB et $A_1B_1$ sont situés sur un diamètre, B et $B_1$

doivent aussi être sur un diamètre. Si les surfaces ont un centre M, la similitude des triangles AMB et $A_1MB_1$ nous donne la proportion

$$MA : MA_1 = MB : MB_1,$$

C'est-à-dire :

*Les diamètres d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes semblables, concentriques et semblablement placés, sont coupés par les surfaces en parties proportionnelles. Par conséquent, des hyperboloïdes coaxiaux et homothétiques ont le même cône asymptotique.*

Si, au contraire, les surfaces sont des paraboloïdes, les diamètres $AA_1$ et $BB_1$ sont parallèles entre eux, et le quadrangle $AA_1BB_1$ est un parallélogramme; les segments $AA_1$ et $BB_1$ sont donc égaux et par suite :

*Deux paraboloïdes coaxiaux et homothétiques peuvent être superposés en déplaçant l'un d'eux suivant la direction des diamètres (d'une quantité égale à $AA_1$).*

Deux hyperboloïdes concentriques, dont les cônes asymptotiques coïncident, ont tous leurs axes communs et sont coupés par un plan quelconque suivant des courbes concentriques qui ont les mêmes axes. En effet, le cône asymptotique détermine le diamètre conjugué à un plan quelconque $\varepsilon$ de l'espace et par suite le centre de $\varepsilon$ et tous les axes normaux à $\varepsilon$.

Un hyperboloïde est complètement déterminé quand on donne son cône asymptotique et un point P de cet hyperboloïde, situé à son intérieur ou à son extérieur. En effet, tout plan passant par P et par le sommet et coupant le cône asymptotique suivant deux rayons $a$ et $b$, a une hyperbole commune avec l'hyperboloïde; cette courbe passe par le point P et a les droites $a$ et $b$ pour asymptotes; il est donc facile de la tracer.

Si l'on construit toutes les surfaces coaxiales et homothétiques à une surface du second ordre, il passe une seule de ces surfaces par chaque point de l'espace, quand la surface donnée est un ellipsoïde ou un paraboloïde; si, au contraire, celle-ci est un hyperboloïde à une ou à deux nappes, partout extérieur ou intérieur au cône asymptotique, il passe une de ces deux surfaces. Dans ce dernier cas, nous considérons en outre tous les autres hyperboloïdes, ayant le même cône asymptotique que le premier, de sorte que nous aurons ainsi un système d'hyperboloïdes

semblables à une nappe et un système d'hyperboloïdes semblables à deux nappes. Nous dirons que toutes les surfaces, ainsi construites par rapport à une surface donnée et dont il ne passe qu'une seule par chaque point propre de l'espace, forment *un faisceau de surfaces du second ordre coaxiales et homothétiques*.

Un plan quelconque ne sera touché que par une seule de ces surfaces et le contact aura lieu au centre commun des coniques suivant lesquelles ce plan coupe toutes les autres surfaces; car les pôles du plan par rapport à toutes les surfaces du faisceau sont situés sur le diamètre conjugué à ce plan. Les plans polaires d'un point par rapport à toutes les surfaces du faisceau sont parallèles et conjugués à un seul et même diamètre. Chaque axe est normal à l'une des surfaces en un point F, et son pied F se construit en cherchant l'intersection de cet axe avec le diamètre conjugué aux plans normaux à l'axe (II, pages 186 et 192). D'après des théorèmes démontrés précédemment, les axes situés dans un plan donné forment un faisceau parabolique du second ordre ou deux faisceaux du premier ordre; donc :

*Les normales que l'on peut mener dans un plan quelconque $\pi$ à un faisceau de surfaces coaxiales et homothétiques du second ordre sont tangentes à une parabole ou forment un faisceau ordinaire et un faisceau de rayons parallèles. Leurs pieds sont situés sur une ligne droite.*

Le théorème n'a plus lieu quand $\pi$ est un plan de symétrie; sa dernière partie peut être démontrée comme il suit. Tous les plans perpendiculaire aux axes contenus dans $\pi$ sont parallèles aux plans d'un faisceau de plans du premier ordre; leurs diamètres conjugués sont donc situés dans un même plan et coupent le plan $\pi$ suivant les points d'une droite qui contient les pieds de toutes ces normales.

Comme une droite ne peut avoir plus de deux points communs avec une surface du second ordre, sans être située entièrement sur elle, il s'ensuit que :

*Dans un plan quelconque $\pi$, il n'y a en général et au plus que deux normales d'une surface du second ordre.*

Il n'y a d'exception que pour les plans de symétrie et, dans les surfaces coniques du second ordre, pour les plans normaux qui coupent suivant des rayons les plans tangents correspondants. Si l'on cherche le plan diamétral conjugué aux droites qui sont perpendiculaires au plan $\pi$ et si l'on détermine son intersection avec le plan $\pi$, cette droite

d'intersection passe par les pieds des normales menées dans le plan $\pi$ à la surface du second degré. Ces points sont d'après cela faciles à construire.

*Les normales que l'on peut mener d'un point quelconque P à un faisceau de surfaces du second degré, semblables, concentriques et semblablement placées, forment une surface conique du second ordre* (II, page 184), *quand P n'est ni à l'infini, ni dans un plan de symétrie ; leurs pieds constituent une courbe gauche du troisième ordre, qui passe par P et par les trois points à l'infini, c'est-à-dire par les pôles des plans de symétrie et les points à l'infini sur les axes principaux; elle contient aussi le centre des surfaces du second ordre, quand elles en ont un.*

La seconde partie de ce théorème s'obtient de la manière suivante :

Les plans perpendiculaires aux rayons de la surface conique P sont parallèles aux plans tangents d'une seconde surface conique du second ordre ; en effet, si du point P comme centre on décrit une sphère, chaque rayon de P a pour conjugué le plan diamétral de cette sphère qui lui est perpendiculaire ; et comme la gerbe P de diamètres est une gerbe polaire, la surface conique P doit avoir pour conjugué un faisceau projectif de plans du second ordre, qui enveloppe la seconde surface conique. Les diamètres des surfaces du second ordre semblables et semblablement placées, qui sont conjugués aux plans de ce faisceau du second ordre, forment donc également un cône ou un cylindre du second ordre M, qui engendre avec le cône P des normales la courbe du troisième ordre dont il est question dans le théorème. Car les surfaces coniques M et P ont en commun le diamètre $\overline{MP}$ qui passe par le point P ; en effet, tous les axes du faisceau de surfaces qui sont perpendiculaires à un plan conjugué à $\overline{MP}$ coupent le diamètre $\overline{MP}$ et par conséquent l'un d'eux appartient à la surface conique P. Comme toute normale $n$ est rencontrée en son pied par le diamètre qui est conjugué à tous les plans normaux à $n$, les pieds de toutes les normales passant par P sont situés sur la courbe du troisième ordre, qui est, avec le diamètre $\overline{MP}$, le lieu des éléments communs aux deux surfaces coniques M et P. Ces deux cônes passent par les trois points à l'infini mentionnés dans le théorème ; il en est donc de même pour leur courbe d'intersection.

Une surface isolée quelconque du faisceau a au plus six points communs avec la courbe gauche du troisième ordre (II, page 166) et dans

le cas d'un paraboloïde, le point à l'infini sur l'axe principal est l'un de ces six points; donc :

*D'un point quelconque on ne peut pas mener plus de six normales à une surface du second ordre; dans le cas du paraboloïde, l'une de ces normales est un diamètre et son pied est le point à l'infini du paraboloïde.*

Quelques-uns des théorèmes de la dernière leçon nous donnent les propositions suivantes sur les normales des surfaces du second ordre :

*Les plans de symétrie et une normale quelconque d'un faisceau de surfaces coaxiales et homothétiques du second ordre déterminent toutes les normales de ces surfaces. Les normales, qui coupent une droite* g, *sont tellement disposées que toutes celles qui passent par un point P quelconque de* g *forment une surface conique du second ordre et que toutes celles qui sont contenues dans un plan* $\pi$ *quelconque passant par* g *enveloppent une parabole. Si P est à l'infini ou dans l'un des plans de symétrie, la surface conique du second ordre se décompose en deux faisceaux de rayons du premier ordre et, de même, si* $\pi$ *est un plan diamétral de la surface ou est perpendiculaire à un plan de symétrie, nous avons à la place des tangentes d'une parabole deux faisceaux de rayons du premier ordre. Les pieds de toutes les normales, qui coupent la droite* g, *forment une surface conique ou une surface réglée du second ordre, suivant que* g *elle-même est ou n'est pas normale à l'une des surfaces du faisceau; si cependant* g *est à l'infini, ces pieds sont tous dans un plan diamétral, et si* g *est dans un plan de symétrie, ils sont en partie dans ce plan et en partie dans un plan perpendiculaire au plan de symétrie.*

La dernière partie du théorème découle de ce que le lieu géométrique des pieds des normales a une droite commune avec tout plan $\pi$ mené par $g$ et une courbe gauche du troisième ordre commune avec tout cône d'axes P, dont le sommet est situé sur $g$. Nous laissons au lecteur le soin de trouver la démonstration de cette proposition.

---

# VINGT-TROISIÈME LEÇON.

**Pieds des axes d'une surface du second ordre. — Surfaces homofocales du second ordre.**

Les surfaces du second ordre, qui ont le même complexe d'axes, peuvent être groupées en certains systèmes de surfaces qui sont encore bien plus intéressants que celui des surfaces semblables, concentriques et semblablement placées. Les recherches qui suivent nous conduisent à ces groupes et à leurs propriétés les plus importantes; nous en excluons à l'avance les surfaces de révolution et les surfaces coniques du second ordre.

A tout axe $a$ est conjugué par rapport à une surface donnée du second ordre un seul plan qui lui est perpendiculaire; seuls les axes principaux de la surface font exception, puisqu'ils sont perpendiculaires à chacun des plans qui leur sont conjugués. Le point où un axe $a$ est coupé normalement par le plan qui lui est conjugué mérite tout particulièrement de fixer l'attention. Si, par exemple, l'axe $a$ est une normale de la surface du second ordre, ce point se confond avec le pied de cette normale; à cause de cette propriété, nous dirons aussi, dans tous les autres cas, que le point en question est le *pied* de l'axe $a$. Nous l'obtenons aussi en projetant la polaire de l'axe $a$ sur un plan quelconque $\varepsilon$ mené par $a$ et en cherchant le point où cette projection coupe l'axe $a$; en effet, le plan projetant est perpendiculaire à $a$, parce que, en outre de la polaire, il renferme encore d'autres droites perpendiculaires à $a$, qui sont normales au plan $\varepsilon$ et coupent la polaire. La projection de la polaire fait aussi avec $a$ un angle droit.

*Tout point de l'espace est le pied de trois axes perpendiculaires entre eux.*

Ce sont les axes principaux d'une surface conique circonscrite à la surface du second ordre, ou bien encore les axes principaux d'une gerbe polaire, qui appartient au système polaire déterminé par la surface du second ordre.

*Les pieds de tous les axes perpendiculaires à un plan de symétrie sont situés dans ce plan; tout point d'un axe principal peut être considéré comme le pied de cet axe; le pied d'un diamètre quelconque est à l'infini.*

Tout ceci découle de la définition du pied d'un axe.

*Les pieds de tous les axes, que l'on peut mener suivant une direction donnée, et qui, par conséquent, sont contenus dans un plan diamétral $\delta$, sont situés en général sur une hyperbole équilatère dont le centre coïncide avec celui de la surface; ils ne sont sur une droite que si la surface du second ordre est un paraboloïde.*

En effet, les polaires de ces axes forment un deuxième faisceau de rayons parallèles projectif au premier, et nous obtenons le pied de chaque axe en cherchant son intersection avec la projection rectangulaire de sa polaire sur le plan diamétral $\delta$. Les pieds des axes parallèles sont donc la forme engendrée par deux faisceaux de rayons parallèles projectifs et perpendiculaires entre eux; c'est seulement dans le cas du paraboloïde qu'ils ont leur rayon à l'infini comme élément correspondant commun et qu'ils sont perspectifs; dans tous les autres cas, ils engendrent une courbe du second ordre ayant deux points à l'infini, c'est l'hyperbole équilatère en question.

*Les pieds de tous les axes, qui sont coupés par un plan de symétrie $\gamma$ en un point donné P et qui par suite sont contenus dans un plan perpendiculaire à $\gamma$ sont situés sur un cercle passant par P, dont le centre est sur $\gamma$ et dont le plan est perpendiculaire à $\gamma$.*

Cette courbe est engendrée par le faisceau P des axes et par le faisceau de rayons projectif à P suivant lequel les polaires de ces axes sont projetées perpendiculairement sur le plan du faisceau P. Si un deuxième plan de symétrie $\gamma_1$ est coupé par l'un quelconque des axes du faisceau P au point $P_1$, les pieds de tous les autres axes qui sont coupés par $\gamma_1$ en $P_1$ sont situés sur un cercle symétriquement placé par rapport à $\gamma_1$; ce dernier se réduit au point $P_1$, si $P_1$ est le point de rencontre du plan de symétrie $\gamma_1$ avec le cercle formé par les pieds des

axes du faisceau P. En faisant abstraction de ce cas particulier, nous pouvons dire :

*Si deux plans de symétrie $\gamma$ et $\gamma_1$ sont respectivement coupés aux points P et $P_1$ par un axe quelconque, et si g et $g_1$ sont les perpendiculaires respectivement abaissées de P et $P_1$ sur l'axe principal commun à $\gamma$ et $\gamma_1$, toute droite de l'espace qui réunit un point de g à un point de $g_1$ est un axe* (II, page 187). *Les pieds de tous ces axes forment une surface passant par g et $g_1$, dont $\gamma$ et $\gamma_1$ sont deux plans de symétrie et qui est coupée par tout plan mené par g ou $g_1$ suivant cette droite et suivant un cercle*[1]. *Cette surface est donc complètement déterminée et facile à construire, du moment qu'on en connaît un point et les droites g et $g_1$.*

Tous les axes situés dans un plan quelconque $\pi$ forment un faisceau de rayons du second ordre et leurs polaires une surface conique du second ordre : et comme un rayon de cette dernière est perpendiculaire à $\pi$, les projections des polaires sur le plan $\pi$ forment un faisceau de rayons du premier ordre projectif au faisceau du second ordre et qui engendre avec lui le lieu des pieds de tous les axes contenus dans $\pi$. Le centre du faisceau du premier ordre est le pied de deux de ces axes. Donc (I, page 157) :

*Les pieds de tous les axes contenus dans un plan quelconque sont situés sur une courbe du troisième ordre, qui a un point double.*

Les pieds de tous les axes passant par un point quelconque P sont situés sur une courbe gauche, qui est projetée de P suivant une surface conique du second ordre. Cette courbe doit passer trois fois par le point P, parce que ce point est le pied de trois axes rectangulaires entre eux ; elle est tangente à ces trois axes en P. Un quatrième axe quelconque passant par P contient un point de la courbe différent de P. On peut démontrer que cette courbe ne peut avoir plus de cinq points

---

1. Si l'on rapporte cette surface à un système d'axes coordonnés rectangulaires, dont l'axe des X soit la droite d'intersection des plans de symétrie $\gamma$ et $\gamma_1$, dont l'axe des Y coïncide avec $g$ et dont par suite l'axe des Z contenu dans $\gamma_1$ soit parallèle à $g_1$, cette surface a pour équation

$$(x^2 + z^2 - dx)(x - k) + xy^2 = 0.$$

Ici $k$ est la distance de la droite $g_1$ à l'axe des Z et $d$ le diamètre du cercle suivant lequel le plan $\overline{XZ}$ ou $\gamma_1$ rencontre la surface. Tout plan normal à l'axe des X et par suite parallèle aux droites $g$ et $g_1$ a aussi une conique commune avec cette surface.

communs avec un plan quelconque et que, par suite, elle est du cinquième ordre. Pour n'être pas entraînés trop loin, nous n'indiquons pas cette démonstration ici.

*Étant donnés un complexe d'axes et le pied F d'un axe quelconque* a, *qui n'est pas perpendiculaire à un plan de symétrie et ne coupe pas un axe principal, le pied d'un axe quelconque se trouve par là même entièrement déterminé.*

Nous construisons deux droites $g$ et $g_1$ qui coupent l'axe $a$ et qui soient situées chacune dans l'un des deux plans de symétrie $\gamma$ et $\gamma_1$ et perpendiculaires entre elles. Toute droite qui est rencontrée par $g$ et $g_1$ est un axe et son pied se trouve sur une surface, facile à construire, qui passe par $g$, $g_1$ et F (II, page 199); il est donc complètement déterminé par cette surface. Tout plan diamétral contient l'un de ces axes et son pied détermine l'hyperbole équilatère sur laquelle sont situés en général les pieds de tous les axes contenus dans le plan diamétral, parce que les asymptotes de cette hyperbole sont respectivement parallèles et perpendiculaires à ces axes et parce qu'elles passent par le centre du complexe d'axes. Dans le cas où il existe un centre, nous pourrons construire de cette manière le pied de chaque axe, en menant un plan diamétral par cet axe. Si au contraire il n'y a pas de centre et si, par conséquent, les pieds de tous les axes contenus dans un plan diamétral sont situés sur une droite, il faut que nous construisions un second point de cette droite. Nous nous servons pour cela des deux axes $b$ et $c$ qui passent par F, qui sont perpendiculaires entre eux et à $a$ et qui, de même que $a$, nous fournissent les pieds d'une infinité de nouveaux axes, puisque leur propre pied F est connu. Donc, dans ce cas aussi, on peut construire le pied de chaque axe et le théorème est démontré d'une manière générale.

Parmi les surfaces du second ordre auxquelles appartient un complexe d'axes donné, il y en a une infinité pour lesquelles tous les axes ont les mêmes pieds; nous leur donnerons le nom de *surfaces homofocales du second ordre*. Chaque axe $a$ est normal en son pied à une de ces surfaces homofocales, et cette dernière se trouve complètement déterminée par cet axe, son pied et les plans de symétrie (II, page 188).

*Dans le système de surfaces homofocales du second ordre que nous obtenons de la sorte, il y a trois surfaces qui passent par chaque point P de l'espace; ces trois surfaces se coupent rectangulairement entre elles en ce point.*

En effet P est le pied de trois axes rectangulaires entre eux; chacun d'eux est normal à l'une de ces trois surfaces et conséquemment doit être tangent aux deux autres. Nous pouvons dire aussi que :

*Deux surfaces homofocales du second ordre se coupent rectangulairement en chacun de leurs points communs.*

Les normales aux surfaces et les tangentes aux courbes d'intersection en P sont les trois axes rectangulaires entre eux, qui ont le point P pour pied. La courbe d'intersection est symétrique par rapport à chaque plan de symétrie $\gamma$ de la surface; ce plan $\gamma$ ne la rencontrera pas du tout, ou la coupera normalement, parce qu'il est normal aux surfaces en chaque point où il les rencontre. Remarquons en passant que la ligne d'intersection de deux surfaces homofocales est projetée du pôle de chacun des plans de symétrie suivant une surface cylindrique du second ordre et du centre, suivant une surface conique du second ordre (II, page 165); en effet, ces points sont les points principaux du faisceau ponctuel de $F^2$ dont les deux surfaces homofocales font partie. Nous pouvons d'après cela énoncer ce théorème :

*Si l'on projette la ligne d'intersection de deux surfaces homofocales perpendiculairement à l'un de leurs plans de symétrie, on obtient une conique dont les axes sont situés dans les deux autres plans de symétrie.*

Tout axe $a$ a pour conjugué, par rapport aux surfaces homofocales, le plan $\pi$ qui lui est perpendiculaire et qui passe par son pied. Réciproquement, à tout plan est conjugué un axe qui lui est normal; et nous obtenons ce dernier en abaissant de l'un des pôles du plan une perpendiculaire sur ce plan. Donc :

*Les polaires d'un axe quelconque* a *par rapport à un système de surfaces homofocales du second ordre sont situées dans un plan perpendiculaire à* a *et enveloppent une parabole, puisqu'elles sont également des axes. Les pôles d'un plan quelconque sont situés sur l'axe qui lui est perpendiculaire et au pied duquel le plan est tangent à l'une des surfaces homofocales.*

Le complexe de rayons, que les surfaces homofocales déterminent deux à deux, se compose des axes des surfaces, puisque les polaires de chaque axe se coupent; on voit ainsi que (II, page 165) :

*Le système de surfaces homofocales du second ordre est un cas particulier du faisceau tangentiel de* $\Phi^2$.

Tous les théorèmes trouvés pour les faisceaux tangentiels de $\Phi^2$ sub-

sistent donc aussi pour les systèmes de surfaces homofocales. Par exemple, les plans polaires d'un point par rapport aux surfaces homofocales forment un faisceau de plans du troisième ordre.

Puisque les pôles d'un plan par rapport aux surfaces homofocales du second ordre sont tous situés sur un axe normal au plan, il s'ensuit que :

*Lorsque deux plans rectangulaires sont conjugués par rapport à une surface quelconque* $F^2$ *du second ordre, ils sont aussi conjugués par rapport à toutes les surfaces homofocales avec* $F^2$.

Nous donnerons le nom d'*axe focal* de $F^2$ à l'axe de tout faisceau de plans dans lequel deux plans perpendiculaires entre eux sont conjugués par rapport à $F^2$. On déduit immédiatement du dernier théorème que :

*Tout axe focal d'une surface* $F^2$ *du second ordre est un axe focal commun à toutes les surfaces du second ordre homofocales avec* $F_2$.

Par tout point P passent deux axes focaux réels des surfaces homofocales; ce sont les axes focaux du cône ayant son sommet en P et circonscrit à l'une des surfaces homofocales. Ces deux axes ne se confondent que lorsque le cône est de révolution (1, page 190).

*Les cônes issus d'un même point P que l'on peut circonscrire à des surfaces homofocales du second ordre sont donc homofocaux, c'est-à-dire ont leurs axes focaux communs.*

Le plan $\pi$ de ces deux axes focaux $f$ et $f'$, est normal à l'axe principal du cône qui lui est conjugué et est tangent en P à l'une des surfaces homofocales $F^2$. Par rapport à cette surface, le pôle de tout autre plan $\varepsilon$ mené par $f$ se trouve d'une part dans $\pi$, d'autre part dans le plan du faisceau $f$ qui est normal à $\varepsilon$; il est donc situé sur l'axe focal $f$ lui-même; par conséquent, la surface est tangente en des points de $f$ à tous les plans passant par $f$ et par suite elle passe elle-même par $f$. On voit d'autre part que toute droite située sur l'une des surfaces homofocales $F^2$ est un axe focal de cette surface, parce que les plans perpendiculaires deux à deux, qui se coupent suivant la droite en question, sont conjugués par rapport à cette surface. Donc :

*Les axes focaux d'un système de surfaces homofocales du second ordre sont identiques avec les droites qui sont situées sur ces surfaces; par un point quelconque P, il passe toujours une surface réglée du système. Les axes focaux réels, qui coupent un axe focal, forment un système réglé et sont situés sur l'une des surfaces homofocales.*

Un plan quelconque $\varepsilon$ n'a, par rapport à une surface du second ordre $F^2$, qu'un seul *rayon conjugué normal*, qui passe par le pôle de $\varepsilon$ et qui

est normal à ce plan ; c'est aussi le rayon conjugué normal de $\varepsilon$ par rapport à toutes les surfaces homofocales avec $F^2$. Si l'on cherche les intersections de $\varepsilon$ et de $e$ avec un plan de symétrie, intersections qui sont respectivement la droite $p$ et le point P, les rayons conjugués normaux de tous les plans passant par $p$ se rencontrent au point P. En effet, projetons d'une part les pôles de ces plans à partir du point P et abaissons d'autre part des normales de P sur ces plans, nous obtenons deux faisceaux P de rayons projectifs au faisceau de plans $p$, qui ont trois rayons correspondants communs (ce sont $e$ et les deux rayons respectivement normaux à $\gamma$ et $p$) et qui par conséquent sont identiques. De plus $p$ et P sont deux éléments conjugués d'un système polaire plan situé dans le plan de symétrie $\gamma$. En effet, le rayon conjugué normal de de tout plan $\overline{eq}$ passant par $e$ est situé dans $\varepsilon$ et coupe $\gamma$ en un point Q de $q$ ; si donc une droite $q$ pivote autour de P dans $\gamma$, le point Q qui lui est conjugué décrit la droite $p$. Donc :

*Si un plan de symétrie $\gamma$ des surfaces homofocales coupe chaque plan et le rayon normal qui lui est conjugué, on obtient des éléments conjugués d'un système polaire plan situé dans $\gamma$ et dont chaque axe principal des surfaces contenu dans $\gamma$ est un axe. Les trois axes principaux de tout cône circonscrit aux surfaces coupent le plan de symétrie suivant un triangle polaire de ce système polaire. Nous donnerons à la courbe double de ce système le nom de* CONIQUE FOCALE *et à chacun de ses points le nom de* POINT FOCAL *des surfaces homofocales.*

Si les surfaces homofocales sont des paraboloïdes, la droite à l'infini du plan de symétrie $\gamma$ est conjuguée au point à l'infini sur l'axe principal.

*Les points focaux de paraboloïdes homofocaux sont donc situés sur deux paraboles dont les axes coïncident avec l'axe principal des paraboloïdes.*

Si au contraire les surfaces homofocales ont un centre, leurs trois plans de symétrie et le plan à l'infini divisent l'espace infini en huit régions. Il n'y a qu'une seule R de ces régions que ne coupe pas le plan arbitraire $\varepsilon$; R sera rencontrée au contraire par le rayon normal $e$ conjugué à $\varepsilon$, puisque les éléments à l'infini de $\varepsilon$ et $e$ sont séparés les uns des autres par les trois plans de symétrie. En outre de son point à l'infini, la droite $e$ a encore un point propre commun avec la limite de l'espace R, et le plan de symétrie dans lequel se trouve ce point ne ren-

ferme pas de conique focale, tandis que les coniques focales sont réelles dans les deux autres plans de symétrie (II, page 74). Donc :

*Les surfaces homofocales du second ordre ont deux coniques focales réelles et n'en ont que deux.*

Tout point focal F d'un plan de symétrie est situé sur la droite $f$ qui lui est conjuguée et les plans menés par $f$ sont coupés normalement au point focal F par leurs rayons conjugués normaux. Toute tangente $f$ d'une conique focale est donc un axe focal des surfaces homofocales et :

*Les cônes, ayant pour sommets un point focal* F *et circonscrits aux surfaces homofocales, sont des cônes de révolution,*
puisqu'ils ont une infinité d'axes principaux normaux à $f$.

Les sommets de tous les cônes de révolution circonscrits aux surfaces homofocales sont des points focaux de ces surfaces, parce qu'ils sont chacun les pieds d'un faisceau d'axes et par suite doivent être situés dans l'un ou l'autre des plans de symétrie et sur les droites qui leur sont conjuguées.

*Les coniques focales font aussi partie du système de surfaces homofocales à titre de surfaces singulières de deuxième classe.*

En effet, à chaque plan $\varepsilon$ nous pouvons rapporter comme pôle, par rapport à l'une de ces coniques, le point par la polaire duquel il passe; la perpendiculaire abaissée de ce pôle sur $\varepsilon$ est un axe des surfaces homofocales et son point d'intersection avec $\varepsilon$ en est le pied. Le complexe d'axes et les pieds de tous les axes sont donc déterminés d'une manière aussi complète par la conique focale que par une autre quelconque des surfaces homofocales. — Chacune des deux coniques focales est projetée d'un point quelconque de l'autre suivant un cône de révolution. L'une est donc une ellipse, quand l'autre est une hyperbole et réciproquement ; car par une ellipse on peut faire passer deux cylindres de révolution, tandis que par une hyperbole on n'en peut mener aucun.

Soit $g$ une droite quelconque et soient $g_1$ et $g_2$ ses polaires par rapport à deux quelconques des surfaces homofocales. A tout plan $\pi$ mené par $g$ correspond un pôle de ce plan situé sur $g_1$ et sur $g_2$ et la droite $a$ qui réunit ces deux pôles contient tous les autres pôles de $\pi$ par rapport à toutes les surfaces homofocales. Si le plan $\pi$ tourne autour de $g$, la droite $a$ qui lui est conjuguée décrit un faisceau de rayons du second ordre ou un système réglé, suivant que $g_1$ et $g_2$ se coupent ou ne se rencontrent pas et $a$ passe une fois à l'infini, quand $\pi$ coïncide avec un plan diamétral. Le faisceau de plans $g$ est projectif à la forme de rayons

décrite par $a$ et engendre avec elle une courbe gauche ou plane du troisième ordre. Donc :

*Les pôles par rapport à un système de surfaces homofocales du second ordre de tous les plans qui passent par une droite arbitraire* g *sont situés sur un paraboloïde hyperbolique, qui contient les polaires* $g_1$ *et* $g_2$ *de la droite* g, *ou (si* g *est un axe) sur les tangentes d'une parabole. Chacun des plans du faisceau* g *est tangent à une des surfaces homofocales; dans le premier cas, les points de contact sont situés sur une courbe gauche du troisième ordre; dans le second, au contraire, ils se trouvent sur une courbe plane du troisième ordre.*

Si la droite $g$ est un axe, elle est perpendiculaire au plan de la parabole et est rencontrée par deux tangentes de cette courbe; si $g$ n'est pas un axe, elle coupe le paraboloïde hyperbolique en deux points, ou bien elle a tous ses points communs avec cette surface et coïncide avec l'une de ses polaires. La droite $g$ est donc alors tangente à deux surfaces homofocales au plus, ou bien elle est située sur l'une de ces surfaces, et tout plan mené par $g$ est tangent à l'une de ces surfaces en un point situé sur $g$.

Supposons encore que $\pi$ soit un plan du faisceau $g$ et que le point où il est tangent à l'une des surfaces homofocales soit en dehors de la droite $g$. Nous pouvons alors mener encore par $g$ un second plan $\pi_1$ tangent à cette surface. Les plans bissecteurs $\mu$ et $\nu$ du dièdre formé par les plans $\pi$ et $\pi_1$ sont perpendiculaires l'un à l'autre et conjugués par rapport à la surface du second ordre; l'axe qui est conjugué et normal à l'un $\mu$ de ces plans bissecteurs doit être contenu dans l'autre $\nu$ et par conséquent est coupé normalement en son pied par la droite $g$. Donc :

*Une droite quelconque* g, *qui n'est située sur aucune des surfaces homofocales du second ordre, est tangente à deux de ces surfaces. Les plans tangents* $\mu$ *et* $\nu$ *de ces deux surfaces sont perpendiculaires entre eux et bissectent tout angle dièdre* $\pi\pi_1$ *dont l'arête est la droite* g *et qui est circonscrit à l'une quelconque des surfaces homofocales.*

Le faisceau de plans $g$ est d'après cela en involution symétrique avec les plans doubles $\mu$ et $\nu$, quand on fait correspondre entre eux deux à deux les plans qui sont tangents à l'une des surfaces homofocales.

Nous sommes conduits à une autre série de théorèmes intéressants, en remarquant que des surfaces homofocales du second ordre ont le même complexe d'axes et que les pieds des axes sont les mêmes pour toutes ces surfaces. Par exemple :

*Les normales que l'on peut mener dans un plan quelconque* $\pi$ *à un système de surfaces homofocales du second ordre enveloppent en général une parabole; leurs pieds sont situés sur une courbe du troisième ordre à point double et les plans tangents auxquels elles sont perpendiculaires forment un faisceau de plans du premier ordre* (II, page 199). *Ces normales sont en même temps les axes des coniques communes au plan* $\pi$ *et aux surfaces homofocales; les centres de ces coniques sont situés sur la directrice de la parabole* (II, pages 189-190).

Ce théorème comporte une exception, c'est quand $\pi$ est un plan diamétral ou est perpendiculaire à un plan de symétrie.

*Si le plan* $\pi$ *est perpendiculaire à un plan de symétrie* $\gamma$, *toutes les normales aux surfaces homofocales qui sont renfermées dans ce plan forment un faisceau de rayons dont le centre* P *est contenu dans le plan de symétrie* $\gamma$; *leurs pieds sont situés sur un cercle passant par* P *et dont le centre est sur* $\gamma$.

*Si* $\pi$ *est un plan diamétral, toutes les normales qu'il renferme forment un faisceau de rayons parallèles; leurs pieds sont sur une hyperbole équilatère (dont le centre coïncide avec celui des surfaces homofocales) ou sur une droite (quand ces surfaces n'ont pas de centre).*

Nous pouvons tirer de là des conclusions relativement aux normales que l'on peut mener aux surfaces homofocales parallèlement à une droite donnée ou par un point P d'un plan de symétrie $\gamma$.

*Toutes les normales que l'on peut mener d'un point quelconque* P *aux surfaces homofocales sont en général situées sur une surface conique du second ordre; leurs pieds sont situés sur une courbe gauche du cinquième ordre, qui a le point* P *pour point triple.*

On peut, d'une manière analogue, étendre aux normales d'un système de surfaces homofocales et à leurs pieds tous les autres théorèmes qu'on a démontrés pour les pieds des rayons d'un complexe d'axes. Comme exemple, nous citerons la proposition suivante qui se déduit de la réunion de deux des précédentes.

*Les normales aux surfaces homofocales qui sont coupées par un plan de symétrie* $\gamma$ *suivant les points d'un diamètre* d, *sont parallèles à un plan* $\varepsilon$ *perpendiculaire à* $\gamma$. *Leurs pieds sont sur une surface passant par* d *et dont* $\gamma$ *est un plan de symétrie. Cette surface est coupée par tout plan parallèle à* $\varepsilon$ *suivant un cercle et une droite à l'infini et par tout plan passant par* d, *suivant ce diamètre et une hy-*

*perbole équilatère, dont le centre coïncide avec le centre des surfaces homofocales et dont l'une des asymptotes est parallèles à z. Quand les surfaces n'ont pas de centre, nous avons à la place de l'hyperbole une droite propre et une droite à l'infini; dans ce cas, la surface, lieu des pieds des normales, se compose d'une surface réglée du second ordre et du plan à l'infini.*

---

# VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

**Surfaces du troisième ordre ; représentation de ces surfaces sur un plan ; courbes gauches du troisième qui s'y rattachent.**

Lorsque dans l'espace trois gerbes non concentriques $S$, $S_1$, $S_2$ sont rapportées collinéairement les unes aux autres, mais ne sont pas perspectives, trois plans correspondants quelconques de ces gerbes se coupent en un point et exceptionnellement seulement suivant une même droite. Les points d'intersection des plans homologues constituent une surface $F^3$ à l'étude de laquelle nous allons consacrer la présente leçon.

Déterminons d'abord l'ordre de la surface $F^3$, c'est-à-dire le nombre de points qui sont communs à $F^3$ et à une droite $g$. Si deux rayons homologues des gerbes $S$ et $S_1$ se coupent en un point $P$ de $g$, ce point $P$ est situé sur la surface $F^3$ ; en effet, aux faisceaux de plan $\overline{SP}$ et $\overline{S_1P}$ correspond dans la gerbe $S_2$ un troisième faisceau de plans dont un plan passe par le point $P$, en sorte que $P$ se présente alors comme point d'intersection de trois plans homologues des gerbes $S$, $S_1$ et $S_2$. En passant, nous déduisons de là :

*La surface $F^3$ passe par les trois courbes gauches du troisième ordre dont les systèmes de cordes sont engendrés par les trois gerbes collinéaires $S$, $S_1$ et $S_2$ prises deux à deux.*

Si deux plans correspondants des gerbes $S$ et $S_1$ se coupent suivant $g$, la droite $g$ a au plus deux points communs avec l'une des trois courbes gauches ; et de plus elle est coupée par le plan correspondant de la gerbe $S_2$ en un point de la surface $F^3$. Si ce cas ne se produit

pas, projetons $g$ de S suivant un faisceau de rayons et cherchons le faisceau de rayons correspondant dans $S_1$. Ce dernier est projectif à $g$ et engendre en général avec cette ponctuelle un faisceau de plans du second ordre, dont les différents plans sont coupés chacun par les plans correspondants de la gerbe S en un point de $g$. Au faisceau de plans du second ordre correspond dans $S_2$ un faisceau de plans du second ordre, également projectif à $g$, dont trois points au plus et un au moins passent par les points correspondants de $g$ (I, page 154), quand chaque point de $g$ n'est pas contenu dans le plan qui lui correspond dans $S_2$. Chaque point de cette espèce sur $g$ est l'intersection de trois plans homologues des gerbes S, $S_1$, $S_2$ et par conséquent est situé sur la surface $F^3$. Si deux rayons homologues des gerbes S et $S_1$ se coupent en un point P de $g$, au lieu des faisceaux de plans du second ordre, nous avons trois faisceaux de plans du premier ordre projectifs à $g$. Deux de ces faisceaux sont perspectifs à la ponctuelle $g$ ; le troisième, relatif à $S_2$, est également perspectif à $g$, autrement dit, il passe au plus deux de ses plans par les points de $g$ qui leur correspondent, en sorte que, dans ce cas encore, la droite $g$ a au plus deux points différents de P qui lui soient communs avec la surface $F^3$. De tout ceci il résulte que :

*Toute droite g, qui n'est pas entièrement située sur la surface $F^3$, a en commun avec elle trois points au plus et un point au moins. Trois gerbes collinéaires non concentriques, S, $S_1$, $S_2$ engendrent donc une surface du troisième ordre à laquelle appartiennent les points d'intersection des plans homologues trois à trois.*

Ce théorème subit une modification, quand les gerbes collinéaires engendrent un seul et même système de rayons du premier ordre. Ce cas a déjà été traité dans la douzième leçon ; nous l'exclurons à l'avenir de nos considérations.

Nous pouvons décrire une surface du troisième ordre par le mouvement d'un point en vertu du théorème suivant :

*Si les quatre faces d'un tétraèdre variable pivotent autour de quatre points fixes et si trois de ses sommets se meuvent sur trois droites fixes concourantes, le quatrième sommet décrit une surface du troisième ordre.*

En effet, on voit aisément que les quatre faces décrivent autour des points fixes quatre gerbes collinéaires, dont trois sont perspectives à la quatrième et engendrent la surface.

Nous arrivons, de la manière la plus simple, à un grand nombre de

propriétés importantes de la surface $F^3$ du troisième ordre, en rapportant comme il suit la surface à un système plan $\Sigma$, ou en la *représentant* sur le plan $\Sigma$. Pour cela, nous rapportons réciproquement le système plan aux trois gerbes collinéaires $S$, $S_1$ et $S_2$; à tout point de $\Sigma$ correspondent alors trois plans homologues des gerbes et, en même temps, leur point d'intersection situé sur $F^3$. Réciproquement, étant donné un point quelconque $P$ de $F^3$, on peut trouver le point de $\Sigma$ qui lui correspond au moyen des trois plans correspondants des gerbes, lesquels se coupent en $P$. A toute forme rectiligne de $\Sigma$ correspondent dans $S$, $S_1$, $S_2$ trois faisceaux projectifs de plans, et par conséquent sur $F^3$ une courbe gauche du troisième ordre engendrée par ces faisceaux de plans (II, page 105). En d'autres termes :

*La surface $F^3$ du troisième ordre est rapportée au système plan $\Sigma$ de telle manière qu'à tout point de $F^3$ correspond un point de $\Sigma$, à toute courbe cubique gauche de $F^3$, engendrée par trois faisceaux homologues de plans de $S$, $S_1$, $S_2$, une forme rectiligne de $\Sigma$, qui lui est projective; et, d'une manière générale, à l'ensemble des courbes gauches du troisième ordre de $F^3$, ainsi engendrées, correspondent les différentes droites de $\Sigma$.*

Nous désignerons sous le nom de *premier système de courbes de la surface du troisième ordre* toutes ces courbes gauches du troisième ordre situées sur $F^3$ et qui correspondent aux droites de $\Sigma$. Nous verrons qu'il existe encore sur la surface un second système de courbes gauches du troisième ordre dont la génération est toute différente. Ce premier système de courbes donne lieu aux théorèmes suivants :

*Deux courbes gauches de ce premier système ont toujours un point commun;*

en effet, les droites correspondantes de $\Sigma$ doivent se couper.

*Deux points quelconques de la surface gauche du troisième ordre peuvent être réunis par une courbe gauche unique du premier système;*

car par les deux points correspondants de $\Sigma$ on ne peut faire passer qu'une seule droite.

A toutes les droites de $\Sigma$, qui passent par un point donné, correspondent sur $F^3$ toutes les courbes du premier système qui passent par le point correspondant; nous leur donnerons le nom de *faisceau de courbes*. Un faisceau de rayons du système plan $\Sigma$ rapporte perspectivement entre elles toutes les formes rectilignes de $\Sigma$ qui ne passent pas

par le centre du faisceau; et comme chacune d'elles est projective à la courbe gauche du troisième ordre qui lui correspond, il s'ensuit que :

*Un faisceau de courbes du premier système de $F^3$ rapporte projectivement entre elles toutes les autres courbes gauches de ce système.*

Nous dirons que quatre courbes du faisceau sont *quatre courbes gauches harmoniques* du premier système, quand elles sont coupées en quatre points harmoniques par une courbe quelconque et conséquemment par toutes les courbes $l^3$ du système qui n'appartient pas au faisceau. Chacune de ces courbes $l^3$ se présente donc comme une section du faisceau de courbes et se trouve rapportée projectivement à ce faisceau. De la même manière, le faisceau de courbes est rapporté projectivement au faisceau de rayons qui lui correspond dans $\Sigma$, parce que quatre courbes harmoniques du premier faisceau ont pour correspondantes quatre droites harmoniques du second. D'une manière générale, nous pouvons, en vertu de la définition générale de la projectivité, rapporter projectivement ces faisceaux de courbes entre eux et à des formes élémentaires quelconques.

La surface du troisième ordre est coupée par un plan quelconque suivant une courbe du troisième ordre; et toute courbe gauche du premier système a en commun avec le plan, et par suite avec la courbe d'intersection, un point au moins et trois au plus; donc :

*A toute courbe plane du troisième ordre de la surface $F^3$ correspond dans $\Sigma$ une courbe du troisième ordre, qui a en commun avec une droite quelconque un point au moins et trois points au plus.*

Nous pouvons rapporter projectivement la surface $F^3$ à $\Sigma$ de la manière qu'on a indiquée, en prenant sur $F^3$ quatre points quelconques, dont trois ne sont pas contenus sur une courbe du premier système, et en leur faisant correspondre les sommets d'un quadrangle arbitrairement choisi dans $\Sigma$. En effet, $\Sigma$ se trouve ainsi rapporté réciproquement aux gerbes collinéaires S, $S_1$ et $S_2$ et par suite aussi est rapporté projectivement à $F^3$.

Comme nous l'avons déjà annoncé, la surface du troisième ordre possède encore un *second système de courbes gauches du troisième ordre*. Nous rattachons tout d'abord à ce système les trois courbes gauches dont les systèmes de cordes sont engendrés par les gerbes collinéaires prises deux à deux. Nous désignerons par $k_1^3$ et $k_2^3$ les deux courbes gauches du troisième ordre, passant par le point S, que la gerbe S engendre respectivement avec les gerbes $S_1$ et $S_2$. La courbe $k_1^3$ déter-

mine complètement la collinéation des gerbes S et $S_1$, puisque toute corde de $k_1^3$ est projetée par deux plans homologues de S et $S_1$. D'autre part, le système de cordes de $k_1^3$ est rapporté projectivement à la gerbe $S_2$ par le moyen des gerbes S et $S_1$, de telle sorte que toute corde de $k_1^3$ correspond à un plan de $S_2$ et est coupée par lui en un point de la surface $F^3$. La surface $F^3$ est donc engendrée aussi par le système de cordes d'une courbe gauche $k_1^3$ du troisième ordre et par la gerbe $S_2$ qui lui est projective. Mais comme le système de cordes est projeté de tout point de sa courbe double $k_1^3$ suivant une gerbe collinéaire à S et $S_1$, et conséquemment aussi à $S_2$, nous pouvons remplacer le centre de la gerbe S par un autre point quelconque de $k_1^3$. La courbe cubique gauche $k_2^3$ engendrée par les gerbes S et $S_2$, change alors de position sur la surface $F^3$. Je dis que :

*Lorsque le point S parcourt la courbe gauche $k_1^3$, la courbe $k_2^3$, engendrée par les gerbes S et $S_2$, décrit le deuxième système de courbes de la surface entière du troisième ordre et passe une fois par chaque point P de cette surface.*

Nous devons d'abord prouver que pour une position déterminée du point S, la courbe $k_2^3$ passe par le point P. En P se coupent trois plans homologues $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ des gerbes collinéaires S, $S_1$, $S_2$; au rayon $\overline{S_2P}$ ou $b_2$ de $S_2$ correspond d'après cela dans $S_1$ un rayon $b_1$ qui est contenu dans un même plan $\alpha_1$ avec la corde $\overline{\alpha\alpha_1}$ de la courbe gauche $k_1^3$, corde qui passe par P. Au faisceau de plans $b_2$ de $S_2$ correspond de plus dans le système de cordes de $k_1^3$ un système réglé ou une surface conique du second ordre, dont tous les rayons sont coupés par $b_1$ et à laquelle $\overline{\alpha\alpha_1}$ appartient. Soit $b$ la directrice de ce système réglé ou le rayon de la surface conique du second ordre qui passe par le point P. Ce rayon coupe (II, pages 101-102) la courbe gauche $k_1^3$ en un point qui, dans le cas de la surface conique du second ordre, est différent du sommet de cette surface. Choisissons ce point d'intersection de $b$ et $k_1^3$ pour centre de la gerbe S, cette gerbe engendrera avec $S_2$ la courbe cubique gauche $k_2^3$ qui passe par P. En effet, au faisceau de plans $b_2$ de $S_2$ correspond dans la gerbe S le faisceau de plans suivant lequel le système réglé ou la surface conique du second ordre est projetée de S, ou (ce qui est la même chose) de la droite $b$; les droites $b_2$ et $b$ se correspondent donc de telle sorte que leur point P d'intersection est réellement situé sur $k_2^3$.

Nous pouvons remplacer le centre de la gerbe $S_2$ par un autre point quelconque de la courbe $k_2^3$, par exemple par P; nous pouvons donc

aussi prendre pour ce sommet un point complètement arbitraire de la surface du troisième ordre. En d'autres termes :

*Un point quelconque de la surface du troisième ordre peut être pris comme centre de l'une des trois gerbes collinéaires qui engendrent la surface.*

Il résulte immédiatement de là que les trois centres primitivement choisis ne sont pas des points remarquables de la surface et que les théorèmes que l'on a démontrés à leur endroit s'appliquent aussi à tout autre point de la surface. Par exemple, comme les centres des gerbes S et $S_1$ sont réunis par une courbe cubique gauche $k_1^3$, qui appartient au second système de courbes de la surface, on voit que :

*Deux points quelconques de la surface $F^3$ du troisième ordre peuvent être réunis par une courbe gauche du second système.*

La courbe gauche $k_1^3$ engendrée par S et $S_1$ peut être considérée comme une courbe entièrement arbitraire du second système. De cette remarque on peut déduire que :

*Toute courbe gauche $l^3$ du premier système est située avec chacune des courbes $k_1^3$ du second système sur une surface réglée ou conique du second ordre; dans le cas d'une surface réglée, l'un des systèmes réglés se compose de cordes de l'une de ces courbes gauches du troisième ordre et l'autre système est formé de cordes de l'autre courbe.*

En effet, la courbe gauche $l^3$ est engendrée par trois faisceaux correspondants de plans $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ des gerbes S, $S_1$, $S_2$ ; elle est donc située avec $k_1^3$ sur la surface du second ordre qui contient toutes les cordes de $k_1^3$ engendrées par les deux faisceaux de plans $\alpha$ et $\alpha_1$. Cette même surface du second ordre contient aussi les axes des deux faisceaux de plans, et ces axes sont des cordes de $l^3$ (II, pages 103-104).

*Réciproquement, toute surface réglée du second ordre que l'on peut mener par une courbe gauche $c^3$ de l'un des systèmes, est coupée en outre par la surface du troisième ordre suivant une courbe gauche $c_1^3$ de l'autre système.*

En effet, comme une droite quelconque de la surface du second ordre a au plus deux points communs avec la courbe gauche $c^3$ tandis qu'en général elle en a trois avec la surface $F^3$ du troisième ordre, il existe encore en dehors de la courbe $c^3$ des points situés à la fois sur $F^3$ et sur la surface du second ordre. Soient P et Q deux quelconques d'entre eux et $c_1^3$ la courbe gauche du troisième ordre passant par P et Q qui appartient à l'un des deux systèmes de courbes, mais pas au même système

que $c^3$. On peut alors mener par $c^3$ et $c_1^3$ une surface réglée du second ordre qui a en commun avec la précédente la courbe gauche $c^3$ et les deux cordes de $c^3$ passant par P et Q, et qui par conséquent doit coïncider avec elle.

Par chaque point S de la surface du troisième ordre passe un faisceau de courbes gauches du second système et les courbes $k_1^3$ et $k_2^3$ qui établissent la collinéation des gerbes, S, $S_1$ et $S_2$ peuvent être considérées comme deux courbes entièrement arbitraires de ce faisceau. Chaque plan de S projette une corde de $k_1^3$ et de $k_2^3$ qui lui correspond ; et ces deux cordes, qui se coupent en un point de la surface $F^3$, lui sont communes avec les deux plans qui lui correspondent dans $S_1$ et $S_2$. On déduit de là la *construction suivante très simple de la surface du troisième ordre*, au moyen des courbes gauches $k_1^3$ et $k_2^3$ du second système :

*Par le point S, commun aux courbes $k_1^3$ et $k_2^3$, nous menons des plans et, dans chacun d'eux, nous déterminons les deux cordes de $k_1^3$ et de $k_2^3$ qui ne passent pas par S ; ces deux cordes se coupent en un point de la surface du troisième ordre.*

Par exemple, si nous donnons au plan passant par S une position telle qu'il soit coupé par $k_1^3$ et $k_2^3$ en deux points différents de S, les deux cordes ne sont autres que les droites qui réunissent ces couples de points ; elles sont donc faciles à construire. C'est seulement quand un plan est tangent au point S à la courbe $k_1^3$ ou $k_2^3$ que la corde correspondante passe par le point S.

Cette construction peut nous donner un point quelconque P de la surface du troisième ordre. Comme $k_1^3$ et $k_2^3$ sont des courbes gauches entièrement arbitraires du second système, qui passent par S, il s'ensuit que :

*Si l'on considère toutes les courbes gauches du troisième ordre qui appartiennent au deuxième système de courbes et qui passent par un point arbitraire S, et si d'un autre point quelconque P de la surface du troisième ordre on leur mène des cordes, toutes ces cordes sont situées dans un même plan α passant par $\overline{SP}$.*

Ce plan α est coupé au point P par les plans $\alpha_1$ et $\alpha_2$ qui lui correspondent dans les gerbes $S_1$ et $S_2$ ; et toute courbe gauche du premier système passant P est engendrée par trois faisceaux de plans de S, $S_1$, $S_2$, dont les axes sont respectivement contenus dans α, $\alpha_1$ et $\alpha_2$. Mais ces axes sont aussi en même temps des cordes de cette courbe gauche passant par P ; on a donc ce théorème :

*Si l'on considère toutes les courbes gauches du troisième ordre qui appartiennent au premier système de courbes et qui passent par le point arbitraire P; et si du point S de la surface du troisième ordre on leur mène des cordes, toutes ces cordes sont contenues dans le même plan α, passant par $\overline{SP}$, que celui dont il a été question dans le théorème précédent.*

Comme le point S peut être choisi arbitrairement sur la surface du troisième ordre, ces deux derniers théorèmes expriment une propriété commune aux deux systèmes de courbes. En vertu du dernier théorème, nous pouvons tout aussi bien construire la surface du troisième ordre au moyen de deux courbes gauches $l_1^3$, $l_2^3$ du premier système qu'à l'aide des courbes $k_1^3$ et $k_2^3$ du second système. Cette construction permet d'établir immédiatement une collinéation entre trois gerbes P, $P_1$, $P_2$ de telle sorte que P engendre avec $P_1$ et $P_2$ les systèmes de cordes respectifs de $l_1^3$ et $l_2^3$, c'est-à-dire de deux courbes du *premier* système, et que trois faisceaux de plans qui se correspondent dans P, $P_1$ et $P_2$ engendrent une courbe gauche du *second* système. La surface du troisième ordre est bien encore engendrée par les gerbes collinéaires P, $P_1$, $P_2$, mais les deux systèmes de courbes ont échangé leurs rôles en ce qui regarde leur génération et leurs relations réciproques. Il suit de là que :

*Toutes les propriétés de l'un des systèmes de courbes gauches du troisième ordre conviennent également à l'autre système.*

Ainsi, par exemple, deux courbes quelconques du second système doivent avoir un point commun, parce que les courbes du premier système jouissent de cette propriété. Un faisceau de courbes du second système coupe projectivement toutes les autres courbes de ce système.

La surface du troisième ordre peut aussi être représentée sur un plan de telle sorte que toute courbe du second système ait pour correspondante une ligne droite et tout faisceau de courbes de ce système un faisceau de rayons qui lui est projectif; les courbes du premier système sont alors représentées par des courbes planes du cinquième ordre, parce qu'elles peuvent avoir au plus cinq points communs avec celles du second système. Les théorèmes que nous avons démontrés jusqu'ici pour les faisceaux de courbes du premier système s'appliquent aussi aux faisceaux de courbes du second.

*Si à toute courbe gauche du troisième ordre, appartenant à un faisceau P de courbes du premier système, on fait correspondre l'axe du*

*faisceau de plans de S, qui engendre la courbe avec les faisceaux correspondants de plans des gerbes $S_1$ et $S_2$, ou bien, en d'autres termes, la corde que l'on peut mener du point S à la courbe gauche, le faisceau S de rayons, que forment ces axes ou ces cordes, est rapporté projectivement au faisceau de courbes P.*

Soit, en effet, $l^3$ une courbe gauche quelconque du troisième ordre qui fait partie du premier système de courbes, mais qui n'appartient pas au faisceau de courbes P. Elle sera rapportée projectivement au faisceau de courbes si l'on fait correspondre chaque courbe du faisceau au point de $l^3$ par lequel elle passe (II, page 211). Mais, en même temps, le faisceau de plans de S, qui engendre la courbe gauche $l^3$ avec les faisceaux de plans correspondants de $S_1$ et $S_2$, est perspectif aussi bien à $l^3$ qu'au faisceau S de cordes dont il est question dans le théorème; $l^3$ est donc aussi projective à ce dernier. Le faisceau de courbes P et le faisceau de cordes S sont donc tous deux projectifs à la courbe gauche $l^3$ et par conséquent ils sont aussi projectifs entre eux.

Ce théorème subsiste encore dans le cas où le centre du faisceau de courbes coïncide avec le point S. Le faisceau de cordes est alors contenu dans le plan $\sigma$ de S qui réunit l'une à l'autre les tangentes aux courbes gauches $k_1^3$ et $k_2^3$ du second système qui passent par S. En effet, ce plan $\sigma$ est coupé au point S par les plans correspondants $\sigma_1$ et $\sigma_2$ des gerbes $S_1$ et $S_2$, parce que, par exemple, la tangente à $k_1^3$ au point S a pour élément correspondant le rayon $\overline{S_1S}$ de la gerbe $S_1$ et parce que le plan $\sigma_1$ doit passer par $\overline{S_1S}$. Soit maintenant $l_1^3$ une courbe quelconque du faisceau S de courbes appartenant au premier système et $a$ la corde qui lui correspond dans $\sigma$; un plan quelconque mené par $a$ a encore avec la courbe gauche $l_1^3$ un point commun extérieur à $a$, qui s'approche indéfiniment du point S, quand ce plan se rapproche indéfiniment du plan $\sigma$. Par conséquent $\sigma$ contient aussi la tangente à $l_1^3$ au point S; donc :

*Si en un point quelconque S d'une surface du troisième ordre on mène les tangentes à toutes les courbes gauches des deux systèmes qui passent par S, toutes ces tangentes sont contenues dans un seul et même plan $\sigma$, qu'on appelle le* plan tangent *au point S.*

Il faut encore remarquer que la courbe gauche $l_1^3$ est en général tangente à $\sigma$, qu'elle est en outre coupée par ce plan en un point L différent de S et que sa corde $a$ réunit entre eux les points S et L et par conséquent est une corde propre de $l_1^3$. La droite $a$ ne coïncide avec la

tangente de $l_1^3$ que si le plan $\sigma$ est osculateur à la courbe $l_1^3$ au point S.

Nous saisissons cette occasion pour faire mention de certains points remarquables qui peuvent, dans certains cas, se trouver sur la surface du troisième ordre et pour lesquels les théorèmes précédents ne sont plus applicables. En effet, il peut arriver que les courbes gauches $k_1^3$ et $k_2^3$ du troisième ordre, engendrées par la gerbe S et les gerbes collinéaires $S_1$ et $S_2$, aient encore, en outre du point S, des points communs (au nombre de quatre au plus), ou bien encore qu'elles soient tangentes en S. Trois rayons homologues des gerbes se coupent alors en chacun de ces points, et éventuellement aussi en S; il en résulte qu'un pareil point doit être situé sur chaque courbe cubique gauche du premier aussi bien que du second système de courbes. Les centres de *deux* des trois gerbes collinéaires S, $S_1$, $S_2$ peuvent être transportés en un pareil point double de la surface, en sorte que cette dernière peut être engendrée par trois gerbes collinéaires, dont deux sont concentriques. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces cas particuliers, mais nous admettrons que les courbes gauches $k_1^3$ et $k_2^3$, que l'on doit considérer comme deux courbes absolument quelconques du second système, n'ont qu'un seul point S commun et qu'elles s'y coupent. Deux courbes gauches quelconques du premier système n'ont donc aussi qu'un seul point commun et elles se coupent en ce point.

Si nous réunissons par une surface du second ordre chacune des courbes $l^3$ du premier système avec une courbe quelconque donnée $k^3$ du second système, nous obtenons une *gerbe de surfaces du second ordre* qui se coupent toutes suivant $k^3$. A toute courbe du premier système correspond une surface de la gerbe $k^3$, passant par elle; à tout faisceau P de courbes correspond au contraire un faisceau ponctuel de $F^2$, dont les différentes surfaces ont en commun la courbe gauche $k^3$ et une corde de $k^3$ passant par le point P. Supposons le centre de la gerbe S placé en dehors de la courbe gauche $k^3$; à tout rayon $a$ de S correspond alors une courbe déterminée $l^3$ du premier système, engendrée par le faisceau de plans $a$ et les faisceaux de plans homologues des gerbes $S_1$ et $S_2$, et $a$ est une corde de cette courbe gauche $l^3$.

Le rayon $a$ a, d'après cela, pour correspondants une surface $k^3l^3$ de la gerbe de surfaces $k^3$ et un plan déterminé $\alpha$, qui est le plan polaire du point S par rapport à cette surface. Le plan $\alpha$ passe par le point $S^1$ qui est conjugué au point S par rapport à la courbe gauche $k^3$; il est en

outre coupé par le rayon $a$ en un point qui est le conjugué de S par rapport à la courbe gauche $l^3$ (II, pages 119-120).

Si le rayon $a$ pivote autour du point S, la courbe $l^3$ change de position sur la surface du troisième ordre et la surface du second ordre $k^3l^3$ varie aussi dans la gerbe $k^3$; et en même temps, le plan polaire $\alpha$ de S doit pivoter autour du point $S^1$. Si $a$ décrit un faisceau ordinaire de rayons, $l^3$ décrit un faisceau de courbes qui lui est projectif; la surface $k^3l^3$ doit par conséquent décrire un faisceau ponctuel de $F^2$ et le plan $\alpha$ un faisceau de plans du premier ordre, projectif à ce faisceau de surfaces. Par suite, à tout rayon de S correspond un plan de la gerbe $S^1$ et à tout faisceau de rayons du premier ordre de S et à son plan correspondent dans $S^1$ un faisceau de plans du premier ordre et son axe. Il résulte de là que les gerbes S et $S^1$ sont rapportées réciproquement l'une à l'autre et conséquemment engendrent une surface du second ordre; donc :

*Si d'un point quelconque S de la surface du troisième ordre on mène une corde* a *à chaque courbe gauche* $l^3$ *du premier système, et si l'on détermine le point de* a *conjugué à S par rapport à la courbe* $l^3$, *tous les points ainsi trouvés constituent une surface du second ordre passant par S. Cette surface contient aussi tous les points* $S^1$ *conjugués à S par rapport aux courbes gauches* $k^3$ *du second système.*

Si un rayon quelconque de la gerbe S coupe la surface du troisième ordre en deux points A et $A_1$, différents de S, et s'il est par suite une corde de la courbe du premier système qui passe par A et $A_1$, le point de cette corde qui est conjugué à S est harmoniquement séparé de S par A et $A_1$. Faisons mouvoir le rayon $\overline{SAA_1}$ de manière que les deux points A et $A_1$ se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre et que $\overline{SAA_1}$ devienne une tangente à la surface du troisième ordre; le point conjugué à S doit aussi venir se réunir au point de contact, puisqu'il est harmoniquement séparé de S par A et $A_1$. On voit de même que le point conjugué à S vient se confondre avec lui, quand l'un des points A et $A_1$ coïncide avec S et quand, par conséquent, le rayon $\overline{SAA_1}$ se rapproche indéfiniment d'une tangente menée à la surface au point S. Donc :

*La surface du second ordre, dont il vient d'être question, contient tous les points qui sont harmoniquement séparés de S par deux autres points A, $A_1$ de la surface $F^3$ du troisième ordre, ainsi que les points de contact de toutes les tangentes que l'on peut mener de S à la sur-*

*face. Elle a de plus son plan tangent en S commun avec $F^3$ et peut être appelée la polaire du point S.*

Comme tout faisceau de courbes du premier système a pour correspondant dans S un faisceau de rayons qui lui est projectif, nous pouvons dire aussi que le premier système de courbes est *projectivement rapporté* au faisceau de rayons S. Mais la gerbe S est rapportée réciproquement à la gerbe $S^1$ et d'autre part à quatre plans harmoniques de $S^1$ il correspond toujours quatre surfaces harmoniques de la gerbe de surfaces $k^3$, en sorte que cette dernière est aussi projective à la gerbe $S^1$. Nous déduisons de là que :

*Si à chaque courbe du premier système on fait correspondre la surface de la gerbe* $k^3$ *qui passe par elle, le système de courbes est rapporté projectivement à la gerbe de surfaces* $k^3$; *et chaque faisceau de courbes du système a pour correspondant dans* $k^3$ *le faisceau ponctuel de* $F^2$ *qui lui est projectif.*

A l'aide de ce théorème, nous pouvons facilement trouver la position respective des points qui sont harmoniquement séparés par deux points de la surface $F^3$ d'un point donné P extérieur à cette surface ou, pour nous exprimer d'une manière plus générale, qui sont conjugués à P par rapport à chacune des courbes $l^3$ du premier système. Joignons $l^3$ par des surfaces du second ordre à trois courbes quelconques $k^3, k_1^3, k_2^3$ du second système, les trois plans polaires du point P par rapport à ces surfaces se coupent au point qui est le conjugué de P par rapport à $l^3$. Si maintenant $l^3$ décrit le premier système de courbes tout entier, les surfaces $k^3l^3$, $k_1^3l^3$, $k_2^3l^3$ décrivent les trois gerbes de surfaces $k^3$, $k_1^3$ et $k^3_2$ qui sont projectives au système de courbes et par suite projectives entre elles ; et les trois plans polaires du point P décrivent trois gerbes $P^1$, $P_1^1$, $P_2^1$ qui sont projectives aux gerbes de surfaces et au système de courbes, qui par suite sont collinéaires entre elles et dont les centres sont conjugués à P par rapport aux trois courbes gauches $k^3$, $k_1^3$, $k_2^3$. Ces gerbes collinéaires $P^1, P_1^1, P_2^1$ engendrent une surface du troisième ordre ; donc :

*Les différents points, qui sont harmoniquement séparés par deux points de la surface* $F^3$ *du troisième ordre d'un point* P *situé en dehors de* $F^3$, *sont contenus sur une deuxième surface du troisième ordre. Cette dernière passe aussi par les points de contact de toutes les tangentes que l'on peut mener de* P *à la surface* $F^3$ *et elle est également tangente à ces tangentes.*

Toute droite menée par P et ayant avec $F^3$ trois points $A$, $A_1$, $A_2$ communs est aussi coupée par la deuxième surface du troisième ordre en trois points $B$, $B_1$, $B_2$. Si maintenant le rayon $\overline{PA}$ pivote autour de P de manière à devenir une tangente à la surface $F^3$, et par conséquent de manière que deux des points $A$, $A_1$, $A_2$ se réunissent au point de contact, l'un des points $B$, $B_1$, $B_2$ vient coïncider avec eux, tandis qu'en même temps les deux autres se réunissent ; car chacun des points $B$, $B_1$, $B_2$ est harmoniquement séparé de P par deux des points $A$, $A_1$, $A_2$. La dernière partie de notre théorème se trouve ainsi démontrée.

---

# VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

## Courbes planes du troisième ordre.

L'étude des courbes planes situées sur la surface $F^3$ du troisième ordre nous conduit à d'autres propriétés importantes de cette surface. Un plan quelconque $\Sigma$ la coupe suivant une courbe $C_3$ du troisième ordre, c'est-à-dire qui a en commun avec toute droite de ce plan, non située sur $F^3$, trois points au plus et un point au moins. La surface $F^3$ est engendrée par trois gerbes collinéaires $S$, $S_1$, $S_2$ ; d'après cela la courbe $C_3$ se présente à nous comme la forme engendrée par trois systèmes collinéaires situés sur $\Sigma$, qui sont des sections de ces gerbes, et elle peut être définie, indépendamment de la surface du troisième ordre, ainsi qu'il suit :

*Trois systèmes collinéaires, contenus dans le même plan $\Sigma$, engendrent une courbe $C_3$ du troisième ordre, suivant les points de laquelle les rayons homologues des systèmes se coupent trois à trois. Par aucun point situé en dehors de $C_3$ il ne passe plus de deux rayons correspondants des systèmes.*

Projetons les trois systèmes collinéaires de trois points quelconques de l'espace par des gerbes, ces dernières engendrent une surface du troisième ordre passant par $C_3$. Cette surface dégénère en une surface conique du troisième ordre, quand les centres des trois gerbes coïncident.

La surface $F^3$ du troisième ordre, dont nous considérons la courbe plane $C_3$ comme une section, peut être représentée sur un système plan $\Sigma'$ au moyen des gerbes collinéaires $S$, $S_1$, $S_2$ ; comme nous l'avons

vu, nous n'avons qu'à rapporter réciproquement ces gerbes à $\Sigma'$. Comme représentation de $C_3$, nous aurons alors une courbe $C'_3$ qui est également du troisième ordre. Les systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma'$ sont rapportés réciproquement l'un à l'autre d'une triple manière par le moyen des gerbes $S$, $S_1$, $S_2$; et tout point $P'$ de $C'_3$ se distingue des autres points de $\Sigma'$ en ce que les trois rayons de $\Sigma$ qui lui correspondent ne forment pas un triangle, mais passent par un seul et même point $P$ de $C_3$. Réciproquement, au point $P$ de $C_3$ correspondent dans $\Sigma'$ trois rayons qui se coupent en un seul et même point de $C'_3$. Nous avons déjà vu précédemment (II, pages 210-214), et démontré d'une autre manière, que $C'_3$ a en commun avec toute droite de $\Sigma'$ trois points au plus et un point au moins.

*Toute section plane $C_3$ de la surface $F^3$ du troisième ordre est engendrée par trois faisceaux de plans du troisième ordre de $S$, $S_1$, $S_2$.*

Une propriété importante de la courbe $C_3$ découle des théorèmes précédemment démontrés (II, page 218). C'est la suivante :

*Soit $S$ un point quelconque de la courbe plane $C_3$ du troisième ordre, tous les points qui sont harmoniquement séparés de $S$ par deux autres points de la courbe sont situés sur une conique passant par $S$. Cette conique est tangente en $S$ à la courbe $C_3$ et contient les points de contact de toutes les tangentes que l'on peut mener du point $S$ à $C_3$. Dans des cas particuliers, cette conique dégénère en deux droites.*

Par exemple, la conique doit toujours se composer de deux droites, quand $C_3$ se décompose en trois droites $a$, $b$, $c$. On voit immédiatement que ce cas est possible, car on peut rapporter collinéairement entre eux trois systèmes plans de manière qu'ils aient un triangle $a\,b\,c$ correspondant commun. Si $C_3$ contient une courbe du second ordre $\varkappa$ et si $S$ est intérieur ou extérieur à $\varkappa$, la conique dont il est question dans le théorème se réduit également à deux droites, dont l'une est identique avec la polaire de $S$ par rapport à $\varkappa$. L'autre droite passe par $S$, et elle doit appartenir tout entière à la ligne $C_3$; car s'il en était autrement, il serait impossible que chacun de ses points fût harmoniquement séparé de $S$ par deux points de la ligne $C_3$. Il suit de là que:

*Si la courbe $C_3$ du troisième ordre contient une conique $\varkappa$, elle se décompose en cette conique et en une droite.*

Nous allons réunir les uns aux autres les centres des trois gerbes $S$, $S_1$, $S_2$ par une conique $\varkappa^2$ et démontrer que $\varkappa^2$ est contenue tout entière sur la surface $F^3$ ou qu'elle a encore au plus trois autres points com-

muns avec $F^3$. Projetons de S la conique $\varkappa^2$ par un faisceau de rayons et cherchons le faisceau de rayons qui lui correspond dans la gerbe $S_1$; ce dernier est également projectif à $\varkappa^2$ et engendre avec $\varkappa^2$ un faisceau de plans du premier ou du second ordre. Tout plan de ce faisceau a un point de $\varkappa^2$ commun avec le plan correspondant de S; à ce faisceau de plans correspond aussi dans $S_2$ un faisceau de plans projectif à $\varkappa^2$, dont tous les plans passent par les points correspondants de $\varkappa^2$ ou dont trois au plus jouissent de cette propriété (I, pages 155-156). Le théorème est donc démontré; et comme S, $S_1$, $S_2$ peuvent être considérés comme trois points absolument quelconques de la surface $F^3$, on voit que :

*La surface $F^3$ du troisième ordre et chacune de ses sections planes ont au plus six points communs avec une conique qui n'est pas entièrement située sur la surface.*

Si donc une courbe plane $C_3$ du troisième ordre a plus de six points communs avec une conique, elle se décompose en cette conique et en une droite. On voit de plus que :

*Une surface du second ordre a en général une courbe gauche du sixième ordre commune avec la surface du troisième ordre.*

En effet, un plan quelconque coupe la surface du second ordre suivant une conique qui, en général, a tout au plus six points (situés sur la courbe gauche) communs avec la surface du troisième ordre.

*Trois faisceaux de plans du second ordre projectifs, mais non concentriques, engendrent en général une courbe gauche $\gamma$ du sixième ordre, par laquelle on peut faire passer une surface du troisième ordre.*

En effet, les trois gerbes S, $S_1$, $S_2$ auxquelles appartiennent les faisceaux du second ordre sont rapportées collinéairement entre elles par le moyen de ces faisceaux et engendrent une surface $F^3$ du troisième ordre. Représentons $F^3$ sur un plan $\Sigma'$; aux faisceaux de plans du second ordre et à la courbe $\gamma$ qu'ils engendrent correspond dans $\Sigma'$ une conique $\gamma'$ et à toute courbe plane d'intersection $C_3$ de $F^3$ correspond dans $\Sigma'$ une courbe $C'_3$ du troisième ordre. Comme $\gamma'$ a au plus six points communs avec $C'_3$, $\gamma$ sera aussi coupé par la courbe $C_3$ et par son plan en six points au plus. Il n'y a d'exception que si $\gamma'$ fait partie de la courbe $C'_3$.

Si une conique a six points communs avec une courbe $C_3$ du troisième ordre et si elle change de forme et de position d'une manière continue, de telle sorte que deux de ces six points se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, ces deux points se réunissent finalement

pour former un point de contact commun en dehors duquel les deux courbes n'ont plus que quatre points communs l'une avec l'autre.

Mais les points de contact des tangentes que l'on peut mener à une courbe $C_3$ d'un point S de cette courbe sont situés sur une conique tangente à la courbe $C_3$ en S; donc :

*Par un point quelconque* S *de la courbe* $C_3$ *du troisième ordre, on ne peut, en outre de la tangente en* S, *mener au plus que quatre tangentes à* $C_3$.

Par le point S de la courbe $C_3$ passent une infinité de rayons qui coupent chacun la courbe en deux points différents de S. Chacun de ces couples de points peut être réuni par une courbe gauche du troisième ordre, qui appartient au premier système de courbes de la surface $F^3$ du troisième ordre; et il résulte des théorèmes précédents (II, pages 214-215) que toutes les courbes gauches ainsi déterminées se coupent en un même point P de $C_3$. Nous avons aussi démontré déjà que le faisceau de courbes P du premier système est rapporté projectivement au faisceau de rayons S, quand à chaque courbe de P on fait correspondre sa corde qui passe par S. Le faisceau de courbes P peut être réuni à une courbe gauche quelconque $k^3$ du second système par un faisceau ponctuel de $F^2$, dont les surfaces se coupent suivant $k^3$ et suivant la corde de $k^3$, qui passe par P. Ce faisceau de surfaces est lui-même projectif (II, page 219) au faisceau de courbes P et au faisceau de rayons S; et les points qui sont communs à un rayon quelconque de S, à la courbe correspondante du faisceau P et à la surface correspondante du second ordre sont situés sous la courbe $C_3$. Le faisceau de surfaces est coupé par le plan du faisceau de rayons S suivant un faisceau de coniques qui lui est projectif, et dont les coniques passent par le point P et par les points communs au plan et à la courbe gauche $k^3$. Or, comme $k^3$ peut être choisie arbitrairement dans le second système de courbes, il s'ensuit que :

*La courbe plane* $C_3$ *du troisième ordre peut être engendrée d'une infinité de manières au moyen d'un faisceau de rayons* S *et d'un faisceau de coniques qui lui est projectif, de telle sorte que les points d'intersection d'un rayon de* S *et de la conique correspondante soient situés sur* $C_3$.

Parmi les quatre points qui sont communs aux coniques, nous pouvons en choisir deux, O et Q, d'une manière absolument arbitraire sur $C_3$ puisque, par deux points quelconques de la surface $F^3$, on peut faire

passer une courbe $k_3$ du second système ; le troisième R se trouve également sur $k^3$. Le quatrième point P ne dépend qu'en apparence du choix du point S ; car nous allons montrer de suite que l'on peut attribuer à chacun des trois points O, Q, R le rôle que jouait le point P dans la recherche précédente et que, par suite, P peut être échangé avec un point quelconque de $C_3$. Au contraire, chacun des quatre points est déterminé par les trois autres et par le point S. En effet, si O, P, Q et S sont donnés, nous trouverons R, en joignant par une conique O, R et Q avec deux points quelconques de $C_3$ situés sur une même droite avec S et en cherchant le sixième point d'intersection de cette conique avec $C_3$.

On peut échanger le point P avec le point O ; cela résulte de la démonstration du théorème suivant :

*Par chaque courbe engendrée au moyen d'un faisceau de rayons S et d'un faisceau de coniques (OPQR) projectif à S, et conséquemment par le centre de S et les quatre points O, P, Q, R communs aux coniques, on peut faire passer une surface du troisième ordre ; ou autrement dit, la courbe est du troisième ordre.*

Nous joignons trois des quatre derniers points, par exemple P, Q et R par une courbe gauche $k^3$ du troisième ordre, nous prenons arbitrairement sur cette dernière les centres de deux gerbes $S_1$ et $S_2$ et nous rapportons ces gerbes collinéairement entre elles de telle manière qu'elles engendrent le système de cordes de $k^3$. Par O passe une corde de $k^3$ suivant laquelle se coupent deux plans homologues $\alpha_1$ et $\alpha_2$ des gerbes. Soient $s_1$ et $s_2$ deux rayons homologues des gerbes, respectivement contenus dans $\alpha_1$ et $\alpha_2$ ; ils coupent le plan $\overline{OPQR}$ en deux points qui appartiennent à une seule et même conique du faisceau (OPQR) ; en effet, les faisceaux projectifs de plans $s_1$ et $s_2$ engendrent une surface du second ordre passant par $k^3$ et par le point O et sur laquelle sont aussi situés les rayons $s_1$ et $s_2$. Les deux faisceaux de rayons de $s_1$ et $s_2$, situés dans $\alpha_1$ et $\alpha_2$ et qui se correspondent, seront donc coupés par le plan $\overline{OPQR}$ suivant deux ponctuelles perspectives au faisceau de coniques (OPQR) (II, page 178) ; elles sont donc aussi projectives au faisceau de rayons S. Rapportons maintenant la gerbe S collinéairement à $S_1$ et $S_2$, de manière que ces trois faisceaux projectifs de rayons se correspondent, les trois gerbes engendrent une surface du troisième ordre, dont la courbe plane donnée est une section. La collinéation en question peut être établie d'une infinité de manières (II, page 7).

Le rôle du point P peut donc aussi être attribué effectivement à tout autre point quelconque O de la courbe $C_3$ du troisième ordre; il en résulte alors d'une manière générale que :

*Si l'on prend arbitrairement quatre points S, P, Q, R sur une courbe plane $C_3$ du troisième ordre, et si l'on réunit par une conique les points P, Q et R à deux autres points de $C_3$ situés sur une même droite avec S, toutes ces coniques constituent un faisceau de coniques projectif au faisceau de rayons S, et le quatrième point O commun aux coniques est aussi situé sur $C_3$.*

On voit immédiatement que la réciproque suivante de ce théorème est exacte :

*Si par quatre points quelconques O, P, Q, R d'une courbe plane $C_3$ du troisième ordre on fait passer des coniques qui aient encore chacune deux autres points communs avec $C_3$, les droites qui réunissent ces couples de points se coupent en un seul et même point S de $C_3$. Le faisceau (O P Q R) de coniques est rapporté projectivement au faisceau de rayons S, quand on fait correspondre à chaque conique le rayon de S obtenu de cette manière.*

Pour que le théorème ait un sens, il faut que, parmi les quatre points O, P, Q, R, il n'y en ait pas trois sur une même droite. Au contraire, deux quelconques d'entre eux peuvent se rapprocher indéfiniment l'un de l'autre, en sorte que le théorème subsiste encore quand les coniques coupent $C_3$ en deux points et lui sont tangentes en un troisième, ou bien quand elles sont tangentes entre elles et à la courbe $C_3$ en deux points différents, etc.

Le point S a reçu le nom de *point opposé* au quadrilatère OPQR.

Le dernier théorème constitue une des propriétés fondamentales des courbes planes du troisième ordre; et nous pouvons en déduire un grand nombre d'autres propositions, et tout d'abord la suivante :

*Par huit points arbitraires O, P, Q, R, A, B, C, D du plan on peut faire passer une infinité de courbes du troisième ordre; par un neuvième point arbitraire E, il ne passe qu'une seule de ces courbes; c'est seulement quand E a une position particulière, complètement déterminée par les huit premiers points, que toutes ces courbes du troisième ordre passent par ce dernier point.*

Parmi les points donnés nous en choisissons quatre quelconques, O, P, Q, R, dont trois ne soient pas en ligne droite; nous faisons passer par eux un faisceau de coniques et nous désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ les cinq

coniques de ce faisceau (OPQR) qui passent respectivement par A, B, C, D, E. Nous pouvons rapporter le faisceau de rayons D à (OPQR) de telle sorte que les rayons $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ correspondent respectivement aux coniques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; ceci fait, nous pouvons construire aussi les rayons $\overline{DD_1}$ et $\overline{DE_1}$ du faisceau D qui correspondent aux coniques $\delta$ et $\varepsilon$. A présent, nous imaginons qu'on ait tracé par A, B, C et D une conique $\varkappa$ tangente en D au rayon $\overline{DD_1}$; elle est coupée par le rayon $\overline{DE_1}$ en un point $E_1$ et est rapportée par le faisceau D projectivement au faisceau de coniques (OPQR), de telle sorte que les coniques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ correspondent respectivement aux points A, B, C, D, $E_1$ de $\varkappa$. Tout faisceau de rayons S, perspectif à la conique $\varkappa$, engendre avec le faisceau de coniques (OPQR) une courbe du troisième ordre qui passe par les huit points O, P, Q, R, A, B, C, D. Si maintenant nous déterminons sur $\varkappa$ le centre du faisceau de rayons S, de manière que le point $E_1$ en soit projeté par le rayon $\overline{SE}$, la courbe du troisième ordre passe aussi par le neuvième point E. Pour une position quelconque du point S, la courbe du troisième ordre a en commun avec la conique les cinq points S, A, B, C, D et conséquemment elle en a encore au plus un sixième T. Ce point T de $\varkappa$ est situé de même que A, B, C et D sur la conique du faisceau (OPQR) qui lui correspond et, par conséquent se trouve contenu sur chacune des courbes du troisième ordre qui passent par O, P, Q, R, A, B, C, D; c'est seulement quand E coïncide avec T que toutes ces courbes passent par E.

Il est à remarquer que nous n'avons nullement besoin de tracer la conique $\varkappa$, mais que nous pouvons trouver les points $E_1$ et S par des constructions linéaires, par exemple, au moyen du théorème de Pascal. Nous pouvons de même construire le deuxième point $A_1$ où le rayon $\overline{SA}$ coupe la conique $\alpha$; et comme $A_1$ appartient aussi à la courbe du troisième ordre cherchée, nous aurons résolu ainsi le problème suivant :

*Une courbe plane $C_3$ du troisième ordre étant donnée par neuf points, construire son dixième point $A_1$, qui est sur une même conique $\alpha$ avec cinq quelconques des points donnés.*

Le faisceau de coniques (OPQR) contient aussi les trois couples de côtés opposés du quadrangle OPQR. Cherchons le rayon du faisceau S qui correspond à l'un d'eux, par exemple à $\overline{OP}$, $\overline{QR}$, nous résoudrons ainsi ce problème :

*Une droite $\overline{OP}$ réunit deux des neuf points donnés; construire*

*son troisième point d'intersection avec la courbe $C_3$ du troisième ordre.*

Soit $l$ un rayon quelconque du faisceau S et $\lambda$ la conique qui lui correspond dans le faisceau (OPQR). Lorsque $l$ se rapproche indéfiniment du rayon $\overline{SO}$, l'un des deux points d'intersection de $l$ et de $\lambda$ s'approche indéfiniment du point O et la droite qui réunit O à ce point d'intersection devient la tangente à la courbe $C_3$ au point O ; en même temps, la conique $\lambda$ change de forme de telle manière qu'elle est également tangente à cette droite au point O. Si donc nous déterminons la tangente au point O à la conique qui correspond au rayon $\overline{SO}$, nous résolvons par là même ce problème :

*Mener une tangente à la courbe $C_3$ du troisième ordre, en l'un des neuf points donnés, en O par exemple.*

A l'aide de ces remarques, on peut aussi traiter facilement les problèmes suivants : *Construire une courbe du troisième ordre dont on donne huit points et une tangente, ou bien sept, six, cinq points et les tangentes respectives en deux, trois ou quatre d'entre eux.* Nous ne nous arrêterons pas à en donner la solution.

On a démontré qu'en général huit points du plan peuvent être réunis à un neuvième par une courbe du troisième ordre ; de cette démonstration il résulte que :

*Deux courbes planes du troisième ordre ont au plus neuf points communs O, P, Q, R, A, B, C, D, T; ces points peuvent être réunis à un dixième point E quelconque du plan par une courbe du troisième ordre.*

*Si par quatre des neuf points, par exemple, par O, P, Q, R, nous faisons passer un faisceau de coniques et par les cinq autres une conique $\varkappa$, cette dernière peut être rapportée projectivement au faisceau de telle manière qu'aux cinq points A, B, C, D, T de $\varkappa$ correspondent respectivement les coniques du faisceau (OPQR) qui passent par eux. La conique $\varkappa$ contient aussi le point S opposé au quadrilatère OPQR par rapport à toutes les courbes du troisième ordre passant par les neuf points.*

Il peut arriver que six des neuf points soient situés sur une conique. Soit K un septième point quelconque de cette conique, on peut aussi réunir K aux neuf points par une courbe du troisième ordre ; et comme cette dernière a sept points communs avec la conique, elle se décompose en cette conique et en une droite. Donc :

*Si, parmi les neuf points d'intersection de deux courbes du troi-*

*sième ordre six sont situés sur une conique, les trois autres sont sur une même ligne droite.*

Ce théorème et sa démonstration subsistent encore quand la conique dégénère en deux droites. Nous en déduisons que :

*Si une courbe $C_3$ du troisième ordre est coupée par trois droites* a, b, c *en groupes de trois points tels que six de ces neuf points soient situés sur une courbe du second ordre ou encore sur deux nouvelles droites* k *et* l, *les trois autres points d'intersection sont sur une même droite* m.

Car les trois droites $a, b, c$ constituent une seconde ligne du troisième ordre et, par les neuf points d'intersection, on peut faire passer une infinité de courbes du troisième ordre. Les six points communs à une courbe $C_3$ du troisième ordre et à une conique quelconque peuvent être réunis deux à deux par 15 droites qui coupent $C_3$ en 15 points P ; ces quinze points P sont trois à trois sur 15 droites $g$ et ces 15 droites $g$ se coupent trois à trois en ces 15 points P.

Dans le théorème précédent, nous pouvons prendre arbitrairement les droites $k$ et $l$ et, par leurs six points d'intersection avec $C_3$, faire passer les trois droites $a, b, c$. Si $k$ et $l$ se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, $a$, $b$, $c$ deviennent trois tangentes de la courbe du troisième ordre et l'on voit que :

*Si l'on mène des tangentes à la courbe $C_3$ du troisième ordre aux trois points qui lui sont communs avec une droite* k, *ces tangentes coupent la courbe en trois nouveaux points, qui sont situés sur une deuxième droite* m.

Nous avons déjà vu que la courbe plane $C_3$ du troisième ordre peut se décomposer en une droite et une conique, mais nous n'avons pas encore démontré qu'il *doit* toujours en être ainsi quand la courbe $C_3$ contient une droite $g$. Par le fait, cette décomposition n'est pas toujours nécessairement celle qu'on indique, car on peut se représenter le cas où la courbe du troisième ordre se réduit tout entière à la droite $g$, ou bien où elle n'a qu'un seul point en dehors de $g$. Mais si $C_3$, outre $g$, se compose d'autres points, trois d'entre eux ne sont pas en général situés sur une même droite $l$; car s'il en était ainsi, $l$ aurait encore avec $C_3$ le point $lg$ commun ; elle aurait alors quatre points communs avec $C_3$, appartiendrait par suite dans son entier à la courbe $C^3$, et cette courbe $C_3$ devrait se décomposer en trois droites, dont la troisième pourrait se confondre avec $l$ ou $g$. Nous pouvons d'après cela réunir

cinq points quelconques extérieurs à $g$ par une courbe $\varkappa^2$ du second ordre qui constitue aussi avec $g$ une courbe du troisième ordre. Ces cinq points, joints aux trois points de la droite $g$, constituent un système de huit points qui, avec un neuvième point quelconque du plan, déterminent en général une seule courbe du troisième ordre. Si maintenant nous choisissons aussi le neuvième point sur la droite $g$, cette courbe du troisième ordre se confond évidemment avec $C_3$ et en même temps aussi avec la courbe du troisième ordre qui se compose de $g$ et de la conique $\varkappa^2$. Donc :

*Si une courbe $C_3$ du troisième ordre renferme une droite* g, *elle se décompose généralement en cette droite et une conique ; dans des cas particuliers, elle peut se composer de* g *et de deux autres droites, quand elle ne se réduit pas à* g *et à un point isolé, ou même à* g *toute seule.*

On peut facilement conclure de là que, parmi les neuf points d'intersection de deux courbes du troisième ordre, six doivent être situés sur une conique ou sur deux droites, quand les trois autres sont sur une même ligne droite.

Le théorème suivant peut encore trouver place ici, en terminant :

*La courbe de base d'un faisceau de surfaces du second ordre est projetée de chacun de ses points suivant une surface conique du troisième ordre.*

Soient S et T deux points quelconques de la courbe de base ; nous pouvons rapporter la gerbe S réciproquement à la gerbe T d'une triple manière, de manière qu'elle engendre avec T trois surfaces quelconques du faisceau ponctuel de $F^2$. Le point S se présente alors comme centre de trois gerbes collinéaires, et ces dernières engendrent (II, page 221) une surface conique du troisième ordre dont les rayons projettent chacun un point de la courbe gauche du quatrième ordre. Nous en concluons que :

*Une surface conique du troisième ordre et une surface réglée du second ordre, qui ont deux rayons* a *et* b *communs, se coupent suivant une courbe gauche du quatrième ordre par laquelle on peut faire passer un faisceau de surfaces du second ordre.*

Pour le démontrer, joignons par une nouvelle surface du second ordre le point $ab$ avec sept points quelconques, extérieurs à $a$ et $b$ et appartenant à la courbe d'intersection de la surface réglée et de la surface conique du troisième ordre. Cette nouvelle surface sera coupée par

la surface réglée suivant une courbe gauche du quatrième ordre qui doit aussi être située sur la surface conique du troisième ordre ; car elle sera projetée au point *ab* suivant une surface conique du troisième ordre qui a en commun avec la surface conique donnée sept rayons, en outre de *a* et *b*, et qui par suite est identique avec elle. On démontre de même que :

*Une surface conique du troisième ordre et une surface conique du second ordre, non concentriques mais tangentes le long d'un rayon, se coupent suivant une courbe gauche du quatrième ordre par laquelle on peut faire passer un faisceau de surfaces du second ordre.*

Réunissons brièvement les résultats principaux acquis dans cette leçon et nous avons pour les surfaces du troisième ordre le théorème suivant :

*La surface du troisième ordre est coupée par un plan quelconque suivant une courbe* $C_3$ *du troisième ordre, déterminée par neuf points arbitrairement choisis sur elle. Cette courbe se décompose en une conique et une droite, quand elle a plus de trois points communs avec une droite ou plus de six points communs avec une conique ; elle peut aussi se réduire à trois droites ou à moins de trois droites. La courbe* $C_3$ *du troisième ordre a au plus neuf points communs avec une autre courbe quelconque du troisième ordre ; huit de ces points déterminent le neuvième ; d'après cela, deux surfaces du troisième ordre se coupent en général suivant une courbe gauche du neuvième ordre. Une surface du second ordre et une surface du troisième ordre se coupent en général suivant une courbe gauche du sixième ordre.*

---

# VINGT-SIXIÈME LEÇON.

## Les vingt-sept droites de la surface du troisième ordre et les coniques contenues sur la surface.

Étant donnée une surface du troisième ordre engendrée par trois gerbes collinéaires S, $S_1$, $S_2$, si nous la représentons sur un système plan $\Sigma$ en rapportant réciproquement $\Sigma$ à S, $S_1$, $S_2$, à tout point de $F^3$ correspond un point unique de $\Sigma$. Il peut au contraire exister dans $\Sigma$ certains *points principaux* auxquels correspondent plusieurs des points de $F^3$, par exemple, tous les points d'une droite. A un point quelconque de $\Sigma$ correspondent, en effet, les trois plans homologues de S, $S_1$, $S_2$, et leur point d'intersection situé sur $F^3$; mais si ces plans ont plus d'un point commun, et par conséquent ont une droite commune, le point correspondant de $\Sigma$ est un point principal. Nous donnerons à la droite qui correspond au point principal le nom de *rayon principal* de la surface $F^3$; elle est une corde commune aux trois courbes gauches du troisième ordre engendrées par les gerbes S, $S_1$, $S_2$ prises deux à deux. Comme ces courbes gauches peuvent être considérées comme trois courbes quelconques du second système de courbes de $F^3$, les points principaux de $\Sigma$ peuvent aussi être définis de la manière suivante :

*Les points principaux du plan $\Sigma$ ont pour éléments correspondants sur la surface $F^3$ du troisième ordre les cordes communes au deuxième système de courbes de $F^3$; nous donnons à chacune de ces cordes le nom de rayon principal de la surface du troisième ordre.*

Les points principaux de $\Sigma$ sont donc les points doubles des courbes du cinquième ordre qui correspondent aux courbes gauches du second système de $F^3$.

Un plan quelconque coupe la surface $F^3$ suivant une courbe plane $C_3$, qui a un point commun avec toute droite située sur $F^3$. Nous en concluons que :

*Les courbes du troisième ordre de $\Sigma$, qui correspondent aux sections planes de la surface $F^3$, passent par tous les points principaux de $\Sigma$.*

Par une droite quelconque $g$, qui a les trois points P, Q, R communs avec $F^3$, menons deux plans quelconques ; ils coupent la surface $F^3$ suivant deux courbes $C_3$ et $C_3^1$ qui passent par les points P, Q, R. En outre des trois points qui correspondent à ces trois derniers, les courbes qui représentent $C_3$ et $C_3^1$ ont encore au plus six points communs et chacun d'eux doit être un point principal de $\Sigma$, parce qu'il a pour correspondant un point de $C_3$ aussi bien qu'un point de $C_3^1$. Ces six points principaux ne sont pas contenus sur une même conique ; car sans cela, les trois autres points devraient être situés sur une même droite, ce qui est impossible, puisqu'une droite de $\Sigma$ a pour correspondante sur $F^3$ une courbe gauche du troisième ordre qui a au plus deux points communs avec la droite *arbitraire* $g$. Donc :

*Le plan $\Sigma$ renferme au plus six points principaux qui ne sont pas situés sur une seule et même conique ; et la surface $F^3$ renferme au plus six rayons principaux ou cordes communes du deuxième système de courbes. Étant données trois gerbes collinéaires quelconques de l'espace, il existe en général six droites au plus suivant lesquelles les plans homologues des gerbes se coupent trois à trois.*

Lorsque deux cordes d'une courbe gauche du troisième ordre sont situées dans un même plan, elles se coupent, comme on le sait, en un point de la courbe. Or, comme les courbes gauches du deuxième système ne doivent pas toutes passer par un seul et même point, il s'ensuit que :

*Deux rayons principaux de la surface $F^3$ ne sont jamais dans un même plan.*

Une droite quelconque $g$ de $\Sigma$ a pour correspondante sur la surface $F^3$ une courbe gauche $\gamma^3$ du premier système ; mais

*Si une droite* g *de $\Sigma$ contient un point principal* U, *la courbe gauche $\gamma^3$ du troisième ordre, qui lui correspond, se décompose dans le rayon principal* u, *correspondant à* U, *et en une conique, qui a un point commun avec* u.

A la ponctuelle $g$ correspondent dans les gerbes S, $S_1$, $S_2$ trois fais-

ceaux de plans, dont les axes coupent le rayon principal $u$ et le faisceau de plans de S engendre avec ceux de $S_1$ et de $S_2$ deux surfaces réglées du second ordre qui ont en commun l'axe du premier faisceau et le rayon principal $u$. Réunissons maintenant par un plan trois autres quelconques des points communs aux deux surfaces; ce plan coupe les deux surfaces du second ordre suivant deux coniques qui sont identiques, car, en outre des trois points précédents, elles ont encore en commun un point situé sur $u$ et un autre situé sur l'axe du premier faisceau de plans. Les points de cette conique correspondent projectivement à ceux de la droite $g$.

Le plan de la conique a encore une droite commune avec la surface; cette droite jointe à la conique constitue une courbe plane du troisième ordre. La courbe qui la représente doit se décomposer en la droite $g$ et en une conique; et cette dernière doit passer par tous les points principaux du plan $\Sigma$, différents de U. Donc :

*Une conique qui réunit cinq quelconques des points principaux de* $\Sigma$ *a pour correspondante sur la surface* $F^3$ *une droite qui rencontre les cinq rayons principaux correspondants; par cette droite passent les plans de toutes les coniques de* $F^3$ *qui correspondent aux rayons de* $\Sigma$ *menés par le sixième point principal.*

Si une forme rectiligne $g$ réunit entre eux deux points principaux U et V de $\Sigma$, elle a pour correspondants dans les gerbes S, $S_1$, $S_2$ trois faisceaux de plans dont les axes coupent les rayons principaux correspondants $u$ et $v$ de $F^3$. Le faisceau de plans de la gerbe S engendre avec ceux de $S_1$ et $S_2$ deux surfaces réglées qui ont en commun l'axe de ce faisceau et les rayons principaux $u$ et $v$. Soit maintenant P un point de la courbe d'intersection de ces surfaces réglées, qui soit extérieur aux trois droites précédentes; les surfaces passent encore par une quatrième droite qui contient le point P et qui coupe les droites $u$ et $v$; cette quatrième droite doit correspondre à la droite $g$; donc :

*Toute droite qui joint deux points principaux* U *et* V *de* $\Sigma$ *a pour correspondante sur* $F^3$ *une droite qui coupe les deux rayons principaux correspondants* u *et* v.

On voit en même temps que :

*Trois points principaux du plan* $\Sigma$ *ne sont jamais sur une même droite.*

En effet, si une forme rectiligne contenait trois points principaux, les faisceaux de plans qui lui correspondent dans S, $S_1$, $S_2$ seraient

perspectifs au système réglé auquel appartiennent les trois rayons principaux correspondants de $F^3$. La surface $F^3$ se décomposerait alors en une surface réglée et un plan. Il y a une exception à ce théorème, c'est quand $F^3$ possède un point double; mais ce cas a déjà été exclu précédemment (II, page 217).

Joignons la droite de $F^3$, qui correspond à la droite réunissant deux points principaux U et V, avec un point quelconque P de $F^3$ par un plan. Ce plan coupe la surface $F^3$ suivant une courbe du troisième ordre $C_3$, qui se compose de la droite en question et d'une conique passant par P. La courbe qui représente $C_3$ sur $\Sigma$ se décompose en la droite $\overline{UV}$ et en une conique qui contient le point correspondant à P et tous les autres points principaux différents de U et V. Comme P a été pris arbitrairement sur $F^3$, le point qui lui correspond peut être considéré comme un point absolument quelconque de $\Sigma$. Nous déduisons de là que :

*Les coniques, que l'on peut mener par quatre points principaux de $\Sigma$, ont aussi des coniques pour correspondantes sur $F^3$; les plans de ces dernières courbes se coupent suivant la droite qui correspond à la droite joignant les deux autres points principaux.*

Ce théorème éprouve naturellement une modification quand il y a moins de six points principaux.

Nous allons d'abord examiner le cas le plus particulièrement intéressant, celui où le plan $\Sigma$ contient six points principaux réels. On peut considérer ces points comme les sommets d'un hexagone complet, auquel on ne peut pas circonscrire de conique. De ce qui précède, il découle que :

*A chacun des six sommets et des quinze côtés de cet hexagone principal de $\Sigma$ correspond une droite de la surface; de même à chacune des six coniques que l'on peut mener par cinq de ses sommets correspond également une droite. La surface $F^3$ du troisième ordre renferme donc vingt-sept droites.*

*Quatre quelconques des droites situées sur la surface ne peuvent appartenir à un seul et même système réglé du second ordre;* car, si ce cas se produisait, chacune des directrices de ce système réglé aurait quatre points communs avec la surface $F^3$ et par conséquent serait située tout entière sur $F^3$, en sorte que cette surface se décomposerait en une surface réglée du second ordre et un plan.

On peut facilement se faire une idée de la situation réciproque des vingt-sept droites au moyen de l'hexagone complet. Nous désignerons

tout d'abord par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six points principaux du plan $\Sigma$, par $\mu, \nu$ deux quelconques d'entre eux et par $(\mu)$ la conique qui passe par les cinq points principaux différents de $\mu$. On peut alors représenter par $a_\mu$ le rayon principal de la surface $F^3$ qui correspond au point principal $\mu$, par $b_\mu$ la droite qui correspond à la conique $(\mu)$ ; enfin le côté $\overline{\mu\nu}$ de l'hexagone aura pour correspondante la droite $c_{\mu\nu}$ ou $c_{\nu\mu}$ de $F^3$. Les vingt-sept droites sont alors représentées comme il suit :

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} & & \\ c_{45} & c_{46} & & & \\ c_{56} & & & & \end{array}$$

En vertu des théorèmes précédents et de la représentation des vingt-sept droites sur le plan $\Sigma$, on reconnaît immédiatement que :

*La droite* $a_\mu$ *n'est coupée que par dix des vingt-six autres droites; ce sont toutes les droites* b, *à l'exception de* $b_\mu$, *et toutes les droites* c *qui ont l'indice* $\mu$. *De même,* $b_\mu$ *est rencontrée par dix des autres droites; ce sont toutes les droites* a, *à l'exception de* $a_\mu$, *et toutes les droites* c *qui ont l'indice* $\mu$. *La droite* $c_{\mu\nu}$ *est coupée par les droites* $a_\mu$, $a_\nu$, $b_\mu$, $b_\nu$ *et par les six droites* c *qui n'ont ni l'indice* $\mu$, *ni l'indice* $\nu$.

Par exemple, la droite $c_{12}$ est rencontrée par les droites $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_{34}$, $c_{35}$,..... etc., parce que sa ligne représentative $\overline{12}$ passe par les points 1, 2 et a en commun avec les représentations (1), (2), $\overline{34}$, $\overline{35}$,..... etc., de chacune des autres droites en question un point qui n'est pas un point principal.

*Chacune des* 27 *droites est donc rencontrée par dix des autres droites et forme avec elles cinq triangles; en sorte que les* 27 *droites se coupent en* 135 *points* $\delta$ *et forment* 45 *triangles* $\Delta$.

Par exemple, les dix droites, qui coupent $a_1$, forment avec elle les triangles :

$$a_1 b_2 c_{12}, \quad a_1 b_3 c_{13}, \quad a_1 b_4 c_{14}, \quad a_1 b_5 c_{15}, \quad a_1 b_6 c_{16}.$$

de même $b_1$ est la droite d'intersection des plans des cinq triangles :

$$b_1 a_2 c_{12}, \quad b_1 a_3 c_{13}, \quad b_1 a_4 c_{14}, \quad b_1 a_5 c_{15} \quad b_1 a_6 c_{16}.$$

et les dix droites, qui coupent $c_{12}$, forment avec elle les triangles :

$$c_{12}a_1b_2, \quad c_{12}a_2b_1, \quad c_{12}c_{34}c_{56}, \quad c_{12}c_{35}c_{46}, \quad c_{12}c_{36}c_{45}.$$

Les droites $a$ et $b$ ont une situation relative bien remarquable. Les droites $a$ sont coupées cinq à cinq par une des droites $b$ et par conséquent elles sont rencontrées quatre à quatre par deux des droites $b$; la surface réglée, qui contient trois droites $a$, a encore trois droites $b$ communes avec la surface $F^3$ du troisième ordre. Or, comme deux droites $a$ ne sont jamais dans un même plan, il s'ensuit que :

*Deux droites* b *ne sont jamais dans un même plan ; les droites* b *prises cinq à cinq, quatre à quatre, trois à trois, deux à deux, une à une sont respectivement coupées par une, deux, trois, quatre, cinq droites* a ; *les droites* b *ont donc par rapport aux droites* a *la même situation que ces dernières par rapport aux premières.*

Avec M. Schläfli nous donnerons à un groupe de deux fois six droites qui ont entre elles la situation relative des droites $a$ et $b$, le nom de *double sixain*. Un double sixain comme :

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

est donc caractérisé par cette propriété que l'une quelconque de ses douze droites ne rencontre que les cinq des onze droites restantes qui ne sont ni sur la même ligne horizontale, ni sur la même colonne verticale qu'elle. Nous distinguerons deux moitiés dans un double sixain ; dans celui qui précède, une des moitiés est constituée par les droites $a$ et l'autre par les droites $b$. Nous pouvons prouver facilement que les 27 droites de la surface du troisième ordre ne forment pas entre elles moins de 36 doubles sixains de ce genre ; mais auparavant démontrons le théorème suivant :

*La droites* $b_\mu$ *n'est rencontrée que par celles des droites* c *qui ont l'indice* $\mu$. *Deux droites* c, *ayant un indice commun* $\mu$, *ne peuvent pas être situées dans un même plan.*

Par exemple, si $b_1$ était coupé par $c_{23}$, les quatre rayons $c_{23}$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ appartiendraient à la surface réglée dont $b_1$, $b_2$, $b_3$ sont trois directrices ; ce qui est impossible. Et si, par exemple, $c_{12}$ et $c_{13}$ étaient dans un même plan, ce plan devrait contenir aussi les droites $c_{45}$, $c_{46}$, $c_{56}$, parce que ces dernières coupent $c_{12}$ et $c_{13}$ en des points différents ;

la surface $F^3$ du troisième ordre aurait donc cinq droites communes avec le plan, ce qui est également impossible.

Du double sixain donné plus haut, nous pouvons déduire, entre autres, les deux suivants :

$$\begin{matrix} c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_6 & b_6 \\ c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & a_1 & b_1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} c_{23} & c_{31} & c_{12} & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \end{matrix}.$$

Les droites $c_{12}$, $c_{13}$, $c_{14}$, $c_{15}$ du premier double sixain sont représentées sur le plan $\Sigma$ par quatre droites réunissant le point 1 à quatre autres points principaux 2, 3, 4, 5; et comme nous pouvons échanger chacun des points principaux avec un autre, ce premier double sixain nous en donne par analogie 15 en tout. Les droites $c_{12}$, $c_{23}$, $c_{31}$ du second double sixain correspondent aux côtés du triangle 123 de $\Sigma$; les six points principaux forment entre eux vingt triangles; le second tableau ci-dessus ne peut donc pas donner naissance à moins de vingt doubles sixains.

*Les 27 droites de la surface du troisième ordre forment donc en tout* $1 + 15 + 20 = 36$ *doubles sixains et chaque droite entre dans seize de ces doubles sixains.*

La considération de l'hexagone de $\Sigma$, qui, joint aux six coniques $(\mu)$, donne la représentation des 27 droites, nous fournit immédiatement la proposition suivante :

*Quatre quelconques des droites de la surface* $F^3$, *qui ne se coupent pas deux à deux, déterminent un double sixain et ces quatre droites appartiennent à l'une des moitiés de ce dernier.*

*La surface du troisième ordre ne peut pas contenir une vingt-huitième droite* g. Supposons, en effet, qu'une pareille droite existe, elle ne pourra jamais couper trois des rayons principaux $a$, parce que ceux-ci sont déjà rencontrés par trois des rayons $b$ et que quatre droites de la surface ne peuvent jamais appartenir à un seul et même système réglé. La droite $g$ sera de plus représentée dans le plan $\Sigma$ par une droite ou une conique; car les plans de la gerbe S, qui ont chacun en commun avec les plans homologues de $S_1$ un point de la droite $g$, forment (II, page 209) un faisceau de plans du premier ou du second ordre. Il résulte de là que la représentation de la conique de $F^3$, qui est dans un même plan avec $g$, doit être une conique ou une droite, et qu'elle passe par quatre au moins des points principaux de $\Sigma$. Cette

représentation ne peut être une droite, parce qu'une pareille droite contient au plus deux points principaux, elle ne peut être non plus une des six coniques ($\mu$), parce que ces dernières correspondent aux droites $b$; et si elle était une conique contenant seulement quatre points principaux, $g$ devrait être identique avec l'une des droites $c$, puisque sa représentation coïnciderait avec la droite joignant les deux derniers points principaux. L'hypothèse d'une vingt-huitième droite $g$ est donc inadmissible. Nous pouvons aussi énoncer ce résultat comme il suit :

*Le plan de toute conique située sur la surface du troisième ordre passe par l'une des 27 droites de cette surface.*

Nous représenterons un double sixain quelconque contenu sur la surface $F^3$ par

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 ; \end{matrix}$$

nous allons démontrer à présent que :

*Cinq rayons*, $d_1$ $d_2$, $d_3$, $d_4$, $d_5$, *qui appartiennent à une moitié d'un pareil double sixain, déterminent complètement les vingt-sept droites de la surface du troisième ordre et la surface elle-même.*

La droite $e_6$ coupe les cinq rayons donnés $d$ et les autres droites $e$ les rencontrent quatre à quatre. On peut donc construire facilement les droites $e$ (I, pages 179-180) et, par leur moyen, nous trouvons la droite $d_6$ qui coupe les cinq premières droites $e$. Les deux plans $\overline{d \; e_\nu}$ et $\overline{d \; e_\mu}$ se coupent de plus suivant l'une $f_{\mu\nu}$ des quinze autres droites de la surface $F^3$; car la droite d'intersection $f_{\mu\nu}$ a en commun avec la surface quatre points respectivement situés sur $d_\mu$, $d_\nu$, $e_\mu$, $e_\nu$ et par conséquent elle est contenue tout entière sur la surface. Du moment qu'on a trouvé les 27 droites de cette manière, on peut construire une section plane quelconque de la surface au moyen des points où le plan sécant rencontre ces 27 droites.

Pour construire un double sixain dans l'espace, nous pouvons prendre arbitrairement un rayon $e_6$ de l'une des moitiés et le couper par cinq rayons quelconques $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $d_5$ qui doivent appartenir à l'autre moitié. Il faut seulement que, parmi ces cinq rayons $d$, il n'y en ait pas deux dans un même plan ni quatre sur une même surface réglée.

Par quatre rayons $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ et trois points arbitraires S, $S_1$, $S_2$ de l'espace, on ne peut faire passer qu'une seule surface du troisième

ordre ; cette surface est engendrée par les trois gerbes S, $S_1$, $S_2$ qui sont rapportées collinéairement entre elles de telle sorte que leurs plans homologues se coupent trois à trois suivant $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$. En effet, si par $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, S, $S_1$ et $S_2$ il passait deux surfaces du troisième ordre, elles devraient contenir aussi les droites $e_5$ et $e_6$, parce que ces dernières ont avec les surfaces quatre points communs situés sur $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$. Ces surfaces seraient de plus coupées par le plan $\overline{SS_1S_2}$, suivant une seule et même courbe du troisième ordre ; car par les six points d'intersection situés sur $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $e_5$, $e_6$ et par les trois points S, $S_1$, $S_2$ donnés *arbitrairement*, on ne peut faire passer qu'une seule courbe $C_3$ du troisième ordre. Enfin un nouveau plan quelconque, ayant avec $C_3$ trois points A, B, C communs, devrait également couper les deux surfaces du troisième ordre suivant une seule et même courbe $C^1_3$ du troisième ordre réunissant les points A, B, C et les six points situés sur $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $e_5$, $e_6$. En effet, s'il passait plus d'une courbe du troisième ordre par ces neuf points, les six derniers points devraient être situés sur une même conique, puisque A, B, C sont contenus sur une seule et même droite ; or ceci est impossible, puisque $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ n'appartiennent pas à un seul et même système réglé. Les deux surfaces du troisième ordre auraient donc une infinité de sections planes communes, ce qui est impossible, à moins qu'elles ne se confondent.

Choisissons maintenant les trois points $S, S_1, S_2$ arbitrairement sur la surface $F^3$ du troisième ordre donnée primitivement ; la surface du troisième ordre menée par $d_1, d_2, d_3, d_4$ et S, $S_1$, $S_2$ coïncide avec $F^3$. Les quatre rayons $d_1, d_2, d_3, d_4$ deviennent des rayons principaux de la surface ; par suite, il en est aussi de même pour $d_5$ et $d_6$, parce que les six rayons principaux constituent une moitié d'un double sixain et parce qu'un double sixain est complètement déterminé par quatre rayons de l'une de ses moitiés. Il résulte de là que :

*La surface $F^3$ du troisième ordre peut être engendrée de 72 manières différentes par trois gerbes collinéaires $S, S_1, S_2$, dont les centres sont pris arbitrairement sur $F^3$. On peut en effet rapporter les gerbes entre elles de telle sorte que leurs plans homologues se coupent trois à trois suivant chacune des six droites* $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$, *qui constituent une moitié de l'un des 36 doubles sixains, et l'on obtient ainsi un des 72 modes de génération ; les rayons* d *jouent ici par conséquent le rôle de rayons principaux. Il existe, d'après cela, sur la*

*surface* 72 *systèmes de courbes gauches du troisième ordre, ou plutôt* 36 *couples de pareils systèmes de courbes : et en effet, les deux systèmes de courbes qui proviennent des deux moitiés d'un même double sixain ont les mêmes relations réciproques que le premier et le second système de courbes considérés précédemment.*

Parmi les 45 triangles $\Delta$, formés par les 27 droites de la surface $F^3$ du troisième ordre, nous en choisissons deux qui n'aient aucune des 27 droites communes ; leurs plans se coupent suivant une droite, et, comme celle-ci a au plus trois points communs avec la surface, les côtés des deux triangles se coupent deux à deux sur elle en trois points $\delta$. Les plans qui réunissent ces couples de côtés forment un trièdre $T_1$ (ou trièdre de Steiner) et coupent la surface suivant trois nouvelles droites qui, pour la même raison que ci-dessus, sont également situées dans un même plan et forment un nouveau triangle $\Delta$. Et le plan de ce dernier triangle forme avec les plans des deux triangles $\Delta$ choisis dans le principe un deuxième trièdre T qui est dit *conjugué* au premier $T_1$. *Chacun des deux trièdres conjugués est coupé par les plans de l'autre suivant trois triangles* $\Delta$. Par exemple, nous pouvons représenter trois couples de trièdres conjugués de ce genre par les groupes suivants qui contiennent neuf droites chacun :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $b_2$ | $c_{12}$ | | $a_4$ | $b_5$ | $c_{45}$ | | $c_{14}$ | $c_{25}$ | $c_{36}$ |
| $b_3$ | $c_{23}$ | $a_2$ | | $b_6$ | $c_{56}$ | $a_5$ | | $c_{35}$ | $c_{16}$ | $c_{24}$ |
| $c_{13}$ | $a_3$ | $b_1$ | | $c_{46}$ | $a_6$ | $b_4$ | | $c_{26}$ | $c_{34}$ | $c_{15}$ |

Les trois droites d'un même groupe, qui font partie d'une même ligne ou d'une même colonne, sont situées dans un même plan.

Les colonnes représentent ainsi les plans de l'un des trièdres T et les lignes ceux du trièdre conjugué $T_1$. Les trois groupes de trièdres conjugués ci-dessus renferment toutes les 27 droites de la surface du troisième ordre.

*Chaque triangle* $\Delta$ *fait partie de* 16 *trièdres différents, en sorte que son plan renferme les sommets des* 16 *trièdres.*

En effet, le triangle a l'un de ses côtés commun avec 12 des 44 autres triangles, puisque par chacune des 27 droites passent les plans de cinq triangles. Il reste donc 32 triangles dont chacun détermine un trièdre avec le triangle donné. Mais comme le troisième plan du trièdre passe par l'un de ces 32 triangles, le triangle donné ne figure plus

dans 32, mais seulement dans 16 trièdres différents. Il résulte de là que :

*Les plans des 45 triangles Δ forment en tout* $\frac{16 \times 45}{3} = 240$ *de ces trièdres ou* 120 *couples de trièdres conjugués* $T$ *et* $T_1$.

*Ces couples se rangent trois à trois en* 40 *groupes et chacun de ces groupes contient toutes les* 27 *droites de la surface.*

Nous avons démontré l'existence des 27 droites et tous les théorèmes précédents qui s'y rattachent en admettant que le plan Σ, sur lequel la surface du troisième ordre avait été représentée, ne contenait pas moins de six points principaux.

Nous allons maintenant nous passer de cette hypothèse et établir toutes les propriétés de la surface en supposant qu'elle renferme au moins une droite $g$.

Les plans du faisceau $g$ coupent en général la surface $F^3$ non seulement suivant $g$, mais encore suivant des coniques ; désignons deux quelconques de ces courbes par $\alpha^2$ et $\beta^2$. Choisissons ensuite sur $F^3$ quatre points quelconques O, P, Q, R extérieurs à $g$, $\alpha^2$, $\beta^2$ et qui ne soient pas tous situés sur un même plan ; nous pourrons les réunir à $\alpha^2$ par une seule surface du second ordre. Car on peut réunir O, P, Q, R à cinq points quelconques de $\alpha^2$ par une surface du second ordre (II, pages 168-169) qui contient alors tous les points de la conique $\alpha^2$. Cette surface sera coupée par celle qui joint les points O, P, Q, R et $\beta^2$ suivant une courbe gauche du quatrième ordre $k^4$, qui passe par O, P, Q et R. Soit maintenant N le point où la surface $F^3$ est coupée pour la troisième fois par la droite $\overline{OP}$ ; nous pouvons rapporter projectivement le faisceau de surfaces du second ordre qui se coupent suivant $k^4$ au faisceau de plans $g$, de telle manière qu'aux plans passant par $\alpha^2, \beta^2$, N correspondent les surfaces passant par $\alpha^2, \beta^2$, N. Les deux faisceaux engendrent une surface $F_1^3$, qui passe par $k^4$ et qui a en commun avec $F^3$ la droite $g$, les coniques $\alpha^2$ et $\beta^2$ ainsi que les points N, O, P, Q, R... Il est facile de démontrer que les deux surfaces $F^3$ et $F_1^3$ sont identiques.

Le mode de génération de la surface $F_1^3$ montre tout d'abord qu'un plan quelconque la coupe suivant une courbe du troisième ordre (II, page 223). Le plan $\overline{NOPQ}$ coupe les surfaces $F^3$ et $F_1^3$ suivant deux courbes du troisième ordre qui, en outre des points N, O, P, Q ont encore cinq autres points communs, ce sont deux points de $\alpha^2$, deux de $\beta^2$ et un

de $g$ (*). Comme O,P,Q ont été choisis d'une manière absolument arbitraire sur la surface $F^3$, ces deux courbes $C_3$ du troisième ordre doivent coïncider. De même le plan $\overline{NOPR}$ a en commun avec les surfaces $F^3$ et $F_1^3$ une seule et même courbe $C_3^1$ du troisième ordre. Enfin, si nous prenons arbitrairement un troisième plan, qui coupe $C_3$ et $C_3^1$ chacune en trois points et qui ait en commun avec chacune des coniques $\alpha^2$ et $\beta^2$ deux points communs, il rencontrera les deux surfaces $F^3$ et $F_1^3$ suivant une seule et même courbe du troisième ordre dont on connaît onze points. Il résulte de là que les deux surfaces $F^3$ et $F_1^3$ sont identiques, et l'on a en même temps ce théorème :

*Si par une conique quelconque $\alpha^2$ d'une surface $F^3$ du troisième ordre on mène une surface du second ordre, cette surface coupe encore $F^3$ suivant une courbe gauche* k⁴ *du quatrième ordre, par laquelle on peut faire passer un faisceau ponctuel de $F^2$. Les surfaces de ce faisceau coupent $F^3$ suivant* k⁴ *et suivant des coniques dont les plans passent par une même droite* g *de la surface $F^3$. Le faisceau ponctuel de $F^2$ est rapporté projectivement au faisceau de plans* g *par le moyen de ces coniques, de telle sorte qu'ils engendrent ensemble la surface du troisième ordre. Quatre points quelconques O,P,Q,R de la surface $F^3$, non situés dans le même plan, peuvent être réunis par autant de courbes gauches* k⁴ *du quatrième ordre qu'il y a de droites sur la surface $F^3$.*

Si, dans le faisceau ponctuel de $F^2$, il y a une surface quelconque qui n'ait aucun point commun avec le plan correspondant du faisceau $g$, la surface ne renferme de droites réelles que celles qui sont rencontrées par $g$. Cette remarque peut servir de point de départ pour une étude des surfaces du troisième ordre qui contiennent moins de 27 droites réelles.

Nous avons déjà étudié précédemment la génération de la surface $F^3$ du troisième ordre au moyen d'un faisceau ponctuel de $F^2$ et d'un faisceau de plans (II, pages 179-180) ; des théorèmes démontrés à cet endroit, nous déduisons que :

*Les coniques de $F^3$, dont les plans ont une droite* g *commune avec la surface, coupent cette droite suivant une ponctuelle involutive.*

Le plan d'une quelconque de ces coniques est tangent à la surface $F^3$ aux deux points, communs à la conique et la droite $g$, qui sont conju-

(*) On peut évidemment toujours choisir $\alpha^2$ et $\beta^2$ de manière qu'elles aient chacune deux points communs avec le plan $\overline{OPQ}$.

gués l'un à l'autre sur $g$. Si la conique se réduit à deux droites formant avec $g$ un triangle $\Delta$, son plan est triplement tangent ; la surface du troisième ordre possède donc au plus 45 plans triplement tangents.

Soient $g, g_1, g_2$ les côtés d'un triangle $\Delta$ situé sur $F^3$, et $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ trois coniques quelconques de $F^3$ dont les plans passent respectivement par $g, g_1, g_2$ et sont tellement choisis que les coniques prises deux à deux aient deux points communs. Joignons par une surface du second ordre $\alpha$ avec quatre points quelconques O, P, Q, R dont trois soient situés sur $\alpha_1$ et un sur $\alpha_2$ ; cette surface passe aussi par $\alpha_1$, parce qu'elle a cinq points communs avec $\alpha_1$ ; elle passe également par $\alpha_2$ pour la même raison. La courbe gauche $k^4$ du quatrième ordre, dont il a été question ci-dessus, se décompose alors, en raison de ce choix des quatre points O, P, Q, R, en les deux coniques $\alpha_1$ et $\alpha_2$, et toute conique $\beta$ de la surface $F^3$, qui est dans un même plan avec $g$, peut être réunie à $\alpha_1$ et $\alpha_2$ par une surface du second ordre. De même, toute conique $\beta_1$ de $F^3$ dont le plan passe par $g_1$, peut être réunie avec $\beta$ et $\alpha_2$ par une surface du second ordre ; autrement dit :

*Trois coniques quelconques de $F^3$, dont les plans passent respectivement par les côtés d'un triangle $\Delta$ situé sur $F^3$, peuvent toujours être réunies par une même surface du second ordre.*

La réciproque suivante de ce théorème se démontre facilement :

*Si une surface du second ordre a trois coniques communes avec une surface $F^3$ du troisième ordre, les plans de ces coniques passent toujours par les trois côtés d'un triangle $\Delta$ de $F^3$.*

Pour tout triangle $\Delta$ on peut construire un système entier de surfaces de second ordre de ce genre et ces surfaces coupent chacun des côtés du triangle suivant une ponctuelle involutive dans laquelle les deux sommets situés sur le côté sont conjugués l'un à l'autre. Or, une surface du second ordre sépare un seul des sommets du triangle des deux autres ou n'en sépare aucun ; il s'ensuit que :

*Il n'y a qu'un seul côté du triangle $\Delta$ par lequel passent deux plans ayant en commun avec $F^3$ une conique tangente à ce côté, ou bien chaque côté du triangle jouit de cette propriété.*

Une surface réglée du second ordre, qui a en commun avec $F^3$ deux droites $a, b$ ne se rencontrant pas, coupe en outre $F^3$ suivant une courbe gauche du quatrième ordre de *seconde espèce*. Elle se distingue de celles de *première espèce*, par lesquelles passent des faisceaux de surfaces du second ordre, en ce qu'il ne passe par elle qu'une seule surface

du second ordre, qu'elle n'a que trois points communs avec les rayons de l'un des systèmes réglés de cette surface, lequel passe par *a* et *b*, et qu'elle n'en a qu'un seul commun avec les rayons de l'autre système réglé. Quand deux faisceaux de plans du premier ordre sont rapportés projectivement à un faisceau de plans du second ordre, ils engendrent en général avec ce dernier une courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce.

En outre de la surface générale du troisième ordre à l'étude de laquelle nous nous sommes bornés ici, il y a encore des surfaces qui ont un, deux, trois ou quatre points doubles; il existe également une surface réglée du troisième ordre. Cette dernière surface $F^3$ est engendrée par trois gerbes collinéaires tellement placées que trois faisceaux homologues quelconques de ces gerbes sont perspectifs à une seule et même forme rectiligne *u*. Elle passe deux fois par la droite *u* et est encore coupée par tout plan du faisceau suivant une autre droite. Nous avons déjà parlé de cette surface dans l'appendice à la première partie de cet ouvrage.

---

# VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

## Gerbes de surfaces du second ordre.

Trois surfaces du second ordre, qui ne font pas partie d'un même faisceau de $F^2$, déterminent *une gerbe de $F^2$*, c'est-à-dire, une gerbe de surfaces du second ordre. Toute surface du second ordre, qui est située dans un même faisceau de $F^2$ avec deux des surfaces données, détermine avec la troisième un nouveau faisceau de $F^2$, dont nous considérons toutes les surfaces comme appartenant à la gerbe de $F^2$. Nous allons montrer que cette gerbe contient tout faisceau de $F^2$ qui réunit deux quelconques de ses surfaces, et qu'elle est complètement déterminée par trois quelconques de ses surfaces ne faisant pas partie d'un même faisceau de $F^2$.

Les plans polaires d'un point quelconque P par rapport aux surfaces d'un faisceau de $F^2$ se coupent suivant une même droite et cette dernière a un point P' commun avec le plan polaire de P par rapport à une autre surface du second ordre. Les points P et P' sont par conséquent conjugués par rapport à toute surface $F^2$ qui est située dans un nouveau faisceau de $F^2$ avec la dernière surface et une surface quelconque du faisceau de $F^2$. Donc :

*Un point P a pour conjugué par rapport à une gerbe de $F^2$ un point P' ; autrement dit, les plans polaires d'un point P par rapport à toutes les surfaces de la gerbe passent par un même point P'.*

On peut construire ce point conjugué à P, quand on connaît trois surfaces de la gerbe, non situées dans un même faisceau de $F^2$. Si les trois surfaces ont un point qui leur soit commun, il est conjugué à lui-même et situé sur toutes les surfaces de la gerbe. D'après cela, toutes les

surfaces du second ordre, qui passent par sept points donnés ou pour une cubique gauche, forment une gerbe de $F^2$. En général les surfaces d'une gerbe de $F^2$ ont au plus huit points communs et chacun d'eux est déterminé sans ambiguïté par les sept autres (II, page 166) ; on leur donne le nombre de *points doubles* ou *points de base* de la gerbe de $F^2$. Une cubique gauche est la *ligne double* d'une gerbe particulière de $F^2$.

*Les points d'une droite* u *ont en général pour conjugués par rapport à une gerbe de $F^2$ les points d'une cubique gauche ; les polaires de la droite par rapport aux surfaces de la gerbe sont des cordes de cette courbe gauche.*

En effet, si un point P décrit la droite $u$, ses plans polaires par rapport à trois surfaces quelconques de la gerbe décrivent trois faisceaux de plans projectifs à $u$ et leur point d'intersection P', conjugué à P, décrit une cubique gauche, qui ne se décompose en une conique et une droite que pour une position particulière de $u$. Les axes des trois faisceaux de plans (II, page 105) sont des cordes de la courbe gauche et ce sont en même temps les polaires de $u$ par rapport aux trois surfaces de la gerbe. Si P et Q sont deux points quelconques de $u$, leurs plans polaires par rapport à une surface quelconque de la gerbe se coupent suivant la polaire de $u$ et conséquemment suivant une corde de la courbe gauche ; ils réunissent cette corde aux deux points P' et Q' de la courbe gauche qui sont conjugués à P et à Q. Comme le système de cordes d'une cubique gauche est projeté de deux points quelconques de cette courbe suivant des gerbes collinéaires, on voit que :

*Les plans polaires de points quelconques P, Q, R..... par rapport aux surfaces individuelles de la gerbe de $F^2$ sont des plans homologues de gerbes collinéaires P', Q', R'......*

Si la collinéation de ces gerbes est établie, par exemple par le moyen de deux faisceaux de $F^2$ contenus dans la gerbe de $F^2$, nous pourrons construire linéairement les plans de Q', R',..... qui correspondent à chaque plan de P'. La surface de la gerbe de $F^2$, par rapport à laquelle un plan quelconque $\pi$, passant par P', est le plan polaire du point P, est donc complètement déterminée, puisque l'on peut construire le plan polaire de tout autre point Q par rapport à cette surface ; elle décrit un faisceau de $F^2$ quand le plan $\pi$ décrit un faisceau ordinaire de plans. On voit qu'en général

*La gerbe de $F^2$ est projective à la gerbe de rayons P' quand on fait correspondre à chacune de ses surfaces le plan polaire de P par rap-*

*port à cette surface; et effectivement à tout plan de P' correspond une surface de la gerbe de $F^2$ et à tout faisceau de plans du premier ordre de P' un faisceau de $F^2$ de la gerbe. La gerbe de $F^2$ renferme donc chaque faisceau $F^2$ qui réunit deux quelconques de ses surfaces.*

Comme deux faisceaux ordinaires de plans de P' ont toujours un plan commun, il s'ensuit de plus que :

*Deux faisceaux de $F^2$ contenus dans une gerbe de $F^2$ ont toujours une surface commune, c'est la surface double réelle ou imaginaire d'un système polaire réel de l'espace. Une gerbe de $F^2$ est déterminée par trois quelconques de ses surfaces, qui ne sont pas contenues dans un même faisceau de $F^2$.*

Les plans polaires du point P par rapport à toutes les surfaces d'une gerbe de $F^2$, qui passent par P, forment un faisceau de plans $\overline{PP'}$. Donc :

*Par un point arbitraire P, auquel est conjugué un autre point P', passent une infinité de surfaces de la gerbe de $F^2$; ces surfaces forment un faisceau de $F^2$ dont la courbe de base est tangente à $\overline{PP'}$ en P.*

Par un point Q non situé sur la courbe de base, il ne passe qu'une seule surface de ce faisceau de $F^2$; elle contient la droite $\overline{PP'}$ quand Q est situé sur $\overline{PP'}$. Donc :

*Deux points quelconques P, Q peuvent en général être réunis par une seule et unique surface de la gerbe de $F^2$. Par toute droite qui réunit deux points conjugués P, P', il passe une surface de la gerbe.*

Si, dans la gerbe de $F^2$, on réunit une surface arbitraire $F_1^2$ avec chacune des surfaces d'un faisceau de $F^2$ qui ne passe pas par $F_1^2$, on obtient tous les faisceaux de $F^2$ contenus dans la gerbe, qui passent par $F_1^2$. La surface $F_1^2$ est donc coupée par les autres surfaces de la gerbe non pas suivant une gerbe, mais suivant un faisceau de courbes gauches du quatrième ordre et, pour ce qui concerne les droites situées sur $F_1^2$, on voit que (voir II, page 175)

*Les surfaces d'une gerbe de $F^2$ coupent une droite quelconque située sur l'une d'elles suivant les couples de points d'une ponctuelle involutive; les points doubles de cette ponctuelle sont conjugués par rapport à la gerbe de $F^2$.*

Puisque toutes les surfaces de la gerbe qui passent par un point P constituent un faisceau de $F^2$, les droites appartenant à ces surfaces et passant par P doivent être des cordes de la courbe de base de ce faisceau. Réciproquement, toute corde de cette courbe est située sur une

surface du faisceau (II, page 164) ; et comme la courbe est projetée de P suivant une surface conique du troisième ordre (II, page 250), il s'ensuit que :

*Les droites de toutes les surfaces de la gerbe de $F^2$ forment un complexe de rayons du troisième ordre; les rayons qui passent par tous les points doubles de cette gerbe appartiennent à ce complexe.*

*Les droites qui réunissent les points doubles sont des rayons doubles de ce même complexe.*

Un plan quelconque coupe la gerbe de $F^2$ suivant un réseau de coniques dont les couples de rayons sont situés sur les surfaces de la gerbe tangentes au plan. Comme on le sait, les points de contact sont situés sur une courbe du troisième ordre $C_3$, tandis que les couples de rayons enveloppent une courbe de troisième classe (I, pages 246-247).

*Les points d'un plan $\varphi$ ont pour conjugués, par rapport à une gerbe de $F^2$, les points d'une surface $F^3$ du troisième ordre. Cette surface $F^3$ contient aussi les pôles de $\varphi$ par rapport à toutes les surfaces de la gerbe, ainsi que les sommets de toutes les surfaces coniques contenues dans cette gerbe.*

En effet, si l'on cherche pour chaque point de $\varphi$ ses plans polaires par rapport à trois surfaces quelconques de la gerbe, on obtient trois gerbes de rayons réciproques à $\varphi$ et conséquemment collinéaires entre elles, qui engendrent la surface $F^3$. Les centres des gerbes sont les pôles de $\varphi$ et sont situés sur $F^3$; quand les trois surfaces sont des cônes, ces centres coïncident avec les sommets de ces cônes. En ses points d'intersection avec $F^3$, le plan $\varphi$ est tangent à une infinité de surfaces de la gerbe de $F^2$ ; les points de contact sont situés sur une courbe $C_3$ du troisième ordre et conjugués deux à deux par rapport à la gerbe. Les points d'une droite de $\varphi$ ont pour conjugués ceux d'une cubique gauche de $F^3$ ; les courbes gauches du troisième ordre, qui correspondent de cette manière aux droites de $\varphi$, constituent le premier système de courbes de la surface $F^3$. Les pôles de $\varphi$ par rapport à toutes les surfaces de la gerbe qui appartiennent à une gerbe de $F^2$ sont situés sur une cubique gauche du second système de courbes de $F^3$. Les centres de toutes les surfaces de la gerbe de $F^2$, étant les pôles du plan à l'infini, sont également situés sur une surface du troisième ordre.

*Les sommets de toutes les surfaces coniques du second ordre contenues dans une gerbe de $F^2$ sont en général situés sur une courbe gauche $C^6$ du sixième ordre qu'on peut appeler la* courbe nodale *de la gerbe.*

En effet, les points de deux plans quelconques $\varphi$ et $\gamma$ ont pour conjugués par rapport à la gerbe de $F^2$ les points de deux surfaces $F^3$ et $G^3$ du troisième ordre qui ont en commun tous ces sommets et tous les points conjugués aux points d'intersection de $\varphi$ et $\gamma$. Ces derniers sont situés sur une courbe gauche du troisième ordre ; or, la ligne d'intersection de $F^3$ et $G^3$ est une courbe gauche du neuvième ordre (II, page 231) et elle se décompose en cette cubique gauche et la courbe gauche $C^6$ du sixième ordre, dont il est question dans le théorème. Quand $F^3$ et $G^3$ sont tangentes le long d'une ligne, cette dernière courbe se réduit à une courbe d'ordre moindre. Chacun de ses points est conjugué en même temps à un point de $\varphi$ et à un autre point de $\gamma$ et par conséquent à la droite qui joint ces deux points ; il en résulte que :

*Tout point K de la courbe nodale $C^6$ a pour éléments conjugués, par rapport à la gerbe de $F^2$, tous les points d'une droite* k ; *et quand un point K a pour conjuguée une droite k, il est situé sur la courbe nodale.*

Si un point P se meut sur cette droite *k*, ses plans polaires par rapport à trois surfaces quelconques de la gerbe décrivent trois faisceaux de plans projectifs dont les axes passent par K. En général, P peut donc se trouver trois fois dans une position telle que ses plans polaires passent par une seule et même droite (I, page 154), c'est-à-dire qu'il y a en général sur *k* trois points de $C^6$ et que leurs droites conjuguées passent par K. Nous donnerons à la droite *k* le nom de *corde double* de $C^6$ ; nous avons alors ce théorème :

*Par rapport à la gerbe de $F^2$, tout point de la courbe nodale $C^6$ a pour élément conjugué une corde double de cette courbe. Sur chaque corde double, il y a en général trois points de $C^6$, et par chaque point de $C^6$ il passe en général trois cordes doubles de cette courbe gauche.*

La courbe $C^6$ contient chaque point dont les plans polaires par rapport à deux surfaces de la gerbe de $F^2$ coïncident ; en effet, si l'on ajoute une troisième surface quelconque du faisceau, on voit immédiatement que le point est conjugué à tous les points d'une droite.

*D'après cela, le tétraèdre polaire commun à deux quelconques des surfaces de la gerbe de $F^2$ est inscrit à la courbe nodale $C^6$.*

Comme un faisceau de $F^2$ renferme au plus quatre surfaces coniques (II, page 171), il s'ensuit que

*Les plans polaires d'un point quelconque P par rapport à toutes les*

*surfaces coniques d'une gerbe de $F^2$ enveloppent une surface conique de quatrième classe.*

C'est là, soit dit en passant, la surface conique générale de quatrième classe.

Parmi les gerbes particulières de $F^2$, celle dont les surfaces se coupent suivant une même droite $g$ présente un intérêt spécial. Étant données trois surfaces quelconques de cette gerbe, chacune d'elles rencontre les deux autres suivant $g$ et suivant deux cubiques gauches, qui ont $g$ pour corde commune et qui ont en général, outre $g$, au plus quatre points G communs. (II, pages 104-105.) On en conclut que :

*La gerbe particulière de $F^2$, dont les surfaces passent par une droite* g, *a au plus, en outre de* g, *quatre points doubles G situés sur toutes ses surfaces.*

Comme en général deux points arbitraires ne peuvent être réunis que par une seule surface de la gerbe de $F^2$, et comme, d'autre part, par neuf points, dont trois sont situés sur $g$, on peut en général faire passer une surface du second ordre (contenant la droite $g$) et une seule, il s'ensuit que :

*Toutes les surfaces du second ordre, qui réunissent une droite* g *avec quatre points quelconques G pris en dehors de* g, *forment une gerbe particulière de $F^2$ ; cette dernière contient quatre couples de plans.*

Chacun de ces quatre couples de plans se compose d'un plan réunissant trois des quatre points G et de celui qui passe par $g$ et le quatrième point G. La courbe nodale de cette gerbe particulière se décompose en les quatre droites d'intersection ou droites doubles de ces quatre couples de plans et en la droite $g$. Tout point de $g$ est le sommet d'une surface conique de la gerbe.

# VINGT-HUITIÈME LEÇON.

## Réseau de surfaces du second ordre; ses relations projectives avec un système de l'espace et la surface de Steiner du quatrième ordre.

Quatre surfaces du second ordre, non situées dans une gerbe de $F^2$, déterminent un réseau de surfaces du second ordre, ou *réseau de $F^2$*. Deux surfaces quelconques du second ordre, qui sont situées dans une même gerbe de $F^2$ avec trois des surfaces données, déterminent avec la quatrième une nouvelle gerbe de $F^2$ dont nous rattachons toutes les surfaces au réseau de $F^2$. Chacune de ces gerbes de $F^2$ passant par la quatrième surface a donc avec la gerbe de $F^2$ déterminée par les trois autres surfaces un faisceau de $F^2$ commun, et ce dernier a une surface commune (II, page 248) avec tout faisceau de $F^2$ situé dans l'une ou l'autre gerbe. La gerbe de $F^2$, que la quatrième surface donnée détermine avec deux quelconques des surfaces du réseau de $F^2$, contient aussi par conséquent des surfaces de la gerbe de $F^2$ déterminée par les trois autres surfaces données et appartient par suite au réseau de $F^2$. Il découle de là que :

*Le réseau de $F^2$ contient tous les faisceaux de $F^2$, qui réunissent deux quelconques de ses surfaces et toutes les gerbes de $F^2$ déterminées par trois quelconques de ses surfaces; il est donc aussi bien déterminé par quatre quelconques de ses surfaces, non situées dans une même gerbe de $F^2$, que par les quatre premières surfaces prises en commençant. Un faisceau de $F^2$ et une gerbe de $F^2$ appartenant tous deux au réseau ont toujours une surface de ce réseau qui leur est commune.*

Quand deux points sont conjugués par rapport aux quatre premières surfaces du second ordre, ils le sont aussi par rapport au réseau de $F^2$, c'est-à-dire par rapport à toutes les surfaces de ce réseau (II, page 246). Si en particulier un point est situé sur l'une des quatre premières surfaces et par conséquent est conjugué à lui-même, toutes les surfaces du réseau passent par lui. Par exemple, toutes les surfaces du second ordre passant par six points arbitraires constituent un réseau particulier de $F^2$. Nous excluons de nos considérations le réseau encore plus spécial de $F^2$ par rapport auquel chaque point de l'espace est conjugué à un des autres points ou à lui-même.

*Les plans polaires de points quelconques P, Q, R... par rapport aux surfaces individuelles du réseau de $F^2$ sont des plans homologues de systèmes collinéaires de l'espace,*

en supposant qu'aucun de ces points ne soit conjugué à lui-même ou à un des autres points par rapport au réseau. En effet, si une surface du réseau décrit un faisceau ou une gerbe, les plans polaires de P et Q par rapport à elle décrivent deux faisceaux de plans ou deux gerbes homologues des espaces collinéaires mentionnés dans le théorème (voir II, page 247).

Si, à chaque surface du réseau de $F^2$, on rapporte comme élément correspondant le plan polaire de P par rapport à cette surface, il s'ensuit que :

*Le réseau de $F^2$ est projectivement rapporté à un système $\Sigma_1$ de l'espace de telle manière qu'à chacune de ses surfaces correspond un plan de $\Sigma_1$ et à chacun de ses faisceaux de $F^2$ un faisceau de plans du premier ordre de $\Sigma_1$ projectif au faisceau de surfaces. A toute courbe gauche du quatrième ordre, suivant laquelle se coupent deux surfaces du réseau, correspond dans $\Sigma_1$ une droite qui est l'intersection des deux plans correspondants; tout groupe de huit points, suivant lequel se coupent trois surfaces quelconques du réseau et que nous nommerons groupe de* points associés, *a pour correspondant dans $\Sigma_1$ le point d'intersection des trois plans correspondants.*

Réciproquement, en général, une droite quelconque de $\Sigma_1$ a pour correspondante une courbe gauche du quatrième ordre du réseau de $F^2$ et un point quelconque de $\Sigma_1$ un groupe de huit points associés; toutefois ces huit points d'intersection de trois surfaces de la gerbe et cette courbe gauche ne sont pas toujours réels. Les surfaces du réseau qui correspondent aux plans de $\Sigma_1$ peuvent être séparées en partie par

des systèmes polaires de l'espace n'ayant pas de surface double réelle. (Voir II, pages 247-248),

Par un point quelconque passent une infinité de surfaces du réseau, et, entre autres, une de chaque faisceau de $F^2$ du réseau ; toutes ces surfaces constituent une gerbe de $F^2$ et elles ont pour éléments correspondants dans l'espace $\Sigma_1$ les plans d'une gerbe. Donc :

*A un point pris d'une manière arbitraire dans le réseau de $F^2$ et à ses points associés correspond toujours un seul et même point de l'espace $\Sigma_1$. Deux groupes de points associés peuvent être réunis par une courbe gauche du quatrième ordre, puisque les points de $\Sigma_1$ qui leur correspondent sont sur une même droite ; de même trois groupes de points associés sont toujours contenus sur une même surface du réseau. Trois points quelconques peuvent en général être réunis par une surface unique de ce réseau ; elle a pour élément correspondant le plan qui réunit les trois points correspondants de $\Sigma_1$.*

Quand un point A parcourt une droite $u$. ses plans polaires par rapport à quatre surfaces quelconques du réseau de $F^2$ décrivent quatre faisceaux projectifs de plans ; le point se trouve donc en général quatre fois au plus dans une position telle que ses quatre plans polaires se coupent en un seul et même point A′ (II, page 105). Quand un point quelconque a une droite pour élément conjugué par rapport à une gerbe de $F^2$ contenue dans le réseau, il a pour conjugué dans le réseau un point de cette droite. Donc :

*Les points qui sont conjugués deux à deux par rapport au réseau de $F^2$ sont situés sur une surface $K^4$ du quatrième ordre. Cette surface contient les courbes nodales de toutes les gerbes de $F^2$ contenues dans le réseau, (II, page 249) et les sommets de toutes les surfaces coniques qui font partie de ce réseau. On la nomme, d'après Jacob Steiner, la* surface nodale *du réseau.*

Comme un faisceau de $F^2$ contient en général quatre surfaces coniques au plus, les plans polaires d'un point quelconque P par rapport à toutes les surfaces coniques du réseau de $F^2$ enveloppent une surface de quatrième classe ; autrement dit :

*Aux surfaces coniques du réseau de $F^2$ correspondent dans l'espace $\Sigma_1$ les plans tangents d'une surface $\Phi^4$ de quatrième classe ; cette surface est rapportée sans ambiguïté à la surface nodale $K^4$, puisque chacun des plans tangents de $\Phi^4$ a pour correspondant sur $K^4$ le sommet M de la surface conique correspondante.*

Nous pouvons montrer maintenant que $\Phi^4$ touche chacun de ses plans tangents au point $M_1$ de l'espace $\Sigma_1$ qui correspond au point M du réseau de $F^2$ et que par conséquent chaque point de la surface nodale $K^4$ a pour correspondant, non seulement un plan tangent de $\Phi^4$, mais encore le point de contact de ce plan. En effet, à une droite quelconque $g_1$ du plan tangent correspond sur la surface conique correspondante du réseau une courbe gauche du quatrième ordre ; cette dernière a le point M pour point double et coupe deux fois la surface nodale $K^4$ en ce point, si $g_1$ passe par $M_1$. Dans ce cas, $g_1$ a ainsi en commun avec la surface de $\Sigma_1$, qui correspond à la surface nodale, deux points qui se réunissent en $M_1$, et elle lui est tangente en $M_1$ ; en d'autres termes, cette surface de $\Sigma_1$ a les mêmes plans tangents que $\Phi^4$. On a ainsi démontré ce théorème :

*Les points de la surface nodale $K^4$ ont pour correspondants, dans le système $\Sigma_1$ de l'espace, les points d'une surface $\Phi^4$ de quatrième classe.*

Nous donnerons le nom de *rayon principal* à toute droite $s$ qui réunit deux points associés du réseau de $F^2$. Aux deux points associés correspond dans l'espace $\Sigma_1$ un seul et même point $P_1$, à un troisième point quelconque de $s$ un point $Q_1$, et la droite $s_1$ de $\Sigma_1$ qui réunit $P_1$ et $Q_1$ a pour correspondante dans le réseau de $F^2$ une courbe gauche du quatrième ordre, qui a trois points communs avec $s$ et qui par conséquent se décompose en $s$ et en une courbe gauche du troisième ordre. Donc :

*A tout rayon principal* s *du réseau de $F^2$ est associée une courbe gauche du troisième ordre, dont il est une corde ; il passe par lui un faisceau de surfaces du réseau et il a pour correspondant dans $\Sigma_1$ une droite* $s_1$.

Un faisceau quelconque de plans de $\Sigma_1$, dont l'axe n'a aucun point commun avec $s_1$, a pour correspondant un faisceau de $F^2$ du réseau ; ce dernier sera coupé par $s$ suivant une ponctuelle involutive dont les couples de points correspondent aux points individuels de $s_1$. De là résulte que :

*Les rayons principaux du réseau de $F^2$ sont les lieux de ponctuelles involutives dont les couples de points se composent chacun de deux points associés ; ils sont justement coupés par les surfaces du réseau suivant ces couples de points. Les deux points doubles, associés à eux-mêmes, d'une pareille ponctuelle involutive sont conjugués par*

*rapport au réseau de $F^2$ et conséquemment sont situés sur la surface nodale $K^4$. Toutes les surfaces du réseau, qui passent par un point associé à lui-même, sont tangentes en ce point au rayon principal* s *qui réunit ce point à son point conjugué.*

Dans le cas particulier que nous étudierons plus tard, dans lequel toutes les surfaces du réseau ont un point commun, les rayons principaux qui passent par ce point forment une exception au théorème. De la démonstration précédente, il résulte encore que :

*Toute droite* s, *à laquelle correspond une droite* $s_1$ *dans* $\Sigma_1$, *est un rayon principal du réseau de* $F^2$.

Aux plans de $\Sigma_1$ qui passent par $s_1$ correspondent les surfaces du réseau de $F^2$ passant par $s$ qui se coupent suivant le rayon principal $s$ et les courbes gauches du troisième ordre qui lui sont associées. Comme $s$ est une corde de ces courbes gauches, parmi les surfaces il y a en général deux surfaces coniques ; elles ont pour éléments correspondants deux plans tangents de la surface $\Phi^4$, qui passent par $s_1$ et dont les deux points de contact sont situés sur $s_1$, puisqu'ils correspondent aux sommets des surfaces coniques situés $s$ (II, page 254). Donc :

*A tout rayon principal* s *du réseau de* $F^2$ *correspond dans* $\Sigma_1$ *une tangente double de la surface* $\Phi^4$ *de quatrième classe.*

Ce théorème admet une réciproque, si l'on définit les tangentes de $\Phi^4$ comme droites d'intersection de plans infiniment voisins, tangents à la surface.

Huit points associés du réseau de $F^2$ peuvent être réunis deux à deux par 28 rayons principaux ; il leur correspond 28 tangentes doubles de la surface $\Phi^4$ qui passent par un même point. Par un point $M_1$, situé sur $\Phi^4$, il passe au plus 22 tangentes doubles de cette surface, parce que deux des huit points associés correspondants coïncident en un point M associé à lui-même ; six de ces 22 tangentes doubles sont situées dans le plan tangent à la surface $\Phi^4$ en $M_1$ et doivent être considérées comme six couples de tangentes doubles infiniment voisines.

*Les tangentes doubles de la surface* $\Phi^4$ *forment donc un système de rayons du* 28$^e$ *ordre* (12$^e$ *classe) et, d'après la dénomination de Kummer,* $\Phi^4$ *est la* surface focale *de ce système, c'est-à-dire le lieu de tous les points et de tous les plans pour lesquels deux rayons du système coïncident.*

Par un point quelconque du réseau de $F^2$ il passe au plus sept rayons principaux, parce que ce point a au plus sept points associés.

*Toute droite* l *du réseau de* $F^2$ *qui ne joint pas de points associés a pour correspondante dans* $\Sigma_1$ *une conique* $\lambda_1$ *projective à* l.

En effet, par trois points $A_1$, $B_1$, $C_1$ de $\Sigma_1$, dont les correspondants A, B, C sont situés sur $l$, faisons passer un plan; il a pour correspondant une surface du réseau passant par $l$ et à cette droite $l$ correspond une certaine ligne $\lambda_1$ située dans ce plan. Considérons à présent deux faisceaux de plans, dont les axes sont menés d'une manière quelconque par $A_1$ et $B_1$ et rapportons-les l'un à l'autre de manière que deux de leurs plans homologues se coupent en un troisième point $C_1$ de $\lambda_1$; ils seront projectifs, parce que les gerbes de $F^2$ du réseau qui leur correspondent sont ainsi rapportées perspectivement à la ponctuelle $l$ (II, page 178). Donc $\lambda_1$ est une conique projective à $l$. Elle ne peut jamais se décomposer en deux droites (II, page 256).

*La conique* $\lambda_1$ *de* $\Sigma_1$, *qui correspond à une droite* l, *est en général tangente à la surface* $\Phi^4$ *en quatre points* $M_1$, *qui correspondent aux points* M *communs à la surface nodale* $K^4$ *et à la droite* l.

En effet, si par l'un de ces points M on mène une surface quelconque du réseau de $F^2$, elle coupe la droite $l$ en M et en un autre point N et elle a pour correspondant dans $\Sigma_1$ un plan qui a deux points $M_1$ et $N_1$ communs avec la conique $\lambda_1$; mais si cette surface est une surface conique ayant son sommet en M, M et N se confondent et le plan tangent à $\Phi^4$, qui lui correspond, est par conséquent tangent à la conique $\lambda_1$ en son point de contact $M_1$. — D'une manière analogue, une ligne quelconque $\varkappa$ contenue dans le réseau de $F^2$ et coupant la surface nodale en $n$ points a pour correspondante dans $\Sigma_1$ une ligne $\varkappa_1$ tangente à la surface $\Phi^4$ aux $n$ points correspondants; il faut compter $\varkappa_1$ deux fois, trois fois, etc., quand les points de la ligne $\varkappa$ sont associés deux à deux, trois à trois, etc.; ainsi, par exemple, à chaque rayon principal $s$ du réseau de $F^2$ correspond une ligne double $s_1$.

Quand une surface de la gerbe de $F^2$ se décompose en deux plans, la droite d'intersection ou ligne double de ce couple de plans est située sur la surface nodale $K^4$. Car chaque point de cette ligne double est le sommet M d'une surface conique de la gerbe, qui se décompose en deux plans. En vertu d'une remarque faite précédemment (II, pages 254-255), on voit de suite que:

*A tout couple de plans du réseau de* $F^2$ *correspond dans* $\Sigma_1$ *un plan tangent singulier de la surface* $\Phi^4$; *ce plan est tangent à* $\Phi^4$ *en*

*tous les points de la conique qui correspond à la ligne double du couple de plans.*

Nous allons maintenant nous occuper de la surface du quatrième ordre et de troisième classe découverte par Steiner, et qui est intimement liée à la relation projective qui existe entre le réseau de $F^2$ et le système de l'espace $\Sigma_1$. Quand un point se meut d'une manière continue dans le réseau de $F^2$ et décrit une courbe ou une surface quelconque, le point qui lui correspond dans $\Sigma_1$ se meut d'une manière continue et décrit la courbe ou la surface correspondante de $\Sigma_1$.

*Un plan quelconque $\varphi$ arbitrairement choisi dans le réseau de $F^2$ a pour correspondant dans $\Sigma_1$ une surface de Steiner $F_1^4$ du quatrième ordre, qui contient un nombre doublement infini de coniques; elle est rapportée d'une manière uniforme, sans ambiguïté, au plan $\varphi$ de telle sorte qu'à tout point de $\varphi$ correspond un seul point de $F_1^4$ et que, réciproquement, à un point quelconque de $F_1^4$ correspond en général un point de $\varphi$ et rien qu'un.*

La surface $F_1^4$ a au plus quatre points communs avec une droite quelconque de $\Sigma_1$, parce que la courbe gauche du quatrième ordre qui correspond à la droite a au plus quatre points communs avec le plan $\varphi$. A une droite quelconque $l$ de $\varphi$ correspond au contraire une conique $\lambda_1$ située sur $F_1^4$.

Aux surfaces du réseau de $F^2$ tangentes au plan $\varphi$ correspondent dans $\Sigma_1$ les plans tangents de la surface $F_1^4$. Or, par une droite quelconque, il passe en général au plus trois plans tangents de $F_1^4$, parce qu'un faisceau quelconque de $F^2$ renferme au plus trois surfaces tangentes au plan $\varphi$ (II, page 165). Donc :

*La surface de Steiner $F_1^4$ du quatrième ordre est de la troisième classe.*

Soit $l$ une droite quelconque de $\varphi$ et $\lambda_1$ la conique qui lui correspond sur $F_1^4$, le plan de $\lambda_1$ a encore en général une deuxième conique $\lambda'_1$ commune avec $F_1^4$; car il a pour correspondant dans le réseau de $F_2$ une surface réglée du second ordre, qui a en commun avec le plan $\varphi$ la droite $l$ et par conséquent encore une autre droite $l'$ et qui est tangente à ce plan au point $ll'$. Donc :

*La surface de Steiner $F_1^4$ est tangente aux plans, dans lesquels ses coniques sont situées deux à deux, en un point commun aux couples de coniques.*

Comme en général toutes ces coniques $\lambda_1$, $\lambda'_1$ touchent la surface $\Phi^4$ en quatre points chacune (II, page 257), on voit que :

*La surface de Steiner $F_1^4$ est tangente à la surface de quatrième classe $\Phi^4$ le long d'une courbe gauche (du huitième ordre) qui correspond à la ligne d'intersection du plan $\varphi$ et de la surface nodale $K^4$ du réseau.*

Au point $B_1$ de contact de $F_1^4$ avec le plan des coniques $\lambda_1$ et $\lambda'_1$ correspond dans $\varphi$ le point d'intersection des droites $l$ et $l'$; tout autre point $U_1$ commun aux coniques $\lambda_1$ et $\lambda'_1$ a pour correspondants deux points différents $U$ et $U'$ des droites $l$ et $l'$. Ces deux points $U$, $U'$ sont des points associés du réseau de $F^2$ et le rayon principal qui les joint a pour correspondant dans $\Sigma_1$ une droite, par les points de laquelle la surface $F_1^4$ passe deux fois. Les coniques $\lambda_1$ et $\lambda'_1$ ont, en outre de $B_1$, au plus trois points communs; donc :

*Le plan arbitraire $\varphi$ contient au plus trois rayons principaux du réseau de $F^2$ et au moins un : le système de rayons formé par les rayons principaux est par conséquent de la troisième classe et du septième ordre.*

Si $\varphi$ renferme trois rayons principaux, leurs points d'intersection sont trois points associés; car à chacun de ces points d'intersection O sont associés deux points sur les deux rayons principaux qui passent par lui; la droite qui les joint est aussi un rayon principal et doit coïncider avec le troisième rayon principal du plan.

*La surface de Steiner $F_1^4$ contient donc au moins une et au plus trois droites doubles : ces droites se coupent en un point triple $O_1$ de la surface.*

Aux sections planes de la surface de Steiner $F_1^4$ correspondent dans le plan $\varphi$ des coniques qui ont deux points associés communs avec les rayons principaux situés dans $\varphi$; car ces coniques sont situées sur les surfaces du réseau de $F^2$ qui correspondent aux plans des sections (II, page 255). Les droites $l$, $l'$ de $\varphi$, qui correspondent à deux coniques $\lambda_1$, $\lambda'_1$ situées dans un plan tangent à $F_1^4$, ont aussi deux points associés A, A' communs avec tout rayon principal contenu dans le plan $\varphi$ et si $l$ pivote autour de A, $l'$ doit pivoter autour de A'. Deux quelconques de ces droites $l'$ sont rapportées projectivement l'une à l'autre par le faisceau de rayons A ; les coniques correspondantes $\lambda'_1$ de $F_1^4$, qui passent par un point double $A_1$, seront donc rapportées projectivement entre elles par les coniques $\lambda_1$ et par leurs plans. Il suit de là que :

*Les plans tangents de la surface de Steiner, qui coupent une de ses droites doubles en un même point $A_1$ forment un faisceau de plans du second ordre.*

Ce faisceau est projectif au faisceau de rayons A aussi bien qu'au faisceau A'. Les deux faisceaux décrits par $l$ et $l'$ sont donc aussi projectifs; ils engendrent une conique dont les points correspondent aux points de contact de ces plans tangents sur $F_1^4$.

Quand un point A est associé à lui-même, A' coïncide avec lui; les faisceaux projectifs des rayons A et A' sont concentriques dans ce cas, et ils ont en général deux rayons correspondants communs. Le plan $\varphi$ est tangent à une surface conique du réseau de $F^2$ suivant chacun de ces deux rayons; par conséquent, $F_1^4$ est tangente à un plan tangent de la surface $\Phi^4$ aux points de la conique correspondante. Par suite, comme les rayons principaux situés dans $\varphi$ contiennent toujours deux points associés à eux-mêmes, on voit que :

*La surface de Steiner $F_1^4$ a en général quatre plans tangents singuliers, qui la touchent chacun suivant les points d'une conique.*

Ces quatre plans tangents singuliers sont imaginaires, quand les points associés à eux-mêmes d'un rayon principal quelconque situé dans $\varphi$ sont imaginaires. Si le plan $\varphi$ contient trois rayons principaux réels et si leurs points associés à eux-mêmes sont tous les six réels, ces derniers forment, comme on le voit aisément, les sommets d'un quadrilatère complet suivant les côtés duquel $\varphi$ est touché par quatre surfaces coniques du réseau de $F^2$.

Tout plan mené par une droite double $u_1$ est tangent à la surface de Steiner en un point de $u_1$ et la coupe en même temps suivant $u_1$ et suivant une courbe du second ordre, qui passe par le point triple $O_1$. A ce plan correspond, en effet, une surface du réseau de $F^2$ qui passe par le rayon principal correspondant $u$ et qui par conséquent est tangente au plan $\varphi$ en un point de $u$, puisqu'elle coupe ce dernier plan suivant $u$ et suivant une autre droite.

Si l'on projette la surface de Steiner de son point triple $O_1$ par une gerbe, chaque rayon de cette gerbe a pour correspondant le point de $\varphi$ dont le rayon projette le correspondant. A toute droite $l$ de $\varphi$ correspond dans la gerbe $O_1$ une surface conique du second ordre projective à $l$ qui passe par les droites doubles de $F_1^4$; à tout faisceau de rayons de $O_1$ correspond dans $\varphi$ une conique qui passe par le point O d'intersection des rayons principaux situés dans $\varphi$. On peut en conclure que :

*La surface de Steiner est projetée de son point triple par une gerbe qui est rapportée quadratiquement au plan $\varphi$.*

La projectivité établie précédemment entre le réseau de $F^2$ et le système de l'espace $\Sigma_1$ conduit encore à d'autres surfaces du quatrième ordre. Ainsi à toute surface du second ordre $L_1^2$ prise dans $\Sigma_1$ correspond une surface du quatrième ordre $L^4$ dans le réseau de $F^2$; car $L^4$ a avec une droite autant de points communs que $L_1^2$ en a avec la conique correspondante de $\Sigma_1$, c'est-à-dire au plus quatre, si la droite n'est pas située tout entière sur $L^4$. Un plan tangent à $L_1^2$ en un point a pour élément correspondant une surface du réseau tangente à $L^4$ aux points associés correspondants. La surface $L_1^2$ peut être engendrée par deux gerbes réciproques; de même $L^4$ peut aussi être engendrée d'une infinité de manières par deux gerbes réciproques de surfaces du réseau, de telle manière que chaque surface de l'une des gerbes soit coupée au plus en huit points de la surface $L^4$ par la courbe gauche du quatrième ordre qui lui correspond dans l'autre gerbe. Si $L^2_1$ est une surface réglée, engendrée par conséquent par deux faisceaux projectifs de plans, $L^4$ peut aussi être engendrée d'une infinité de manières par deux faisceaux projectifs de $F^2$. Si, en particulier, $L^2_1$ est une surface conique du second ordre, il correspond en général à son sommet huit points doubles coniques sur la surface $L^4$.

*Deux faisceaux projectifs de $F^2$ engendrent en général une surface $L^4$ du quatrième ordre, qui contient deux systèmes de courbes gauches du quatrième ordre. Deux courbes gauches quelconques de l'un ou de l'autre système sont toujours les courbes de base de deux faisceaux projectifs de $F^2$, qui engendrent la surface $L^4$.*

La démonstration découle immédiatement de ce qui précède, si l'on a égard à ce que deux faisceaux de $F^2$ peuvent toujours être réunis par un réseau de $F^2$. Comme $L^4$ est coupée par un plan quelconque suivant une courbe du quatrième ordre, on voit en passant que :

*Deux faisceaux projectifs de coniques, situés dans un même plan, engendrent en général une courbe du quatrième ordre; cette même courbe peut aussi être engendrée d'une infinité de manières par des faisceaux projectifs de coniques.*

---

# VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

## Cas particulier du réseau de surfaces du second ordre.

Nous allons étudier à présent le cas particulier où toutes les surfaces du réseau de $F^2$ ont un point A commun ou bien encore celui où elles ont plusieurs points communs. Le point commun A fait partie de chaque groupe de points associés ; il est associé à tout autre point du réseau et correspond à tout point du système $\Sigma_1$.

*Toute droite* s *passant par* A *est un rayon principal du réseau de* $F^2$ ; *elle a pour correspondante dans* $\Sigma_1$ *une droite* $s_1$ *projective à* s.

En effet, si l'on réunit par une droite $s_1$ deux points de $\Sigma_1$, correspondants à deux points quelconques de $s$, la droite $s_1$ a pour correspondante dans le réseau de $F^2$ une courbe gauche du quatrième ordre, qui a trois points communs avec $s$ et qui par conséquent se décompose en $s$ et en une courbe gauche du troisième ordre ; si l'on considère $s_1$ comme une section d'un faisceau de plans de $\Sigma_1$, $s$ sera le lieu d'une ponctuelle perspective au faisceau correspondant de $F^2$ et par conséquent projective à $s_1$.

Il existe d'après cela sur $s_1$ un point $A_1$ auquel ne correspond que le seul point A sur $s$ ; ce dernier point correspond doublement au premier, de sorte que tout plan de $\Sigma_1$ passant par $A_1$ a pour élément correspondant une surface du réseau de $F^2$ tangente en A au rayon principal $s$. Deux rayons quelconques $s$, menés par A, n'ont pour éléments correspondants deux droites $s_1$ qui se coupent, que s'ils sont situés sur une même surface du réseau. Les points $A_1$ de ces droites sont donc en

général différents les uns des autres. A tout plan de $\Sigma_1$, passant par deux des points $A_1$, correspond une surface du réseau qui est tangente aux deux rayons principaux $s$ correspondants, et par conséquent à leur plan, au point A ; le plan $\alpha_1$, qui réunit trois points $A_1$ quelconques, doit donc avoir pour élément correspondant une surface du second ordre, ayant en A trois plans tangents différents, c'est-à-dire une surface conique réelle ou imaginaire, ayant son sommet en A. Il suit de là que :

*Tous les points $A_1$ de $\Sigma_1$, auxquels correspond doublement le point A commun au réseau de* $F^2$, *sont situés dans un même plan $\alpha_1$ ; à ce plan correspond dans le réseau de $F^2$ une surface conique du second ordre ayant son centre en* A.

Un plan quelconque de $\Sigma_1$ contient en général, et au plus, deux des droites $s_1$ qui correspondent aux rayons principaux $s$ du réseau passant par A ; car ce plan a pour élément correspondant une surface du réseau sur laquelle, en général, il y a au plus deux de ces rayons $s_1$. Si à chaque rayon $s$ passant par A nous rapportons le point de $\alpha_1$ qui est situé sur la droite correspondante $s_1$ de $\Sigma_1$, à toute droite de $\alpha_1$ correspond un plan de A ; c'est le plan tangent commun aux surfaces du second ordre qui correspondent aux plans passant par la droite. On en conclut que :

*Les tangentes doubles de la surface de quatrième classe* $\Phi^4$, *qui correspondent aux rayons principaux du réseau de* $F^2$ *issus de* A, *forment un système de rayons de deuxième classe, dont* $\Phi^4$ *est la surface focale ; ce système est coupé par le plan $\alpha_1$ suivant un système plan collinéaire à la gerbe* A. *Le système de rayons de deuxième classe est de l'ordre* (8-n), *quand les surfaces du réseau ont encore* n-1 *points communs, en outre de* A.

Pour prouver la dernière partie du théorème, remarquons qu'un point quelconque $P_1$ de $\Sigma_1$ a généralement pour correspondants huit points associés, dont $n$ sont situés sur toutes les surfaces du réseau ; les rayons du système de rayons, qui passent par $P_1$, correspondent seulement aux rayons issus de A, qui passent par les (8-$n$) autres points.

La surface conique du réseau de $F^2$, qui a son sommet en A, a pour correspondante dans le plan $\alpha_1$, collinéaire à la gerbe A, une conique qui lui est projective, et ses rayons ont pour correspondants dans l'espace $\Sigma_1$ des rayons du plan $\alpha_1$. Ce dernier est donc un plan *singulier* du système de rayons de deuxième classe ; les rayons du système qui

y sont contenus forment en général un faisceau de rayons du sixième ordre, c'est-à-dire qu'une droite quelconque de $\Sigma_1$ rencontre au plus six d'entre eux, tandis que la courbe gauche correspondante du quatrième ordre a six points communs avec la surface conique A, en outre de son sommet. Un rayon quelconque, issu de A, coupe la surface nodale $K^4$ en A et en les deux points qui lui sont communs avec la courbe gauche du troisième ordre qui lui est associée; mais l'un de ces deux points coïncide avec A, quand le rayon, et par suite la courbe gauche qui lui est associée, est situé sur la surface conique A du réseau. Par suite :

*Le point A est un point conique de la surface nodale $K^4$ et son cône de tangentes est une surface du réseau de $F^2$. D'autre part, le plan $\alpha_1$ est un plan de contact singulier de la surface de quatrième classe $\Phi^4$; il est tangent à cette surface en tous les points de la conique qui correspond sur $\alpha_1$ à ce cône de tangentes.*

Tandis qu'un point quelconque de la surface nodale $K^4$ n'a pour correspondant qu'un seul point de $\Phi^4$, tous les points de cette conique ont pour point correspondant le point anguleux A de $K^4$.

*A un plan quelconque $\varphi$ mené par le point A correspond dans le système $\Sigma_1$ de l'espace une surface réglée $F_1^3$ du troisième ordre; elle est représentée d'une manière uniforme sur le plan $\varphi$ et, jointe au plan $\alpha_1$, elle peut être considérée comme une surface de Steiner du quatrième ordre.*

En effet, la surface $F_1^3$ a au plus trois points communs avec une droite quelconque de $\Sigma_1$, parce que la courbe gauche du quatrième ordre qui lui correspond dans le réseau de $F^2$ a au plus avec $\varphi$ trois points communs différents de A. Si $\varphi$ est décrit par un rayon principal $s$ qui tourne, le rayon correspondant $s_1$ décrit la surface $F_1^3$, puisqu'il glisse le long d'une droite $u_1$ du plan $\alpha_1$ : la ponctuelle $u_1$ est projective au faisceau de rayons décrit par $s$. A une droite quelconque $l$ de $\varphi$ correspond sur $F_1^3$ une conique $\lambda_1$ projective à $l$ (II, page 257), dont le plan passe par une des *génératrices* $s_1$ de $F_1^3$; en effet, ce plan a pour correspondant dans le réseau de $F^2$ une surface du second ordre, qui a en commun avec $\varphi$ la droite $l$ et par conséquent aussi une autre droite $s$ passant par A. Le plan de $\lambda_1$ est tangent à la surface $F_1^3$ en l'un des points d'intersection de $s_1$ et $\lambda_1$, auquel correspond le point $sl$; l'autre point d'intersection de $s_1$ et $\lambda_1$ a pour correspondants deux points associés situés sur $s$ et $l$ et la droite $r$ qui les réunit a pour correspondante

une droite double $v_1$ de la surface $F_1^3$. Comme le faisceau de rayons A situé dans $\varphi$ est coupé par les autres droites $l$ du plan $\varphi$ suivant des ponctuelles projectives, il en résulte que :

*Les coniques* $\lambda_1$ *de la surface réglée* $F_1^3$ *sont rapportées projectivement entre elles et à la ponctuelle* $u_1$ *par le moyen de la génératrice* $s_1$ ; *la surface peut donc être engendrée par la forme rectiligne* $u_1$ *et par une conique qui lui est projective.*

Nous avons déjà indiqué précédemment (I, pages 215 et suivantes) ce mode de génération de cette surface du troisième ordre. Aussi nous bornerons-nous à faire ici quelques remarques. Les plans du faisceau $u_1$ accouplent involutivement les génératrices de $F_1^3$ et les points de toutes les coniques situées sur cette surface de telle sorte que deux génératrices ou deux points conjugués sont dans un même plan avec $u_1$ et que les deux génératrices se coupent en un point de la droite double $v_1$. En même temps, les rayons du faisceau A, situé dans $\varphi$, sont accouplés involutivement de telle manière que les rayons conjugués deux à deux passent par deux points associés de $v$. Si la ponctuelle involutive $v$ a deux points doubles M et N, les droites $\overline{AM}$ et $\overline{AN}$ ont pour correspondantes deux *génératrices singulières* de $F_1^3$, et les points M et N deux *points de rebroussement* ou *points cuspidaux*.

La surface $F_1^3$ est tangente à un plan de la surface $\Phi^4$ en tous les points d'une de ces génératrices singulières ; au contraire, les plans tangents aux points d'une autre génératrice quelconque $s_1$ forment un faisceau de plans $s_1$, qui est projectif à la ponctuelle formée par les points de contact. Toute section plane de $F_1^3$ est représentée sur le plan $\varphi$ par une conique, qui passe par A et qui coupe le rayon principal $v$ en deux points associés.

Comme en général la surface $\Phi^4$ est tangente aux génératrices $s_1$ de la surface $F_1^3$ en deux points et aux coniques $\lambda_1$ de cette même surface en quatre points (II, page 256), il s'ensuit que :

*La surface* $F_1^3$ *est tangente à la surface de quatrième classe* $\Phi^4$ *le long d'une courbe gauche (du sixième ordre) qui correspond à la courbe d'intersection du plan* $\varphi$ *et de la surface nodale* $K^4$ *du réseau de* $F^2$.

Si toutes les surfaces du réseau de $F^2$ passent par deux points A et B, et si l'on appelle $c$ la droite qui joint ces deux points, à tous les points de cette droite $c$ correspond un seul et même point $C_1$ de l'espace $\Sigma_1$. Car si $C_1$ correspond à un point quelconque de $c$ différent de A et B, toutes les surfaces du réseau de $F^2$ qui correspondent aux plans

de $\Sigma_1$ menés par $C_1$, passent par la droite $c$. Ces surfaces forment une gerbe particulière de $F^2$ (voir II, page 251). En général, en outre de $c$, elles ont au plus quatre points C communs, qui sont associés entre eux et à tous les points de $c$ et qui correspondent au point $C_1$ de $\Sigma_1$. Les quatre couples de plans, que l'on peut mener par $c$ et par les quatre points C, font partie de cette gerbe particulière de $F^2$ et par conséquent aussi du réseau de $F^2$; ils ont pour correspondants dans $\Sigma_1$ quatre plans tangents singuliers $k_1$ de la surface $\Phi^4$ qui passent par $C_1$ (II, pages 257-258). Les points A et B sont des points coniques de la surface nodale $K^4$ et les centres de deux cônes du réseau, qui passent par $c$ et auxquels correspondent dans $\Sigma_1$ deux plans tangents singuliers $\alpha_1$ et $\beta_1$ de $\Phi^4$ qui passent par $C_1$. La surface nodale $K^4$ passe par $c$, parce que chaque point de $c$ est le sommet d'une surface conique de la gerbe (II, page 251); à toutes ces surfaces coniques correspondent dans $\Sigma_1$ des plans tangents à la surface $\Phi^4$ au point $C_1$. Ce point est donc un point double de $\Phi^4$.

Comme deux droites quelconques du réseau de $F^2$ menées par A ou B sont rapportées projectivement aux droites qui leur correspondent dans $\Sigma_1$, on déduit très facilement de là que :

*A un plan quelconque $\varphi$, mené par la droite $\overline{AB}$ ou* c, *correspond en général dans $\Sigma_1$ une surface réglée $F_1^2$ du second ordre, qui est rapportée à $\varphi$ d'une manière uniforme. Les deux systèmes réglés de $F_1^2$ correspondent aux faisceaux de rayons A et B de $\varphi$ et leur sont projectifs ; à la droite* c *correspondent deux droites de $F_1^2$, passant par $C_1$ et situées dans $\alpha_1$ et $\beta_1$, et une droite quelconque de $\varphi$ a pour correspondante sur $F_1^2$ une conique qui passe par $C_1$.*

Les rayons du faisceau A coupent en effet deux droites quelconques du faisceau B suivant des ponctuelles projectives; les ponctuelles correspondantes de $\Sigma_1$ engendrent le système réglé de $F_1^2$ qui correspond au faisceau A. La surface $F_1^2$, considérée avec les plans $\alpha_1$ et $\beta_1$, peut être regardée comme une surface de Steiner du quatrième ordre; elle est tangente à la surface $\Phi^4$ le long d'une courbe gauche qui correspond à l'intersection de $\varphi$ avec la surface nodale $K^4$.

Le plan $\varphi_1$, tangent à la surface $F_1^2$ au point $C_1$, a pour élément correspondant une surface du réseau, qui n'a qu'une seule droite $c$ commune avec $\varphi$, et qui est par conséquent une surface conique tangente à $\varphi$. Quand $\varphi$ décrit le faisceau de plans $c$, $\varphi_1$ décrit un faisceau de plans du second ordre projectif à $c$; car deux plans quelconques des

gerbes A et B sont coupés par le faisceau de plans $c$ suivant deux faisceaux de rayons perspectifs et, comme A est rapporté collinéairement à $\alpha_1$ et B à $\beta_1$ (II, pages 262-263), ces faisceaux ont pour correspondants dans $\alpha_1$ et $\beta_1$ deux ponctuelles projectives dont les couples de points homologues sont situés sur les plans de ce faisceau du second ordre. Ce dernier faisceau contient en particulier les plans tangents singuliers $\alpha_1$ et $\beta_1$ et les quatre plans $k_1$, qui correspondent aux couples de plans du réseau passant par $c$. De ce que l'on vient de dire et d'une remarque antérieure, il découle que :

*Le point* $C_1$ *de* $\Sigma_1$, *qui correspond à la droite* $\overline{AB}$ *ou* c, *est un point conique de la surface* $\Phi^4$; *en ce point, la surface* $\Phi^4$ *est tangente aux plans d'un faisceau de plans du second ordre, qui contient aussi les plans tangents singuliers* $\alpha_1$, $\beta_1$ *et les quatre plans* $k_1$ *de la surface.*

Nous allons maintenant supposer que toutes les surfaces du réseau de $F^2$ soient circonscrites à un triangle, dans lequel les côtés $a$, $b$, $c$ soient respectivement opposés aux sommets A, B, C. A ces côtés correspondent dans $\Sigma_1$ trois points $A_1$, $B_1$, $C_1$ et le plan $\Delta_1$ qui réunit ces trois derniers points a pour correspondant dans le réseau $F^2$ une surface qui passe par $a$, $b$, $c$ et qui par conséquent se décompose dans le plan $\Delta$ du triangle ABC et en un autre plan. A tout point du plan $\Delta$ correspond un point du plan $\Delta_1$ et réciproquement ; une droite quelconque $l$ de $\Delta$ a pour correspondante dans $\Delta_1$ une conique $\lambda_1$ qui lui est projective et qui passe par $A_1$, $B_1$ et $C_1$. Réciproquement, une droite $g_1$ de $\Delta_1$ a pour correspondante une conique de $\Delta$, qui passe par A, B, C et qui se décompose en $\overline{BC}$ et en une droite $g$ passant par A, quand $g_1$ passe elle-même par $A_1$. Les faisceaux de rayons A de $\Delta$ et $A_1$ de $\Delta_1$ sont rapportés projectivement l'un à l'autre ; ils sont les projections des ponctuelles projectives $l$ et $\lambda_1$, qui se correspondent dans $\Delta$ et $\Delta_1$. D'une manière générale, on voit que :

*Les deux systèmes plans de points* $\Delta$ *et* $\Delta_1$ *sont en correspondance quadratique ; A, B, C sont les trois points principaux de* $\Delta$ *et* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *les points principaux correspondants de* $\Delta_1$.

Il y a encore d'autres cas particuliers [1] du réseau de $F^2$ ; nous en

---

1. Pour ce qui regarde les cas particuliers laissés de côté, voir le mémoire de M. Reye « *Sur les systèmes de rayons de seconde classe et la surface du quatrième ordre de Kummer* » Journal de Crelle, t. LXXXVI.

laissons une partie de côté et nous traitons les autres dans l'appendice; nous allons maintenant nous occuper du cas tout particulièrement intéressant où toutes les surfaces du réseau passent par six points quelconques.

---

# TRENTIÈME LEÇON.

## Le système de rayons de second ordre et de seconde classe et la surface de Kummer, du quatrième ordre à seize points doubles[1].

Nous allons nous servir des résultats trouvés dans les deux dernières leçons pour étudier maintenant la gerbe particulière de $F^2$ dont les surfaces sont circonscrites à un hexagone gauche 123456 ou *hiklmn*.

Comme trois points quelconques déterminent en général une surface du réseau et que, d'autre part, par neuf points quelconques il ne passe généralement qu'une seule surface du second ordre, il s'ensuit que :

*Toute surface du second ordre passant par les six sommets* i *fait partie du réseau de $F^2$.*

La surface nodale $K^4$ renferme les sommets de tous les cônes du second ordre passant par les six sommets de l'hexagone; d'où il résulte que :

*La surface nodale $K^4$ passe par les quinze côtés* $\overline{ik}$ *de l'hexagone et par les dix lignes doubles de ses dix couples de plans opposés* $\overline{\underline{hik}}$, $\overline{\underline{lmn}}$; *elle passe en outre par la courbe gauche* $k^3$ *du troisième ordre que l'on peut circonscrire à l'hexagone.*

Imaginons encore que le réseau de $F^2$ soit rapporté au système de l'espace $\Sigma_1$, comme on l'a indiqué précédemment (II, page 253). Le point (O) de $\Sigma_1$, qui correspond à un point quelconque de la courbe gauche $k^3$,

1. Kummer, *Sur les systèmes algébriques de rayons* (Mémoires de l'Académie de Berlin, classe de mathématiques, 1866).

doit alors correspondre à tous les points de $k^3$, parce que à tout plan $\varphi_1$ de $\Sigma_1$ mené par (O) correspond une surface du réseau qui passe par sept points et conséquemment par tous les points de $k^3$. A tout rayon de $\varphi_1$ mené par O correspond, en outre de $k^3$, une corde de $k^3$ située sur la surface précédente. Donc :

*Les points de la cubique gauche* $k^3$ *sont des points associés du réseau de* $F^2$ *et correspondent tous à un seul et même point (O) de l'espace* $\Sigma_1$. *Le système de cordes de* $k^3$ *est rapporté projectivement à la gerbe (O) et de telle manière que les gerbes collinéaires par lesquelles on projette des points de* $k^3$ *sont réciproques à la gerbe (O).*

Aux tangentes de $k^3$ correspondent par conséquent dans la gerbe (O) les rayons d'une surface conique du second ordre ; et les surfaces coniques de la gerbe, qui passent par $k^3$, ont pour éléments correspondants les plans tangents de la surface conique (O), parce que ces surfaces ne contiennent chacune qu'une seule tangente de $k^3$. Il est clair aussi que les tangentes et les points de $k^3$ sont rapportés projectivement aux rayons et aux plans tangents de la surface conique (O).

Chaque corde de $k^3$ est un rayon principal du réseau de $F^2$ et elle est associée à la courbe gauche $k^3$ (II, page 255) ; ses deux points associés à eux-mêmes, qui sont situés sur la surface nodale $K^4$, sont conjugués par rapport à toutes les surfaces du réseau et conséquemment aussi par rapport à $k^3$. Par suite, la surface nodale $K^4$ sera coupée en quatre points harmoniques par chacune des cordes de $k^3$, et osculée par les tangentes de cette courbe gauche, en sorte que $k^3$ est une *courbe inflexionnelle* ou *courbe de tangentes principales* de $K^4$. D'après cela, le point (O) est un point nodal de la surface $\Phi^4$ de quatrième classe et son cône de tangentes est la surface conique du second ordre (O) mentionnée plus haut. Cette surface $\Phi^4$ a en outre quinze autres points nodaux *(ik)* qui correspondent aux quinze côtés $\overline{ik}$ de l'hexagone (II, page 267).

Toutes les tangentes doubles de la surface $\Phi^4$, qui correspondent aux rayons issus du sommet 1 de l'hexagone, forment un système de rayons I de seconde classe et du second ordre (II, page 263). Ce système contient les génératrices d'un nombre doublement infini de surfaces réglées du troisième ordre et peut être décrit de cinq manières par un système réglé ordinaire, auquel correspond un faisceau de rayons de la gerbe 1 (II, page 267). Sa surface focale $\Phi^4$ est une surface de Kummer de quatrième classe à 16 points doubles (O) et *(ik)*;

elle est rapportée d'une manière uniforme à la surface nodale $K^4$ et elle est aussi la surface focale de cinq autres systèmes de rayons II, III, IV, V, VI, de même espèce, qui correspondent aux gerbes 2, 3, 4, 5, 6.

Ces six systèmes de rayons de deuxième ordre et de deuxième classe ont seize plans singuliers communs ; six de ces plans $(i)$ correspondent aux six cônes du réseau par lesquels on peut projeter la courbe gauche $k^3$ des sommets $i$ (= 1, 2, 3, 4, 5, 6) de l'hexagone ; les dix autres correspondent aux dix couples de plans $\overline{ikl}$, $\overline{mnh}$ de l'hexagone. Par exemple, le couple de plans $\overline{123}$, $\overline{456}$ a pour correspondant le plan singulier (123) qu'on peut aussi désigner par (456), (213), (231), etc.

*Dans le système de rayons I de deuxième ordre et de deuxième classe, chacun des* 16 *plans singuliers contient un faisceau ordinaire de rayons; le centre du faisceau situé dans* (1 kl) *est* (kl) *et celui du faisceau contenu dans* (i) *est* (1 i), *pour* i > 1, *et* (0) *pour* i = 1.

En effet, les rayons de la gerbe 1 qui coupent le côté $\overline{kl}$ de l'hexagone ont pour correspondants tous les rayons du plan $(1kl)$ qui passent par $(kl)$; au côté $\overline{1i}$ de l'hexagone correspondent (II, page 267) tous les rayons du plan $(i)$ qui passent par $(1i)$ et enfin les rayons de la surface conique qui projette la courbe $k^3$ du point 1 ont pour correspondants les rayons du plan (1) qui passent par (0).

*La surface de Kummer* $\Phi^4$ *a seize points doubles* (0) *et* (ik) *et seize plans singuliers* (i) *et* (ikl), *qui sont conjugués les uns aux autres de la manière suivante par le moyen du système de rayons* I :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Points doubles.* | (0) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (23) | (24) | .... | (46) | (56) |
| *Plans singuliers.* | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (123) | (124) | .... | (146) | (156) |

A chaque plan singulier est conjugué le point double par lequel passent tous les rayons du système I situés dans le plan. — Les six plans (1), (2), (3), (4), (5), (6) passent par le point double (0) ; ils forment un angle sexarête, qui est circonscrit à une surface conique du second ordre et qui est rapporté projectivement à l'hexagone 123456 de la courbe gauche $k^3$ (II, page 270), en sorte que :

$$(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ \overline{\wedge}\ k^3\ (123456).$$

Par chacun des quinze autres points doubles $(ik)$ il passe aussi six des seize plans singuliers ; ces six plans sont également tangents à une

surface conique du second ordre (II, pages 266-267) et peuvent être désignés par $(ik1)$, $(ik2)$, $(ik3)$, $(ik4)$, $(ik5)$, $(ik6)$ : $(ikk)$ représentant le plan $(i)$ et $(iki)$ le plan $(k)$. Par exemple, par le point double (12) passent les six plans 2, 1, (123), (124), (125) et (126), parce que les six surfaces du réseau de $F^2$ qui leur correspondent passent par le côté $\overline{12}$ de l'hexagone.

Chacun des seize plans singuliers contient six des seize points doubles ; par exemple, $(i)$ contient les points doubles $(i1)$, $(i2)$, $(i3)$, $(i4)$, $(i5)$, $(i6)$, le point (0) étant représenté par $(ii)$, et les six points doubles (23), (31), (12), (56), (64), (45) sont situés sur le plan $(123) = (456)$, parce que la surface correspondante du réseau de $F^2$ passe par les six lignes correspondantes.

La conique suivant laquelle la surface $\Phi^4$ est tangente au plan singulier (123), ou plus généralement $(ikl)$, passe par les six points doubles situés dans le plan ; elle a en effet pour correspondante la ligne double d'un couple de plans du réseau (II, pages 257-258) et cette dernière coupe les six côtés de l'hexagone qui correspondent aux six points doubles.

*Les* 120 *droites qui joignent les* 16 *points doubles sont identiques avec les* 120 *droites d'intersection des* 16 *plans singuliers.*

En effet, par exemple, (0) et (12) sont tous deux sur (1) et (2) ; (12) et (13) sont situés sur (1) et (123) ; de même (12) et (34) sont sur $(125) = (346)$ et $(126) = (345)$.

La gerbe $i$ est rapportée collinéairement (II, page 253) au système plan $(i)$ quand à chaque rayon de $i$ on fait correspondre le point où $(i)$ est coupé par la droite correspondante de l'espace $\Sigma_1$. Si donc on rapporte les gerbes 1, 2, 3, 4, 5, 6 perspectivement au système de cordes de $k^3$ et par conséquent (II, page 270) réciproquement à la gerbe (0), les plans (1), (2), (3), (4), (5), (6) se trouvent ainsi rapportés réciproquement à (0) et par suite collinéairement entre eux. Et effectivement, chaque rayon du système de rayons 1 est contenu dans le plan de (0) qui correspond au point d'intersection du rayon avec le plan (1), et chaque rayon de (1) qui passe par le point (0) coïncide par conséquent avec le rayon correspondant de la gerbe (0).

Toutes les droites de l'espace $\Sigma_1$, qui sont contenues chacune dans un plan $\varepsilon_1$ de (0) et qui passent en même temps par le point correspondant $E_1$ de (1), forment un complexe linéaire de rayons. En effet, celles d'entre elles qui passent par un point arbitraire $P_2$ forment un faisceau

de rayons du premier ordre, parce qu'elles coupent le plan (1) sur la droite $p'$ qui correspond au rayon $\overline{(O)P_1}$; quand $P_1$ décrit une droite $g_1$, $p'$ décrit un faisceau de rayons projectif à $g_1$, dont un rayon passe par le point qui lui correspond, et le plan $\overline{P_1 p'}$ décrit par conséquent un faisceau de plans du premier ordre perspectif à $g_1$. Tous les rayons du système I de deuxième classe et de deuxième ordre appartiennent au complexe linéaire; par conséquent, dans le système focal, des directrices duquel il se compose, chaque rayon du système I est conjugué à lui-même et chaque point $P_1$ a pour plan focal le plan $\pi_1$ qui réunit les deux rayons du système qui passent par $P_1$. Un point de la surface focale $\Phi^4$, par lequel passent deux rayons coïncidents du système I, a donc toujours pour conjugué un plan de $\Phi^4$ dans lequel sont contenus deux rayons du système qui coïncident (Voir II, pages 256-257). Donc :

*Les six systèmes de rayons du deuxième ordre et de seconde classe* I, II, III, IV, V, VI, *qui correspondent aux six gerbes* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *sont situés dans six complexes linéaires de rayons, différents les uns des autres, et déterminent les six systèmes focaux correspondants*[1]. *La surface focale* $\Phi^4$ *commune aux six systèmes de rayons est conjuguée à elle-même dans chacun de ces systèmes focaux, de telle sorte qu'à chaque point de* $\Phi^4$ *est conjugué un plan qui passe par lui, et que tout point double a pour conjugué un plan singulier. La surface de Kummer* $\Phi^4$ *de quatrième classe est donc aussi du quatrième ordre.*

La corrélation entre les seize points doubles et les seize plans singuliers dans le système focal I est évidente d'après le tableau donné plus haut (II, page 271). Dans le $i^{\text{ème}}$ des six systèmes focaux, le plan $(ikl)$ est conjugué au point double $(kl)$, parce que tous les rayons du $i^{\text{ème}}$ système situés dans $(ikl)$ passent tous par $(kl)$ (Voir II, pages 270-271). Joignons les six points, qui sont conjugués à un plan tangent de $\Phi^4$ dans les six systèmes focaux, avec le point de contact du plan, nous obtenons six tangentes doubles de $\Phi^4$, situées dans le plan; ce plan, en général, n'est pas conjugué à son point de contact.

Le sexarète (1) (2) (3) (4) (5) (6), qui est projectif à l'hexagone 1 2 3 4 5 6 de $k^3$ et circonscrit à une surface conique du second ordre (II, page 272), a pour correspondant ou conjugué dans le $i^{\text{ème}}$ des six

1. C'est M. *Felix Klein* qui a attiré l'attention (*Mathematische Annalen*, t. II, pages 199-226) sur ces six systèmes focaux ou *complexes linéaires fondamentaux*, d'où l'on déduit la majeure partie des théorèmes qui suivent ici.

systèmes focaux l'hexagone $(i1)(i2)(i3)(i4)(i5)(i6)$. Ce dernier est par conséquent inscrit à une conique de telle manière que :

$$(i1)(i2)(i3)(i4)(i5)(i6) \barwedge k^5(123456) \text{ pour } (ii)=(0).$$

Dans le $k^{\text{ème}}$ des six systèmes focaux, cet hexagone est conjugué au sexlatère $(ik1)(ik2)(ik3)(ik4)(ik5)(ik6)$ qui par conséquent est également projectif à $k^5(123456)$. Et comme, en posant par exemple $i=2$, $k=3$, ce sexlatère a pour conjugué dans le premier système polaire l'hexagone (23) (31) (12) (56) (64) (45), ce dernier doit aussi être projectif à $k^5$ (123456). D'une manière générale, on voit que

*Tous les groupes de six plans singuliers, qui passent par un même point double, et tous les groupes de six points doubles, qui sont situés dans un même plan singulier, sont projectifs entre eux et à l'hexagone* 123456 *de* $k^5$. *Les seize points singuliers de la surface de Kummer* $\Phi^4$ *sont situés six à six sur seize coniques, le long desquelles* $\Phi^4$ *est tangente aux seize plans singuliers.*

Comme deux quelconques de ces coniques se coupent en deux points doubles (II, page 272), elles peuvent être réunies par une surface du second ordre avec tout autre point double non situé sur elles; cette surface passe encore par un douzième point double et par quatre des seize coniques. Par exemple, les douze points doubles des quatre coniques (1), (2), (134), (234) sont situés sur une même surface du second ordre ; il en est de même pour ceux des coniques (123), (345), (561) et (246). On démontre aisément ce théorème :

*Il y a quatre-vingts surfaces du second ordre, qui contiennent chacune douze des seize points doubles et quatre des seize coniques de contact; il existe de même quatre-vingts surfaces de deuxième classe tangentes à douze des seize plans singuliers.*

Les deux points, qui sont conjugués à un même plan dans deux quelconques des six systèmes focaux, sont des points homologues de deux espaces collinéaires; ces derniers sont involutifs, parce que les deux points se correspondent entre eux d'une double manière. En effet, par exemple, dans les systèmes focaux I et II, $(1i)$ et $(2i)$ sont conjugués au plan $(i)$ et en même temps $(2i)$ et $(1i)$ au plan $(12i)$; de plus (34) et (56) sont conjugués au plan $(134)=(256)$ et, réciproquement, (56) et (34) sont conjugués au plan $(156)=(234)$.

Les huit couples de points (12) (0), (13) (23), (14) (24), (15) (25),

(16) (26), (34) (56), (35) (46) et (36) (45) se composent donc chacun de deux points conjugués l'un à l'autre d'un système involutif gauche I II, dans lequel toute directrice commune aux deux systèmes focaux I, II est conjuguée à elle-même et dans lequel le plan $(1ik)$ est conjugué au plan $(2ik)$.

Il existe quinze de ces systèmes involutifs que nous pouvons représenter par I II, I III, ..... V VI. Dans chacun d'eux, la surface de Kummer $\Phi^4$ se correspond à elle-même ; et deux points ou deux plans de la surface conjugués l'un à l'autre sont séparés harmoniquement par les deux axes du système. Le système de rayons de premier ordre et de première classe, qui se compose des directrices du système involutif I II est engendré par les plans collinéaires (1) et (2) (Voir II, pages 272-273).

Le tableau suivant fait connaître quel est le point double de $\Phi^4$ qui est conjugué à un plan singulier quelconque dans chacun des six systèmes focaux, ou à un point double quelconque dans chacun des quinze systèmes involutifs.

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (123) | (124) | (125) | (126) | (134) | (135) | (136) | (145) | (146) | (156) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | (0) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (23) | (24) | (25) | (26) | (34) | (35) | (36) | (45) | (46) | (56) |
| II | (12) | (0) | (23) | (24) | (25) | (26) | (13) | (14) | (15) | (16) | (56) | (46) | (45) | (36) | (35) | (34) |
| III | (13) | (23) | (0) | (34) | (35) | (36) | (12) | (56) | (46) | (45) | (14) | (15) | (16) | (26) | (25) | (24) |
| IV | (14) | (24) | (34) | (0) | (45) | (46) | (56) | (12) | (36) | (35) | (13) | (26) | (25) | (15) | (16) | (23) |
| V | (15) | (25) | (35) | (45) | (0) | (56) | (46) | (36) | (12) | (34) | (26) | (13) | (24) | (14) | (23) | (16) |
| VI | (16) | (26) | (36) | (46) | (56) | (0) | (45) | (35) | (34) | (12) | (25) | (24) | (13) | (23) | (14) | (15) |

Par exemple, le plan (136) est conjugué au point double (16) dans le système focal III et au point (24) dans le système V ; ces points (16) et (24) se correspondent au contraire doublement dans le système involutif III V. Ce tableau montre encore quelle est la relation projective de chaque groupe de six points doubles dans deux plans singuliers ; par exemple, dans les plans (1), (123) et (135) on a :

$$(0)\ (12)\ (13)\ (14)\ (15)\ (16)\ \overline{\wedge}\ (23)\ (31)\ (12)\ (56)\ (64)\ (45)$$
$$\overline{\wedge}\ (35)\ (46)\ (51)\ (62)\ (13)\ (24)$$

A l'aide de ce tableau on peut aussi prouver facilement ce théorème dû à M. H. Weber [1] que : à l'aide de six points doubles convenable-

1. Journal de Crelle, t. LXXXIV, page 349. C'est dans une étude sur les fonctions théta que M. Weber a été conduit pour la première fois à la notation ci-dessus pour les points doubles et les plans singuliers d'une surface de Kummer.

ment choisis, comme (12), (23), (34), (45), (51), (0) ou (23), (31), (12), (14), (25), (36), on peut construire linéairement tous les plans singuliers et les dix autres points doubles.

Trois quelconques des six systèmes focaux, par exemple, I, II et III déterminent trois systèmes involutifs II III, III I et I II et de plus un système polaire de l'espace I II III. En effet, si l'on cherche tous les éléments conjugués à un élément quelconque de l'espace dans I et II III, ou dans II et III I, ou dans III et I II, on obtient des éléments homologues de deux espaces réciproques; ces espaces sont en involution et constituent un système polaire I II III de l'espace, parce que, d'après notre tableau, aux sommets des huit tétraèdres

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | (23) | (31) | (12) | . | (0) | (56) | (64) | (45), |
| (23) | (14) | (15) | (16) | . | (56) | (41) | (42) | (43), |
| (31) | (24) | (25) | (26) | , | (64) | (51) | (52) | (53), |
| (12) | (34) | (35) | (36) | , | (45) | (61) | (62) | (63), |

correspondent les faces qui leur sont opposées. Or ces tétraèdres sont des tétraèdres polaires non seulement du système polaire I II III, mais encore du système IV V VI; ce dernier système est donc identique avec le premier I II III. De même I II IV et III V VI sont deux systèmes polaires identiques; on obtient huit tétraèdres polaires de ce système en permutant entre eux les nombres 3 et 4 dans les expressions données ci-dessus pour les tétraèdres. Les six systèmes focaux, pris trois à trois, déterminent en général dix systèmes polaires différents; dans chacun d'eux la surface de Kummer $\Phi^4$ est conjuguée à elle-même, ses seize points doubles sont les pôles de ses seize plans singuliers et forment quatre à quatre huit tétraèdres polaires.

Par rapport aux trois systèmes focaux I, II et III les points et les plans de l'espace se groupent en tétraèdres polaires d'un système polaire de l'espace I II III = IV V VI; chaque sommet d'un pareil tétraèdre a pour conjugués dans les systèmes involutifs II III, III I et I II les trois autres sommets et dans les trois systèmes focaux les faces du tétraèdre qui passent par lui; il en est de même pour chaque face du tétraèdre. Les points et les plans se groupent, par rapport aux trois systèmes focaux IV, V, VI pour former *d'autres* tétraèdres polaires du même système polaire. Deux tétraèdres, appartenant à ces deux groupements différents et ayant une face commune, ont aussi le sommet

opposé commun et les six autres sommets conjugués à cette face dans les six systèmes focaux constituent deux triangles polaires d'un système polaire plan contenu dans I II III ; ils sont donc situés sur une même conique (II, page 74). Par conséquent, dans les six systèmes focaux, un plan quelconque a pour conjugués six points d'une conique et un point quelconque six plans passant par lui et appartenant à un faisceau de plans du second ordre.

Un point quelconque de l'espace constitue, avec les quinze points qui lui sont conjugués dans les quinze systèmes involutifs, un groupe de seize points, analogue à celui des seize points doubles de la surface de Kummer. En effet, les seize points de ce groupe sont situés six à six sur seize plans (ou mieux sur seize coniques) qui à leur tour passent six à six par les seize points. D'après ce qui précède, chacun des seize points a pour conjugués, dans les six systèmes focaux, les six plans qui passent par lui, et chacun des seize plans les six points qui sont situés sur lui. Chacun des seize points a pour conjugués, dans les dix systèmes polaires, les dix plans qui ne passent pas par lui, et chacun des seize plans les dix points qui ne sont pas situés sur lui ; enfin dans les quinze systèmes involutifs, à chacun des seize points (ou plans) est conjugué le groupe des quinze autres. Remarquons en passant que les seize points sont les points doubles d'une surface de Kummer du quatrième ordre, déterminée par eux, qui, de même que $\Phi^4$, est conjuguée à elle-même dans chacun des six systèmes focaux ; avec $\Phi^4$ se trouve déterminé ainsi un nombre triplement infini d'autres surfaces de Kummer.

La surface double du système polaire I II III contient tous les rayons qui sont conjugués à eux-mêmes dans les trois systèmes focaux I, II et III et par suite aussi les trois couples d'axes des systèmes involutifs II III, III I et I II ; car ces axes sont des directrices du système réglé formé par ces rayons. De même, la surface double contient toutes les directrices communes des systèmes focaux IV, V et VI. Ces directrices constituent le système directeur du premier système réglé ; car si elles formaient elles-mêmes le même système réglé, il existerait une infinité de rayons conjugués à eux-mêmes dans les six systèmes focaux et les dix systèmes polaires déterminés par les systèmes focaux devraient avoir des surfaces doubles identiques, tandis qu'elles sont différentes les unes des autres. Les deux axes de II III sont donc conjugués à eux-mêmes dans chacun des systèmes focaux IV, V, VI (et I) et coupent les couples d'axes des six systèmes involutifs IV V, IV VI, ..... VI I. Les

couples d'axes de trois systèmes involutifs quelconques qui (comme I II, III IV, et V VI) dépendent simultanément des six systèmes focaux, constituent d'après cela les trois couples de côtés opposés d'un même tétraèdre. Du reste, l'un ou chacun des trois systèmes II III, III I et I II a deux axes imaginaires, parce que la surface double du système polaire I II III, quand elle est réelle et réglée, n'est coupée en des points réels que par deux couples d'arêtes de son tétraèdre polaire.

Le réseau de $F^2$, par lequel nous avons été conduits à la surface de Kummer $\Phi^4$, est déterminé par quatre surfaces du second ordre, dont trois quelconques passent par une même cubique gauche $k^3$ ; cette courbe est coupée par la quatrième aux six points 1,2,3,4,5,6. Suivant que parmi ces points d'intersection il n'y en aura pas de réels, ou bien qu'il y en aura deux, quatre ou six, les six systèmes de rayons de second ordre et de deuxième classe relatifs à la surface de Kummer ne seront pas réels, ou bien il y en aura respectivement deux, quatre ou six de réels. De ces quatre cas, entre lesquels se produisent un certain nombre de cas transitoires et de dégénérescences géométriquement évidents, c'est le dernier qui a servi de base aux recherches de cette leçon.

---

# APPENDICE.

## PROBLÈMES ET THÉORÈMES.

### COLLINÉATION ET RÉCIPROCITÉ.

1. On donne deux quadrilatères qui se correspondent dans deux systèmes plans collinéaires ou réciproques. Construire dans l'un des systèmes le point (ou le rayon) qui correspond à un point de l'autre et de même déterminer le rayon du premier qui correspond à un rayon ou à un point du second (II, pages 6 et 8).

2. Deux systèmes collinéaires sont dans un même plan et perspectifs (II, page 20). On donne le centre et l'axe de collinéation et deux points ou deux rayons correspondants. Construire la courbe de l'un des systèmes qui correspond à une courbe de l'autre et de plus chercher l'axe opposé du premier système qui correspond à la droite à l'infini dans le second.

3. Si deux systèmes collinéaires plans ont une ponctuelle $u$ correspondante commune et si l'un d'eux tourne autour de la droite $u$, le point où se coupent les droites joignant les points homologues des systèmes décrit un cercle, dont le centre est situé dans l'autre système et correspond à un point à l'infini du premier système mobile, et dont le plan est perpendiculaire à $u$.

4. Quand un objet est recouvert d'un fluide translucide, par exemple d'eau, il apparaît, à cause de la réfraction de la lumière, différent de ce qu'il est dans l'air libre. Comme toute droite continue à paraître droite sous le fluide, que des parallèles paraissent toujours parallèles, l'objet semble s'être changé en un autre objet collinéaire ou, plus exactement, en affinité avec lui (II, page 63). De même, les objets situés hors de l'eau apparaissent à un poisson comme s'ils étaient transformés

par affinité ; ainsi une sphère paraît un ellipsoïde, un dé un parallélipipède oblique.

5. Si deux systèmes réciproques plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont tellement placés qu'une forme rectiligne $u$ de $\Sigma$ soit perspective au faisceau correspondant de $\Sigma_1$, cette même forme $u$, considérée comme faisant partie de $\Sigma_1$, est aussi perspective au faisceau correspondant de $\Sigma$. Si donc les deux systèmes ne sont pas dans un même plan, tout plan, qui joint un point de l'un avec la droite correspondante de l'autre, passe par le centre de l'un de ces deux faisceaux de rayons perspectifs à $u$ et par conséquent les deux systèmes engendrent deux gerbes.

6. Lorsque deux systèmes réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont situés dans un même plan et de telle manière qu'une forme rectiligne quelconque $u$ de $\Sigma$ soit perspective au faisceau correspondant de rayons $U_1$ de $\Sigma_1$, il existe encore en général une seconde forme rectiligne $v$ de $\Sigma$ qui est perspective au faisceau correspondant $V_1$ de $\Sigma_1$. Si maintenant nous considérons ces mêmes formes rectilignes $u$ et $v$ comme faisant partie du second système $\Sigma_1$, elles ont respectivement pour formes correspondantes dans le premier système $\Sigma$ les faisceaux de rayons $V_1$ et $U_1$ et $u$ est perspective à $V_1$ et $v$ à $U_1$. Le point $uv$ est situé sur la droite $\overline{U_1V_1}$ et lui correspond d'une double manière. Cette situation particulière de deux systèmes réciproques peut être mise à profit pour construire d'une manière simple dans l'un des systèmes la forme réciproque à une forme quelconque de l'autre, par exemple, à une courbe. Dans des cas particuliers, les droites $u$ et $v$ peuvent se confondre de même que les points $U_1$ et $V_1$ ; à chaque point de $u$ correspond alors doublement un rayon de $U_1$.

7. Le plus grand nombre de points d'inflexion que puisse posséder une courbe plane d'ordre $n$ est égal au plus grand nombre de points de rebroussement d'une courbe plane de classe $n$.

8. Énoncer et résoudre pour les systèmes collinéaires ou réciproques de l'espace les problèmes analogues aux problèmes 1 et 2 (II, pages 24 et 30).

9. Si deux espaces collinéaires $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ne sont pas alliés, le plan à l'infini dans l'un a toujours pour correspondant un plan propre de l'autre système (ce qu'on appelle le *plan opposé*). Deux systèmes plans homologues de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ne sont alors alliés (II, page 32) que si leurs plans sont respectivement parallèles aux plans opposés ; de même une ponctuelle $u$ de $\Sigma$ n'a pour correspondante une ponctuelle projective semblable $u_1$ de $\Sigma_1$ que si $u$ est parallèle au plan opposé de $\Sigma$ et $u_1$ à

celui de $\Sigma_1$. Aux droites perpendiculaires au plan opposé de $\Sigma$ correspondent dans $\Sigma_1$ les rayons d'une gerbe dont le centre est sur le plan opposé de $\Sigma_1$. Les deux systèmes de l'espace ne renferment donc que deux droites correspondantes $n$ et $n_1$ dont chacune soit perpendiculaire au plan opposé de son propre système.

Un cylindre de révolution de $\Sigma$, ayant la droite $n$ pour axe, a pour correspondant dans $\Sigma_1$ un cône du second ordre, qui a $n_1$ pour axe principal et qui engendre une courbe d'intersection avec le cylindre si les droites $n$ et $n_1$ sont placées l'une sur l'autre. Toute ponctuelle $v_1$ de $\Sigma_1$, dont le lieu contient un point de cette courbe et qui coupe normalement l'axe $n_1$, a pour correspondante dans $\Sigma$ une ponctuelle $v$ projective égale; il en est de même pour toute ponctuelle dont le lieu est parallèle à $v_1$ et qui est à la même distance que $v_1$ du plan opposé du système $\Sigma_1$. On reconnaît par là que deux systèmes plans alliés ne contiennent pas toujours de ponctuelles homologues projectives égales et que par conséquent ils ne peuvent pas toujours être amenés en situation perspective.

---

## SURFACES DU SECOND ORDRE; SYSTÈMES POLAIRES.

10. Deux gerbes sont rapportées réciproquement l'une à l'autre; déterminer les points communs à la surface du second degré, qu'elles engendrent, et à une droite ou à un plan donné. Ce problème est du second degré; il en est de même du suivant :

11. Chercher si deux gerbes réciproques données engendrent un ellipsoïde, un paraboloïde, un hyperboloïde ou une surface conique du second ordre.

12. Une droite $g$ et un point $G_1$ se meuvent simultanément dans deux plans fixes de telle manière qu'ils soient toujours vus sous un angle droit d'un point donné S situé en dehors de ces plans, et par conséquent que $\overline{Sg}$ soit perpendiculaire à $\overline{SG_1}$. Le plan $\overline{gG_1}$ enveloppe alors une surface du second ordre (II, pages 35 et 45).

13. Une gerbe S et un système plan sont rapportés réciproquement l'un à l'autre; par chaque droite de $\Sigma$ on mène un plan parallèle au rayon correspondant de S et par chaque point de $\Sigma$ un plan parallèle au plan correspondant de S; tous ces plans enveloppent un paraboloïde qui est aussi tangent à $\Sigma$.

14. Une gerbe S et un système plan $\Sigma$ sont rapportés collinéairement entre eux ; par chaque point ou chaque rayon de $\Sigma$ on mène un plan perpendiculaire à la droite ou au plan correspondant de S ; tous ces plans enveloppent (comme dans 13) un paraboloïde qui est aussi tangent à $\Sigma$.

15. Deux gerbes collinéaires renferment en général une infinité de couples de plans homologues qui se coupent normalement ; ces plans forment deux faisceaux de plans du second ordre. En effet, si du centre S de l'une, on abaisse des perpendiculaires sur les plans de l'autre, S devient le centre de deux gerbes réciproques ; et tous les plans de S, passant par les normales qui leur correspondent, constituent l'un de ces faisceaux de plans du second ordre (II, page 71).

16. Un hexagone gauche ABCDEF détermine un système polaire de l'espace dans lequel chaque sommet de l'hexagone a pour correspondant la face qui lui est opposée. En effet, si l'on rapporte deux espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ réciproquement l'un à l'autre de telle sorte qu'aux points A,B,C, D,E de $\Sigma$ correspondent respectivement les plans CDE, DEF, EFA, FAB, ABC de $\Sigma_1$, aux points A,E et F de $\Sigma_1$ correspondent respectivement les plans CDE, ABC et BCD de $\Sigma$ et les droites AB et DE se correspondent l'une à l'autre d'une double manière. Les plans ABC, ABE, CDE et DEA forment par conséquent un tétraèdre dans lequel chaque face correspond doublement au sommet opposé et les deux systèmes réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont en involution.

17. Déterminer les points de contact de toutes les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque à une surface donnée du second ordre (II, page 42).

18. Par une droite quelconque mener des plans tangents à une surface donnée du second ordre.

19. On donne une conique sur une surface du second ordre ; déterminer le point d'intersection des plans tangents à la surface aux points de cette conique.

20. Les normales d'une surface du second ordre, qui lui sont perpendiculaires suivant les points d'une courbe du second ordre, sont parallèles aux rayons d'une surface conique du second ordre. Quelle exception subit le théorème, quand le plan de la courbe pied des normales est un plan diamétral de la surface du second ordre ?

21. Étant donnés une surface $F^2$ du second ordre et un point fixe quelconque U, on peut rapporter deux à deux l'un à l'autre les points de

l'espace qui sont conjugués par rapport à la surface $F^2$ et situés sur une même droite avec U. Tous les points d'un plan quelconque $\varphi$ qui ne passe pas par U ont alors pour correspondants les points d'une surface $F_1^2$ du second ordre. Cette surface $F_1^2$ contient le point U et le pôle du plan $\varphi$ et elle n'a en commun avec la surface $F^2$ que les points de celle-ci qui sont contenus dans le plan $\varphi$ ou le plan polaire de U. (Voir I, page 105.) Si le plan $\varphi$ passe à l'infini, on voit que :

22. Les points milieux de toutes les cordes que l'on peut mener d'un point quelconque U à une surface $F^2$ du second ordre, sont situés sur une surface $F_1^2$ du second ordre. Cette seconde surface passe par U et le centre de la surface $F^2$ et elle a en commun avec $F^2$ tous ses points à l'infini ainsi que les points de contact de toutes les tangentes que l'on peut mener de U à $F^2$. La surface $F_1^2$ contient aussi les centres de toutes les courbes du second ordre suivant lesquelles des plans passant par U coupent la surface $F^2$.

23. Comment s'énonce le théorème réciproque de celui du n° 21 ?

24. Couper une surface du second ordre par un plan de manière que la conique qui en résulte ait pour centre un point donné.

25. Les plans de toutes les coniques situées sur une surface donnée du second ordre, et dont les centres sont sur une droite donnée, enveloppent un cylindre parabolique. Quelles exceptions ce théorème peut-il présenter ?

26. Le volume d'un tétraèdre dont deux couples de côtés opposés sont situés sur un paraboloïde hyperbolique est divisé en deux solides équivalents par cette surface. En effet, tout plan parallèle à deux des côtés opposés coupe le tétraèdre suivant un parallélogramme dont une diagonale est située sur le paraboloïde.

27. Les sommets de tous les cônes circonscrits à un ellipsoïde, qui déterminent avec leur plan de contact un solide de volume donné, sont situés sur un ellipsoïde semblable, concentrique et semblablement placé. La démonstration de ce théorème, comme celle du précédent, s'obtient immédiatement en alliant l'ellipsoïde à une sphère.

28. Le plus petit ellipsoïde qu'on puisse circonscrire à un tétraèdre est tangent, suivant les sommets de ce dernier, à quatre plans parallèles aux faces opposées du tétraèdre.

29. Deux systèmes plans réciproques $\Sigma$ et $\Sigma_1$ peuvent en général être amenés en situation involutive de quatre manières différentes.

Désignons par C et $C_1$ les *centres* de $\Sigma$ et $\Sigma_1$ qui correspondent aux

droites à l'infini des deux systèmes ; ces points en général ne sont pas à l'infini. Au faisceau de rayons C de $\Sigma$ correspond la ponctuelle à l'infini de $\Sigma_1$ et si nous la projetons de $C_1$, nous obtenons un faisceau de rayons projectif à C. Soient maintenant $a,b$ les deux rayons normaux entre eux du faisceau C, auxquels correspondent dans $C_1$ deux rayons $a_1$, $b_1$, normaux entre eux (I, page 198) ; on peut amener les systèmes réciproques en situation involutive en plaçant simultanément $a$ sur $b_1$ et $b$ sur $a_1$. En effet, dans cette situation, aux côtés du triangle impropre de $\Sigma$ formé par $a,b$ et la droite à l'infini correspondent les sommets qui leur sont opposés. (Voir II, page 72.) Si les deux centres $C,C_1$ sont à l'infini, le problème n'a généralement pas de solution.

50. *Placer en situation involutive deux gerbes réciproques* $S,S_1$ *dont les sommets ne sont pas à l'infini.*

Nous avons à chercher dans les gerbes réciproques deux trièdres homologues, par exemple, deux trièdres trirectangles, que l'on puisse superposer de telle sorte que chaque arête de l'un soit opposée à la face qui lui correspond dans l'autre. A cet effet, à chaque rayon de la gerbe S faisons correspondre le plan qui lui est normal, de manière que S devienne une gerbe polaire rectangulaire. En même temps, à chaque plan de $S_1$ correspondra par là même un rayon, de telle sorte que $S_1$ deviendra aussi une gerbe polaire ; et deux rayons ou deux plans conjugués de $S_1$ auront respectivement pour correspondants deux plans ou deux rayons rectangulaires de S. La gerbe polaire $S_1$ a en général trois axes principaux $a_1,b_1,c_1$ perpendiculaires entre eux ; comme ils sont conjugués deux à deux, ils ont pour correspondants dans la gerbe S trois plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ normaux entre eux. Si maintenant on place les deux gerbes l'une sur l'autre, de telle manière que $a_1$ coïncide avec $\overline{\beta\gamma}$ et $b_1$ avec $\overline{\gamma\alpha}$, ce qui est possible de quatre manières, on obtient l'involution demandée. Ainsi le problème comporte en général quatre solutions ; il n'en a une infinité que si la gerbe $S_1$ a une infinité d'axes principaux.

51. *Placer deux systèmes réciproques de l'espace,* $\Sigma$ *et* $\Sigma_1$, *en situation involutive.* Soient C et $C_1$ les *centres* de $\Sigma$ et $\Sigma_1$, c'est-à-dire les points qui correspondent aux plans à l'infini des deux systèmes. Si ces centres sont eux-mêmes à l'infini, le problème n'a en général aucune solution. Supposons que C et $C_1$ soient des points propres ; aux plans et aux rayons issus de C correspondent les points et les droites à l'infini de $\Sigma_1$, et si on les projette de $C_1$, les gerbes C et $C_1$ sont rapportées réciproquement l'une à l'autre. Si maintenant on amène ces gerbes en

situation involutive, les espaces réciproques eux-mêmes seront placés en situation involutive. Ce problème, comme le précédent, a donc en général quatre solutions.

52. *Sur une surface donnée du second ordre construire une conique de telle manière qu'elle ait pour foyer un point S arbitrairement choisi.*

Pour que le problème admette une solution, il faut que S ne soit pas sur la surface. Dans le système polaire plan dont la courbe double est la conique cherchée, les rayons conjugués de la gerbe S doivent être rectangulaires deux à deux. Dans la gerbe polaire S, dont les éléments conjugués deux à deux sont conjugués par rapport à la surface construisons les plans cycliques (I, page 192); ils ont chacun en commun avec la surface une conique réelle ou imaginaire, dont S est le foyer. Ce problème a donc en général deux solutions.

Si la surface donnée du second ordre est un cône, nous pouvons résoudre le problème comme il suit. Joignons le point S avec le sommet du cône par une droite $u$; les plans du faisceau $u$ sont alors conjugués deux à deux par rapport à la surface. Le plan $\varepsilon$ de la conique cherchée doit passer par S et couper le faisceau involutif de plans $u$ suivant un faisceau rectangulaire de rayons. Il n'existera pas de pareil plan, ou il y en aura deux, suivant que le faisceau de plans $u$ aura ou n'aura pas de plans doubles et par conséquent suivant que S sera à l'extérieur ou à l'intérieur du cône. Dans le dernier cas, les deux plans $\varepsilon$ sont faciles à construire si l'on remarque qu'ils doivent être perpendiculaires à l'un des deux plans conjugués rectangulaires du faisceau $u$. Ils sont symétriques par rapport à la droite $u$ et coïncident quand le faisceau de plans $u$ est rectangulaire.

53. *Une surface du second ordre, à centre, est coupée suivant des cercles par deux faisceaux de plans parallèles.* En effet, ces plans de sections circulaires sont parallèles aux deux plans diamétraux cycliques de la surface, dans lesquels les diamètres conjugués sont perpendiculaires deux à deux. On peut aussi démontrer un théorème semblable pour le paraboloïde elliptique. Les surfaces de révolution du second ordre n'ont qu'un seul système de cercles, dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de révolution.

54. *Mettre en perspective deux gerbes collinéaires S, $S_1$.* Deux gerbes perspectives ont un faisceau de plans correspondant commun; d'après cela, nous chercherons dans les gerbes données S, $S_1$ deux fais-

ceaux de plans homologues qui soient projectivement égaux. A cet effet, (comme au n° 30) à chaque rayon faisons correspondre dans la gerbe S le plan qui lui est normal, de manière que S devienne une gerbe polaire rectangulaire et en même temps $S_1$ une gerbe polaire : puis, dans la gerbe $S_1$, déterminons les deux axes focaux $u_1, v_1$. Deux plans du faisceau $u_1$ (ou $v_1$) perpendiculaires entre eux, sont alors conjugués dans la gerbe polaire $S_1$ et ils ont par conséquent pour correspondants deux plans conjugués (c'est-à-dire perpendiculaires entre eux) de la gerbe rectangulaire S. Soient donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre plans harmoniques de $u$ et supposons que $\alpha$ soit normal à $\gamma$ de même que $\beta$ à $\delta$; ils ont pour correspondants dans la gerbe $S_1$ quatre plans $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ du faisceau $u_1$ en sorte que $\alpha_1$ est normal à $\gamma_1$ et $\beta_1$ à $\delta_1$. Les faisceaux homologues de plans $u$ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ et $u_1$ $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1\delta_1)$ sont par conséquent projectifs égaux et peuvent être placés l'un sur l'autre de telle manière que les quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coïncident avec leurs correspondants $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$. Or, dans cette situation, les gerbes collinéaires S et $S_1$ sont perspectives et sont les projections d'un seul et même système plan. Le problème a quatre solutions, chacun des deux axes focaux $u_1$, $v_1$ en donnant deux.

35. *Si le sommet S d'une gerbe polaire est situé sur une surface $F^2$ du second ordre, le plan qui réunit trois points A, B, C de $F^2$, projetés de S suivant trois rayons conjugués de la gerbe polaire, passe par un point fixe*[1]. Pour un rayon donné SA, on peut construire une infinité de couples de rayons $\overline{SB}$ et $\overline{SC}$ qui soient non seulement conjugués à $\overline{SA}$ dans la gerbe polaire, mais encore conjugués entre eux. Ces couples de rayons sont situés dans le plan polaire de $\overline{SA}$ et forment un faisceau involutif de rayons ; ils coupent la surface $F^2$ suivant deux points conjugués B, C d'une conique involutive; par conséquent la droite $\overline{BC}$ qui réunit ces points passe par un seul et même point $A_1$, et le plan $\overline{ABC}$ par une droite $\overline{AA_1}$. Laissons fixe l'un $\overline{SB}$ des rayons conjugués à $\overline{SA}$ et changeons maintenant la position des points A et C; le plan $\overline{ABC}$ tourne autour d'une droite $\overline{BB_1}$ que l'on peut trouver comme on vient de le faire pour $\overline{AA_1}$; cette droite $\overline{BB_1}$ est située comme $\overline{AA_1}$ dans le plan $\overline{ABC}$ choisi primitivement et par conséquent coupe $\overline{AA_1}$. Je dis que chacune de ces droites $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$ est aussi rencontrée par le rayon $l$

---

1. La démonstration suivante de ce théorème de Steiner a été donnée par M. Schröter (*Journal de Crelle*, t. LXIV, page 70).

de la gerbe S, dont le plan polaire est tangent à la surface $F^2$ au point S. Car si, par exemple, nous laissons A fixe et si nous prenons le point B dans le plan $\overline{At}$, $\overline{SC}$ se trouve lui-même dans le plan tangent et le point C coïncide avec S; le plan $\overline{ABC}$ dans lequel se trouve aussi $\overline{AA_1}$ se confond donc avec $\overline{At}$, c'est-à-dire que $\overline{AA_1}$ et $t$ sont contenus dans un même plan. Soient maintenant A et A' deux points absolument arbitraires de la surface $F^2$ et soit $\overline{SB}$ le rayon de la gerbe polaire S, qui a le plan $\overline{SAA'}$ pour plan polaire; soit de plus $\overline{A'A'_1}$ la droite issue du point A' analogue à $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$. $\overline{AA_1}$ et $\overline{A'A'_1}$ doivent couper chacune des droites $\overline{BB_1}$ et $t$; et comme ces dernières sont situées dans un plan qui, en général, ne passe par les points A et A' arbitrairement choisis, il faut que $\overline{AA_1}$ et $\overline{A'A'_1}$ aient pour point commun le point d'intersection de $\overline{BB_1}$ et de $t$. Le plan $\overline{ABC}$ passe donc toujours par un point déterminé, situé sur $t$ et qui ne change pas de position, quand on remplace le point A primitivement choisi par un autre point A' de la surface du second ordre. Comment s'énonce la proposition réciproque?

56. Soit S un point quelconque d'une surface du second ordre, le point qui réunit trois points de $F^2$ projetés de S suivant un trièdre trirectangle, passe par un point fixe. Ce point est situé sur la normale menée en S à la surface $F^2$ (théorème 55).

57. Les points, où trois plans tangents d'un paraboloïde se coupent rectangulairement, sont situés dans un même plan (ce théorème se déduit de la réciproque du n° 55).

58. On donne deux surfaces du second ordre $F^2$ et $F_1^2$ qui sont ou toutes les deux réglées ou toutes les deux non réglées et qui ne sont pas des cônes. On demande de les rapporter collinéairement l'une à l'autre de manière que trois points quelconques A,B,C de $F^2$ aient pour correspondants trois points $A_1,B_1,C_1$ arbitrairement choisis sur $F_1^2$. Nous supposons que ni A,B,C ni $A_1,B_1,C_1$ ne sont sur une même droite. Pour résoudre le problème, nous devons rapporter les plans ABC et $A_1B_1C_1$ collinéairement l'un à l'autre de manière que les deux courbes du second ordre suivant lesquelles ils coupent $F^2$ et $F_1^2$ se correspondent l'une à l'autre et qu'en même temps $A_1,B_1,C_1$ correspondent à A,B,C (II, page 11). De plus, nous pouvons et devons faire correspondre deux points D,E de $F^2$ dont les plans tangents se coupent suivant une droite quelconque du plan $\overline{ABC}$ aux deux points $D_1,E_1$ de $F_1^2$ dont les plans tangents passent par la droite correspondante du plan $\overline{A_1B_1C_1}$. Si nous

rapportons deux espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ collinéairement l'un à l'autre, de manière qu'aux points A,B,C,D,E de $\Sigma$ correspondent les points $A_1,B_1,C_1,D_1,E_1$ de $\Sigma_1$, les surfaces $F^2$ et $F_1{}^2$ sont des surfaces homologues de ces espaces : car à la surface $F^2$ correspond une surface qui a en commun avec $F_1{}^2$ non seulement la conique de $F_1{}^2$ qui passe par $A_1,B_1,C_1$ mais encore toutes celles de $F_1{}^2$ qui passent par $D_1$ et $E_1$. Comme on peut échanger $D_1$ et $E_1$ entre eux, le problème a deux solutions. Une même surface du second ordre peut être rapportée collinéairement à elle-même d'une infinité de manières.

---

## COURBES GAUCHES DU TROISIÈME ORDRE ET CORRESPONDANCE GÉOMÉTRIQUE DU SECOND DEGRÉ.

39. Un quadrilatère gauche variable se meut de telle manière que ses quatre côtés $a,a_1,a_2,a_3$ pivotent respectivement autour des points fixes $S,S_1,S_2,S_3$ tandis que trois de ses sommets $aa_1,a_1a_2,a_2a_3$ se déplacent sur les plans fixes $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. Le quatrième sommet $aa_3$ décrit alors une courbe gauche du troisième ordre passant par S et $S_3$ (II, page 99); les trois premiers sommets décrivent trois coniques et ces quatre courbes passent par le point d'intersection des trois plans $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. Il n'y a d'exceptions à ce théorème que quand les quatre points $S,S_1,S_2,S_3$ sont situés dans un même plan, ou quand les trois plans $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ se coupent suivant une même droite. Comment s'énonce le théorème analogue pour un polygone à $n$ sommets, variable dans l'espace?

40. Trois faisceaux de plans $u,u_1,u_2$ sont rapportés entre eux de telle manière que tout plan de $u$ est perpendiculaire aux deux plans correspondants de $u_1$ et $u_2$. Les points d'intersection des plans homologues des faisceaux trois à trois sont situés sur une courbe gauche du troisième ordre, dont les axes $u,u_1,u_2$ sont trois cordes (II, page 103). Quelle est l'exception qui se produit quand l'axe $u$ fait un angle droit avec la direction de l'axe $u_1$ (ou $u_2$)?

41. Il y a au plus trois points d'où trois droites quelconques $u,u_1,u_2$ soient projetées suivant trois plans perpendiculaires entre eux.

42. Une forme rectiligne $u$ et un faisceau de plans $u_1$ sont rapportés projectivement entre eux, mais leurs lieux ne sont pas perpendiculaires. Si de chaque point de $u$ on abaisse une perpendiculaire sur

le plan correspondant de $u_1$, les pieds de toutes ces perpendiculaires sont situés sur une courbe gauche du troisième ordre, dont les droites $u$ et $u_1$ sont des cordes (II, pages 103-104). On peut aussi trouver facilement pour cette courbe une corde impropre, située à l'infini ; la courbe est donc une ellipse gauche.

43. Si les deux côtés d'un angle variable glissent le long de deux droites fixes, mais ne se rencontrant pas, et si en même temps

son plan tourne autour d'une droite fixe, son sommet décrit une courbe du troisième ordre dont les cinq droites données sont des cordes (II, pages 102-103).

son sommet parcourt une droite fixe, son plan décrit un faisceau de plans du troisième ordre, dont les cinq droites données sont des axes.

La cinquième droite ne doit rencontrer aucune des trois premières et celles-ci ne doivent pas être situées sur un même système réglé.

44. Construire, au moyen de gerbes collinéaires, une courbe gauche du troisième ordre dont on donne :

1° Deux points et quatre cordes ;

2° Trois points et trois cordes ;

3° Cinq points et une corde.

45. En considérant une courbe gauche du troisième ordre comme l'intersection de deux surfaces coniques du second ordre, la construire connaissant :

1° Six points.

2° Cinq points et la tangente en l'un d'eux,

3° Quatre points et les tangentes à deux d'entre eux,

4° Trois points et leurs tangentes.

5° Trois points et les tangentes et les plans osculateurs à deux d'entre eux.

46. En considérant une courbe gauche du troisième ordre comme engendrée par trois faisceaux projectifs de plans du premier ordre, la construire connaissant :

1° Trois points et trois cordes,

2° Trois points, la tangente et le plan osculateur à l'un d'eux et deux cordes.

47. Pour des positions particulières des éléments donnés, les trois derniers problèmes (44 à 46) donnent lieu à des exceptions ou

deviennent indéterminés. Par exemple, si l'on donne deux points et quatre cordes d'une courbe gauche du troisième ordre, la courbe dégénère, quand l'une des quatre cordes rencontre les trois autres ou coupe la droite qui joint les deux points. La construction de la courbe est impossible ou indéterminée, quand par les deux points donnés on peut mener une droite qui coupe les trois cordes. Indiquer les cas d'exception des problèmes depuis 44 jusqu'à 46.

48. Énoncer et résoudre pour le faisceau de plans du troisième ordre les réciproques des problèmes de 44 à 46.

49. Une courbe gauche du troisième ordre est projetée de tout point P qui lui est extérieur suivant une surface conique du troisième ordre qui a pour *rayon double* propre ou impropre la corde qui passe par P. Les tangentes de cette courbe gauche forment une surface du quatrième ordre (II, page 127); par conséquent cette surface conique est de quatrième classe. Tout plan osculateur de la courbe passant par P est un plan tangent stationnaire de la surface conique du troisième ordre. Il en existe au moins un et au plus trois; dans ce dernier cas, les trois *rayons d'inflexion* de la surface sont contenus dans un même plan (II, pages 112, 113). Si le point P est situé sur une tangente à la courbe gauche du troisième ordre, la surface a un *rayon de rebroussement* suivant cette tangente.

50. Deux triangles inscrits à une courbe gauche $k^3$ du troisième ordre sont projetés d'un point quelconque de $k^3$ suivant deux trièdres, inscrits à une même surface conique du second ordre et par conséquent (I, pages 151, 152) circonscrits à une autre surface conique du second ordre. Il suit de là que : Une cubique gauche et un tétraèdre qui lui est inscrit sont coupés par un plan quelconque suivant un triangle et un quadrilatère circonscrits à une courbe du second ordre.

51. Si un heptagone simple 1234567 est inscrit à une cubique gauche, ses côtés coupent les faces qui leur sont opposées suivant les sommets d'un autre heptagone simple qui est en même temps circonscrit et inscrit au premier. Par exemple, les côtés 23, 34, 45 coupent respectivement les faces 567, 671, 712 en trois points situés dans un même plan avec 7. On le reconnaît immédiatement, quand on projette de 7 l'hexagone 123456 suivant un angle sexarête (de Pascal).

52. L'axe principal du système focal déterminé par une courbe gauche du troisième ordre peut être appelé l'*axe principal de cette courbe gauche*. Si l'on imprime à la courbe gauche une translation sui-

vant la direction de cet axe principal ou une rotation autour de lui, le système focal qu'elle détermine ne change pas. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque P de la courbe gauche sur l'axe principal est contenue dans le plan osculateur de P. Soit $a$ la distance de l'axe principal à une tangente quelconque de la courbe gauche et $\alpha$ l'angle qu'il fait avec cette tangente ; le produit $a$ tang $\alpha$ est constant.

53. Deux cubiques gauches $k^3$ et $k_1^3$, qui ont cinq points communs, peuvent toujours être réunies par une surface réglée du second ordre. En effet, si de deux points de $k_1^3$ on mène deux cordes à $k^3$ et si l'on réunit ces dernières à $k^3$ par une surface du second ordre, cette dernière passe aussi par $k_1^3$, puisqu'elle a sept points communs avec elle (II, page 166). Si la surface est une surface réglée, l'un de ses systèmes réglés se compose de cordes de $k^3$ et l'autre de cordes de $k_1^3$.

54. A un pentagone gauche on peut circonscrire un nombre doublement infini de courbes gauches du troisième ordre. Par un point choisi arbitrairement, il passe une de ces courbes et une droite quelconque de l'espace est une corde de l'une de ces courbes gauches. *Un plan Σ, ne passant par aucun des sommets du pentagone, coupe toutes ces cubiques gauches suivant des triangles polaires d'un système polaire plan.* En effet, toute droite $a$ de Σ est une corde de l'une $k^3$ de ces courbes gauches et peut être conjuguée ou rapportée au point A de Σ suivant lequel $k^3$ est coupée par Σ en dehors de $a$ ; et tout point B de Σ est situé sur l'une de ces courbes $k_1^3$ et peut être rapporté à la corde $b$ de $k_1^3$, contenue dans Σ et ne passant pas par B. Si donc $a$ pivote autour de B, A doit décrire la droite $b$, comme l'énonce le théorème ; alors $k^3$ et $k_1^3$ peuvent être réunies par une surface réglée du second ordre (n° 53) qui passe par $a$ et $b$ et qui contient aussi le point A. Si A est situé sur l'un des côtés du pentagone, $k^3$ se décompose en ce côté et en une conique contenue dans la face opposée de ce polygone. On déduit de là cette propriété de huit points d'une courbe gauche du troisième ordre :

55. Une cubique gauche et les dix couples d'éléments opposés (côtés et faces) d'un pentagone gauche qui lui est inscrit, sont coupés par un plan quelconque, ne passant par aucun des sommets de ce dernier, suivant un triangle polaire et dix couples d'éléments conjugués d'un système polaire plan (II, page 79).

56. Nous arriverons à une autre propriété de huit points d'une cubique gauche au moyen du théorème sur les huit points d'intersec-

tion de trois surfaces du second ordre (II, page 166). Quand six de ces points sont pris à volonté sur une cubique gauche $k^3$, le septième détermine complètement le huitième; ces deux derniers sont sur une même corde $s$ de $k^3$. Comme $s$ peut être réuni à $k^3$ par un faisceau de $F^2$, $s$ sera coupée par une surface quelconque du second ordre, menée par les six points, suivant un couple de points qui constitue avec les six premiers les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre. Mais tous ces couples de points appartiennent à la ponctuelle involutive suivant laquelle $s$ est coupée par un faisceau de $F^2$ passant par les six points (II, page 175). Entre autres théorèmes, on déduit de là le suivant : *Les dix couples de plans opposés d'un hexagone inscrit à une cubique gauche* $k^3$ *sont coupés par une corde quelconque de* $k^3$ *suivant dix couples de points d'une ponctuelle involutive dans laquelle les deux points d'intersection de* $k^3$ *et de sa corde sont aussi conjugués l'un à l'autre.* Ce théorème rappelle celui de Desargues (I, page 155).

57. Quand les deux systèmes réciproques sont situés dans le même plan, mais ne sont pas en involution, à tout point P du plan correspondent deux droites, dont le point d'intersection $P_1$ peut être conjugué au point P. Si P décrit une droite, le point conjugué $P_1$ décrit en général une courbe du second ordre. Entre les systèmes de points P et $P_1$ il existe une correspondance géométrique du second degré et ces systèmes sont en involution. On démontre que les différentes droites $\overline{PP_1}$ qui réunissent deux à deux les points conjugués se coupent en un point principal et sont conjuguées à elles-mêmes.

58. Quand il s'agit d'établir une correspondance géométrique du second degré entre deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$, on peut non seulement faire correspondre entre eux deux triangles propres de ces systèmes pris comme *triangles fondamentaux* ou *principaux* (c'est-à-dire faire correspondre entre eux leurs sommets pris comme points principaux), mais on peut encore prendre arbitrairement dans $\Sigma_1$ le correspondant $A_1$ d'un point quelconque A de $\Sigma$. De cette manière, à tout point P de $\Sigma$ correspond un point déterminé $P_1$ de $\Sigma_1$ (II, pages 155 à 158).

59. Si l'on circonscrit à un triangle toutes les coniques qui touchent une droite donnée, ou une conique passant par deux des sommets du triangle, ou une courbe du troisième ordre passant par deux sommets du triangle et ayant le troisième comme point double, ou enfin une courbe du quatrième ordre ayant pour point double chacun des sommets du triangle, deux quelconques de ces coniques sont coupées pro-

jectivement par toutes les autres. En effet, si l'on rapporte géométriquement le plan des coniques à un autre système plan de telle manière que les trois points principaux du plan coïncident avec les sommets du triangle, les coniques ont pour correspondantes les tangentes d'une courbe du second ordre.

60. Cinq coniques sont circonscrites à un triangle UVW; quatre sont données et la cinquième doit satisfaire à la condition de couper encore les quatre premières en quatre points harmoniques; elle enveloppe en général une certaine courbe du quatrième ordre, qui est aussi tangente aux quatre premières coniques et qui a les sommets du triangle UVW pour points doubles (N° 59).

61. Quand il existe entre deux sytèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ une correspondance géométrique du second degré, on peut facilement distinguer les droites de $\Sigma$, auxquelles correspondent des ellipses dans $\Sigma_1$ de celles auxquelles correspondent des paraboles ou des hyperboles. On cherche dans $\Sigma$ la conique $\sigma$ qui correspond à la droite à l'infini $s_1$ de $\Sigma_1$. Une droite quelconque de $g$ de $\Sigma$ aura pour correspondante dans $\Sigma_1$ une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant qu'elle ne rencontrera pas $\sigma$ ou qu'elle aura avec elle un ou deux points réels communs.

62. Toute courbe du second ordre, inscrite dans le triangle fondamental d'un système plan $\Sigma$ en correspondance quadratique avec un autre système plan $\Sigma_1$, a pour correspondante dans ce dernier une courbe du quatrième ordre qui a pour points de rebroussement les trois points principaux de $\Sigma_1$. *Les tangentes à ces trois points de rebroussement se coupent en un point*; quelles sont alors les trois droites qui leur correspondent dans $\Sigma$?

63. Si l'on admet qu'en général une courbe de l'ordre $n$ a au plus $2n$ points communs avec une conique, on peut facilement en déduire la démonstration du théorème suivant : *Toute courbe d'ordre* n *d'un système plan* $\Sigma$ *a pour correspondante une courbe d'ordre* 2n *dans un système* $\Sigma_1$ *en correspondance quadratique avec* $\Sigma$. Si la première courbe passe une ou plusieurs fois par un point principal de $\Sigma$, la deuxième contient ce même nombre de fois la ligne principale correspondante de $\Sigma_1$ et se décompose par conséquent en cette droite et une courbe d'ordre moindre.

64. Lorsque deux plans en correspondance quadratique ont tous les points de leur droite d'intersection comme éléments correspondants communs, cette droite renferme aussi deux points principaux conju-

gués l'un à l'autre des plans (II, page 156). Les droites qui réunissent les points correspondants seront alors coupées par les deux droites qui réunissent les uns aux autres les deux autres couples de points principaux. Ce cas particulier de la correspondance géométrique a été étudié par Steiner avec son talent habituel (*System. Entwickelung*, pages 251 à 295).

---

### FAISCEAUX, GERBES ET RÉSEAUX DE COMPLEXES LINÉAIRES. GÉNÉRATION PROJECTIVE DES COMPLEXES QUADRATIQUES.

65. Deux éléments sont dits *conjugués l'un à l'autre par rapport à un complexe linéaire de rayons*, quand ils sont conjugués l'un à l'autre dans le système focal dont les directrices constituent le complexe. Tout point a pour conjugué par rapport au complexe son plan focal, qui passe par lui, et tout plan son foyer. Une droite est conjuguée à elle-même ou à une autre droite, suivant qu'elle fait ou non partie du complexe linéaire.

66. Un *faisceau de complexes* se compose de tous les complexes linéaires qui passent par un même système de rayons de premier ordre et de première classe ; ce système de rayons est appelé le *lieu* ou *support* du faisceau de complexes. Par quatre rayons quelconques, qui ne sont pas situés sur une même surface du second ordre ou de seconde classe, passe un faisceau de complexes déterminé ; les quatre rayons en déterminent le lieu. Par un rayon quelconque qui n'appartient pas à tous les complexes du réseau, il passe toujours un seul de ces complexes et rien qu'un.

67. Un faisceau de complexes est déterminé par deux de ses complexes linéaires. Les deux axes de son lieu sont conjugués l'un à l'autre par rapport à chacun de ses complexes ; ils sont les axes de deux complexes *singuliers* du réseau. Chacun de ces complexes se compose de toutes les droites qui coupent l'un des deux axes.

68. Une droite $g$ qui n'appartient pas au lieu du faisceau de complexes et ne coupe pas l'un des axes de ce lieu, a pour conjugués par rapport aux complexes du faisceau les rayons d'un système réglé R qui passe par $g$ et par les deux axes du lieu. En effet, tous les rayons du lieu, qui coupent $g$, sont situés dans un même système réglé (II, page 89)

dont R est le système directeur. Comme un complexe linéaire est déterminé par un de ses rayons et deux droites conjuguées, chaque rayon du système réglé R est conjugué à la droite $g$ par rapport à un complexe du faisceau. — Par rapport à un complexe singulier, une droite quelconque $g$ est conjuguée à l'axe de ce complexe.

69. Les plans focaux de deux points quelconques de la droite $g$ forment deux faisceaux de plans du premier ordre perspectifs au système réglé R et projectifs entre eux; et les foyers par rapport aux complexes linéaires de deux plans passant par $g$ forment deux ponctuelles du premier ordre perspectives à R et projectives entre elles. De là ce théorème :

70. Les plans focaux de points quelconques par rapport à tous les complexes d'un faisceau forment des faisceaux de plans et les foyers de plans quelconques constituent des ponctuelles du premier ordre, qui sont rapportées projectivement entre elles par le faisceau de complexes. Ces formes sont également projectives aux systèmes réglés qui sont conjugués (N° 68) à des droites quelconques par rapport au faisceau de complexes. — Nous dirons que chaque forme élémentaire, qui est projective à l'un de ces faisceaux de plans ou à l'une de ces ponctuelles, est rapportée projectivement au faisceau de complexes.

71. Tous les plans focaux d'un point, situé sur un axe du lieu du faisceau de complexes, coïncident et il en est de même des foyers d'un plan passant par l'un des deux axes du lieu. Le théorème précédent subit donc des exceptions pour les points situés sur ces deux axes et pour les plans passant par eux. Quand une droite $g$ coupe l'un de ces axes, elle a pour correspondants par rapport aux complexes du faisceau les rayons d'un faisceau ordinaire de rayons; ce dernier est projectif au faisceau de complexes, son centre est situé sur l'autre axe du lieu dans le plan réunissant le premier axe avec $g$ et son plan est conjugué au point d'intersection de $g$ et de ce premier axe.

72. Deux faisceaux projectifs de complexes engendrent un complexe de rayons du second degré; ce complexe renferme chacun des rayons communs à deux complexes homologues des faisceaux et peut d'après cela être décrit par un système de rayons de premier ordre et de première classe. Tous les rayons de ce complexe quadratique, qui passent par un même point P arbitraire, forment une surface conique (un *cône du complexe*) du second ordre; elle est engendrée par les plans

focaux qui sont conjugués au point P (N° 70) par rapport aux deux faisceaux des complexes. Tous les rayons du complexe quadratique, situés dans un même plan arbitraire, forment un faisceau de rayons du second ordre; ce faisceau est engendré par les deux ponctuelles formées des foyers conjugués au plan.

73. Le complexe quadratique passe par les lieux des deux faisceaux de complexes qui l'engendrent, parce que chacun des rayons de ces lieux est situé dans deux complexes homologues des faisceaux. On peut démontrer (voir N° 90) que le complexe quadratique contient deux systèmes de rayons ou *congruences* de premier ordre et de première classe, tout comme une surface réglée renferme deux systèmes de droites, et que chacune de ces congruences peut être engendrée par deux faisceaux projectifs de complexes dont les lieux sont deux congruences quelconques de rayons de l'autre système. L'axe d'un complexe singulier de l'un des faisceaux constitue, avec la droite qui lui est est conjuguée par rapport au complexe correspondant de l'autre faisceau, le couple d'axes de la congruence suivant laquelle les deux complexes homologues se pénètrent mutuellement. Tous les points d'un de ces axes sont des points *singuliers* du complexe quadratique, c'est-à-dire que leurs cônes du complexe se décomposent chacun en deux faisceaux de rayons du premier ordre; et tous les plans passant par ces axes sont des plans singuliers du complexe quadratique, parce que les rayons qu'ils contiennent forment deux faisceaux ordinaires de rayons. Le lieu de tous les points et plans singuliers du complexe quadratique est d'après cela en même temps le lieu des axes de toutes les congruences de premier ordre et de première classe comprises dans le complexe; par suite, c'est une surface réglée. Nous montrerons plus loin (N° 85) que cette surface est de quatrième ordre et de quatrième classe. A chaque axe situé sur elle sont conjugués deux autres axes; par ces derniers passent les plans des deux faisceaux de rayons suivant lesquels se décompose le cône du complexe d'un point quelconque de cet axe. — Le complexe tetraédral n'est qu'un cas particulier de ce complexe quadratique.

74. Trois complexes linéaires, qui ne sont pas situés dans un même faisceau de complexes, ont en général un système réglé commun, ou, pour une situation relative particulière, deux faisceaux ordinaires de rayons communs. En effet, s'ils ont trois rayons quelconques $a$, $b$, $c$ communs, ils passent par tous les rayons du système réglé $a\ b\ c$, ou

bien, quand $a$ et $b$ se coupent, ils passent par tous les rayons du faisceau $a\,b$ et par ceux du second faisceau de rayons du premier ordre qui réunit un rayon du premier avec $c$ (II, pages 88-89). Trois complexes n'ont donc deux faisceaux de rayons communs que si les axes des deux congruences, suivant lesquelles l'un quelconque d'entre eux rencontre les deux autres, se coupent deux à deux. D'une manière générale, si l'une de ces congruences a deux axes réels $u$, $v$, les complexes passent par tous les rayons qui coupent $u$ et $v$ et appartiennent au troisième complexe; de là on déduit à nouveau le théorème. C'est seulement quand ces axes sont imaginaires, qu'il est possible que les trois complexes n'aient aucun rayon réel commun.

75. Quand trois complexes linéaires quelconques ont un rayon réel $l$ commun, ils ont encore une infinité de rayons communs. Pour le démontrer, menons par $l$ deux plans $\alpha$ et $\beta$ et rapportons perspectivement à $\alpha$ les deux congruences suivant lesquelles le premier des trois complexes rencontre les deux autres. Ces deux congruences de premier ordre et de première classe sont donc aussi perspectives à la gerbe A, qui est conjuguée au système plan $\alpha$ par rapport à ce premier complexe et qui contient le rayon $l$. Elles seront coupées par $\alpha$ et $\beta$, suivant deux systèmes plans collinéaires entre eux (II, page 89), qui ont comme éléments correspondants communs une gerbe A et par conséquent aussi une ponctuelle $a$; et chaque rayon d'une des congruences, qui rencontre la droite $a$, est aussi situé sur l'autre et est un rayon commun aux trois complexes.

76. Un complexe linéaire n'a pas de rayons communs avec une congruence de premier ordre et de première classe, ou bien il a en commun avec elle un système réglé ou deux faisceaux ordinaires de rayons, quand il ne passe pas par tous les rayons de la congruence. Quatre complexes linéaires, ou deux congruences de premier ordre et de première classe, ou un complexe linéaire et un système réglé ont en général au plus deux rayons communs (N° 74).

77. Trois complexes linéaires, n'appartenant pas à un même faisceau de complexes, déterminent une *gerbe de complexes*, qui passe par eux. Elle comprend le faisceau de complexes qui réunit deux quelconques des trois complexes, et chaque complexe linéaire qui est situé dans un même faisceau de complexes avec l'un des complexes du faisceau précédent et le troisième complexe donné. Nous attribuons aussi à la gerbe de complexes toutes les congruences de premier ordre et de

première classe suivant lesquelles deux complexes quelconques de la gerbe se pénètrent. Le *lieu* de la gerbe de complexes est en général un système réglé réel ou imaginaire, par lequel passent tous les complexes et toutes les congruences du faisceau; dans des cas particuliers, il se compose de deux faisceaux de rayons du premier ordre. Les directrices du lieu sont les axes des complexes singuliers du faisceau.

78. Une droite $g$, qui n'appartient pas au lieu de la gerbe de complexes et qui n'en est pas une directrice, a pour conjugués, par rapport aux complexes de la gerbe, les rayons d'une congruence (ou système de rayons) de premier ordre et de première classe. Cette congruence passe par $g$ et par les trois droites qui sont conjuguées à $g$ par rapport aux trois complexes choisis en commençant (n° 68); et elle est déterminée par ces quatre droites ou par quatre autres quelconques de ses rayons (II, page 90). Par rapport à tous les complexes de la gerbe, les foyers de deux plans quelconques menés par $g$ constituent deux systèmes plans perspectifs à la congruence et par conséquent collinéaires entre eux; de même, les plans focaux de points quelconques de $g$ forment des gerbes collinéaires qui sont perspectives à la congruence. On déduit de là ce théorème :

79. Les foyers de plans quelconques par rapport à tous les complexes d'une gerbe forment des systèmes plans, et les plans focaux de points quelconques constituent des gerbes qui sont rapportées projectivement, c'est-à-dire collinéairement ou réciproquement entre elles. Ces formes sont aussi projectives aux congruences de premier ordre et de première classe qui sont conjuguées à des droites quelconques par rapport à la gerbe de complexes. Toute forme de seconde espèce qui est projective à l'un de ces systèmes plans ou à l'une de ces gerbes, sera dite projective à la gerbe de complexes.

80. Le système plan formé des foyers d'un plan quelconque est rapporté projectivement à la gerbe de complexes de telle manière qu'à chacun de ses points correspond un complexe de la gerbe, à chaque ponctuelle du premier ordre un faisceau de complexes, et à chaque droite, considérée comme lieu d'une ponctuelle, une congruence de la gerbe considérée comme lieu du faisceau correspondant de complexes.

Une droite quelconque du plan fait toujours partie de la congruence qui lui correspond dans la gerbe de complexes, et deux plans quelconques sont, comme précédemment, rapportés collinéairement l'un à

l'autre quand les deux rayons, qui leur sont communs avec une congruence de la gerbe de complexes, sont conjugués l'un à l'autre.

81. La gerbe de complexes contient (n° 80) tous les faisceaux de complexes qui passent chacun par deux de ses complexes ; elle est aussi bien déterminée par trois quelconques de ses complexes, ne faisant pas partie d'un même faisceau, que par les trois complexes primitifs ; deux de ses faisceaux de complexes ont toujours un complexe commun et deux de ses congruences peuvent toujours être réunies par un complexe linéaire. Par chaque rayon de l'espace, il passe une congruence de la gerbe ; par deux rayons quelconques, il passe un complexe de la gerbe. et en général ce dernier est complètement déterminé par les deux rayons.

82. Les points ou plans, conjugués à des points ou plans quelconques par rapport aux congruences contenues dans une gerbe de complexes, forment respectivement des systèmes plans ou des gerbes collinéaires. Pour abréger, nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème.

83. Deux gerbes de complexes sont dites réciproques, quand par rapport à elles un plan, et par conséquent (n° 79) tous les plans, ont pour conjugués deux systèmes réciproques de foyers et quand par suite tout point a pour conjuguées deux gerbes réciproques de plans focaux. A tout complexe de l'une des gerbes de complexes correspond donc une congruence de premier ordre et de première classe dans l'autre ; tout faisceau de complexes, passant par une congruence de l'une des gerbes, a pour correspondant un faisceau de congruences situé dans le complexe correspondant de l'autre.

84. Deux gerbes réciproques de complexes engendrent un complexe du second degré [1]. Ce complexe quadratique passe par chaque rayon commun à un complexe de l'une des gerbes et à la congruence correspondante de l'autre ; il passe donc aussi par les lieux des gerbes réciproques de complexes et peut être décrit par un système réglé. Tous les rayons du complexe quadratique, situés dans un plan quelconque, forment un faisceau de rayons du second ordre (II, page 71) et tous ses

---

1. M. Frédéric Schur a démontré le premier dans sa thèse doctorale (*Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1 und 2 Grades*, Berlin, 1879), que tout complexe quadratique peut être engendré d'une infinité de manières par deux gerbes réciproques de complexes.

rayons issus d'un même point constituent une surface conique du second ordre, c'est le *cône du complexe* du point. Les points et plans singuliers du complexe quadratique sont ceux dont les cônes du complexe ou les faisceaux de rayons du complexe se décomposent en deux faisceaux ordinaires de rayons.

85. Par une droite quelconque $g$, il passe en général quatre plans singuliers au plus, et cette droite contient en général, et au plus, quatre points singuliers du complexe quadratique. En effet, les cônes du complexe de trois points quelconques de la droite $g$ se coupent en général en huit points au plus; les plans qui réunissent ces huit points avec $g$ sont des plans singuliers du complexe quadratique parce que, parmi les rayons du complexe qu'ils contiennent, trois passent par chacun de ces points et ils coïncident deux à deux, parce qu'un plan singulier renferme deux faisceaux de rayons du complexe. On démontre d'une manière analogue la seconde partie du théorème.

86. Quatre complexes linéaires, non situés dans une même gerbe de complexes, déterminent un *réseau de complexes* qui passe par eux. A ce réseau appartient la gerbe de complexes, qui réunit trois quelconques des quatre complexes, ainsi que tout complexe linéaire qui est situé dans une même gerbe de complexes avec deux complexes de la gerbe précédente et le quatrième complexe donné. Nous attribuons en outre à ce réseau de complexes toutes les congruences et tous les systèmes réglés suivant lesquels se rencontrent respectivement deux ou trois complexes quelconques du réseau. Si les quatre premiers complexes ont deux rayons communs, le réseau de complexes se compose de tous les complexes linéaires, systèmes réglés et congruences de premier ordre et de première classe, qui passent par ces deux rayons. Ces rayons constituent *le lieu* du réseau de complexes; quand ils se coupent, ce réseau est singulier et a pour lieu le faisceau de rayons du premier ordre qui passe par eux.

87. Le réseau de complexes contient (n° 86) tous les faisceaux de complexes qui sont déterminés par deux de ses complexes et toutes les gerbes qui sont déterminées par trois d'entre eux; il est aussi bien déterminé par quatre quelconques de ses complexes, n'appartenant pas à une même gerbe, que par les quatre complexes primitifs. Deux ou trois gerbes quelconques de complexes du réseau ont toujours respectivement en commun un faisceau de complexes ou un complexe linéaire; ce dernier passe par les lieux des trois gerbes. Par conséquent, trois

systèmes réglés quelconques du réseau peuvent être réunis par un de ses complexes linéaires. Par chaque rayon de l'espace, il passe un système réglé du réseau ; deux rayons quelconques peuvent être réunis par une congruence et trois par un complexe du réseau, qui, en général, est complètement déterminé par les trois rayons.

88. Une droite $g$, n'ayant aucun point commun avec le lieu du réseau, a pour conjugués, par rapport aux complexes de ce réseau, les rayons d'un complexe linéaire ; ce dernier passe par $g$ et il est déterminé par $g$ et par les quatre droites conjuguées à $g$ par rapport à quatre complexes quelconques du réseau (II, page 82 ; voir n° 78). Les deux complexes linéaires, qui sont conjugués à deux droites quelconques par rapport au réseau, ont en commun les axes de tous les complexes singuliers du réseau (n° 68) ; ces axes constituent donc une congruence de premier ordre et de première classe et le lieu du réseau de complexes se compose des deux axes réels ou imaginaires de cette congruence. On voit en même temps que : quatre complexes linéaires ont en général deux rayons communs, réels ou imaginaires.

89. Le réseau de complexes peut être rapporté collinéairement à un système $\Sigma$ de l'espace de telle manière qu'à chacun de ses complexes corresponde un plan de $\Sigma$, à chaque faisceau de complexes un faisceau de plans du premier ordre, et à chaque gerbe de complexes et à son lieu une gerbe et son sommet. On peut, pour y arriver, rapporter projectivement en suivant la marche indiquée ci-dessus (n° 79) deux gerbes du réseau à deux gerbes de $\Sigma$, de manière qu'à tout complexe commun aux deux premières corresponde un point commun aux deux secondes ; la collinéation se trouve ainsi établie d'une manière bien définie. (Voir II, page 25). Le complexe linéaire qui est, par rapport au réseau de complexes, le conjugué d'une droite quelconque $g$, se trouve aussi par ce moyen rapporté projectivement à $\Sigma$ ; ainsi à chacun de ses rayons correspond un plan de $\Sigma$ et réciproquement ; toutefois le rayon $g$ a pour correspondants tous les plans d'un faisceau de plans de $\Sigma$.

90. A tout plan de $\Sigma$ correspond dans le réseau de complexes un complexe linéaire, à toute droite de $\Sigma$ une congruence de premier ordre et de première classe, et en général à un point quelconque de $\Sigma$ un système réglé. Tous les systèmes réglés du réseau, qui correspondent aux points d'une surface du second ordre de $\Sigma$, sont situés dans un complexe quadratique. La surface peut, comme on le sait, être engendrée par des gerbes réciproques ; d'une manière analogue, ce complexe quadratique

peut être engendré par des gerbes réciproques de complexes. Les deux rayons, communs aux complexes de ce réseau, sont des rayons doubles du complexe quadratique. Le complexe quadratique (n° 72) engendré par deux faisceaux projectifs de complexes appartient encore à cette catégorie : car deux faisceaux de complexes peuvent toujours être réunis par un réseau de complexes.

Les complexes singuliers du réseau ont pour correspondants dans le système $\Sigma$ de l'espace les plans tangents d'une surface de seconde classe, parce que en général un faisceau de complexes renferme au plus deux complexes singuliers (n° 67).

---

### RÉSEAU DE SURFACES DU SECOND ORDRE. SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE.

91. Nous empruntons à la géométrie analytique le théorème suivant dont nous ne connaissons pas de démonstration synthétique simple : *Quand une courbe du quatrième ordre a plus de huit points communs avec une conique, elle se décompose en cette conique et en une autre conique.*

Nous imaginerons que le réseau de $F^2$, dont il va être question dans les numéros suivants, soit rapporté projectivement à un système de l'espace $\Sigma_1$, d'après la manière indiquée précédemment (II, page 255).

92. *Une conique du réseau $\Sigma$, de $F^2$, a pour correspondante dans le système $\Sigma_1$ de l'espace, soit une courbe plane du quatrième ordre (II, page 259), soit une courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce (voir II, page 244).* En effet, cette courbe a au plus quatre points communs avec un plan quelconque de $\Sigma$, parce que la surface du réseau de $F^2$ qui correspond à la conique coupe la conique en quatre points au plus. Dans le cas où la courbe est gauche, par neuf quelconques de ses points menons une surface $L_1^2$ du second ordre ; il lui correspond dans $\Sigma$ une surface $L^4$ du quatrième ordre ; et comme cette dernière ne peut avoir avec la conique plus de huit points com-communs, elle sera coupée par le plan suivant cette conique et suivant une deuxième conique. Par la courbe gauche du quatrième ordre il ne passe donc que cette surface de $L_1^2$ du second ordre ; elle coupe la surface de Steiner de $\Sigma_1$ qui correspond au plan des deux coniques, suivant une seconde courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce.

93. A une conique de l'espace $\Sigma_1$ correspond dans le réseau $\Sigma$ de $F^2$ une courbe gauche du huitième ordre par laquelle passe une surface du réseau. En effet, toute surface de Steiner de $\Sigma_1$, qui correspond à un plan de $\Sigma$, a au plus huit points communs avec la conique, quand cette dernière n'est pas contenue tout entière sur la surface (n° 91).

94. A une surface du quatrième ordre de $\Sigma_1$ correspond dans le réseau $\Sigma$ de $F^2$ une surface du huitième ordre; une surface du second ordre de $\Sigma$ a pour correspondante dans $\Sigma_1$ une surface de huitième ordre ou un plan.

95. Aux points d'une droite quelconque du réseau $\Sigma$ sont associés (n° 93) les points d'une courbe gauche du septième ordre, qui peut être réunie à la droite par une surface du second ordre. Cependant si la droite est un rayon principal de $\Sigma$, ses points sont associés à une courbe gauche du troisième ordre, dont la droite est une corde.

96. Les points d'un plan quelconque ont pour associés dans le réseau $\Sigma$ de $F^2$ une surface du septième ordre (n° 94). La surface passe par tous les rayons principaux du plan (dont il existe au moins un et au plus trois, d'après la page 259) et elle se coupe elle-même suivant les courbes gauches du troisième ordre, qui sont associées à ces rayons principaux. Elle renferme un nombre doublement infini de courbes gauches du septième ordre (n° 95) ; ces dernières sont situées deux à deux sur des surfaces du second ordre qui sont coupées chacune par le plan donné suivant deux droites. Le plan donné est coupé par la surface nodale du réseau suivant une courbe du quatrième ordre, également contenue sur la surface du septième ordre; car chaque point de la surface nodale coïncide avec l'un de ses associés.

97. Tous les points d'un plan, qui possèdent des points associés dans un deuxième plan donné, sont situés sur une courbe du septième ordre (n° 95 ou 96).

98. Si, comme nous allons le supposer à présent, les surfaces du réseau $\Sigma$ de $F^2$ ont un point A commun, aux points d'une droite passant par A sont associés les points d'une courbe gauche du troisième ordre, dont la droite est une corde; de même à un plan $\varphi$ passant par A est associée une surface du cinquième ordre, qui peut être décrite par une courbe gauche du troisième ordre. Cette surface du cinquième ordre a en commun avec le plan $\varphi$ son rayon principal $u$ ne passant pas par A ainsi que sa ligne d'intersection avec la surface nodale $K^4$ du réseau; elle

passe deux fois par la courbe gauche du troisième ordre associée au rayon principal $u$ et contient aussi le point A.

99. A une surface $L_1^2$ du second ordre de $\Sigma_1$ correspond dans le réseau de surfaces $\Sigma$ une surface $L^4$ du quatrième ordre, dont A est un point double. Dans ce point double A, la surface $L^4$ a une infinité de plans tangents, qui enveloppent une surface conique du second ordre, parce que (d'après II, page 265) ils ont pour éléments correspondants dans le plan $\alpha_1$ les tangentes de la conique commune à $L_1^2$ et $\alpha_1$. Si cette conique dégénère en deux droites, le point double est *biplanaire* et n'a que deux plans tangents.

100. Dans ce qui suit, nous ferons un fréquent usage de ce théorème : *Quand deux surfaces du second ordre se coupent suivant une courbe $\eta^2$ du second ordre, tous leurs autres points communs sont situés sur une deuxième conique.* En effet, s'il existe d'autres points communs que ceux de $\eta^2$, joignons trois d'entre eux, A,B,C par un plan. Ce plan coupe $\eta^2$ suivant une droite qui est tangente à $\eta^2$, ou dont les points sont accouplés involutivement par $\eta^2$ et conséquemment par chacune des deux surfaces du second ordre. Dans le premier cas, le théorème résulte de la page 78, dans le second de la page 186 de la première partie. La seconde conique, comme du reste aussi la première $\eta^2$, peut se décomposer en deux droites ou se réduire à une droite unique.

101. Considérons encore le cas particulier du réseau $\Sigma$ de $F^2$, dans lequel toutes les surfaces ont en commun cinq points d'une conique $\eta^2$ et par conséquent tous les points de cette courbe. En faisant abstraction de la conique $\eta^2$, une droite quelconque du système $\Sigma_1$ de l'espace n'a pour correspondante qu'une conique de $\Sigma$ et un point $\Sigma_1$ seulement deux points associés de $\Sigma$ (n° 100). Soit de plus $Y_1$ le point de $\Sigma_1$ qui correspond à un point quelconque de $\Sigma$ situé dans le même plan que $\eta^2$ ; à $Y_1$ doivent correspondre tous les points du plan $\eta^2$. En effet, à tout plan de $\Sigma_1$ passant par $Y_1$ il correspond dans $\Sigma$ une surface du second ordre, qui se décompose dans le plan $\eta^2$ et un second plan. A toute droite $s_1$ passant par $Y_1$ ne correspond donc, abstraction faite du plan de $\eta^2$, qu'un seul rayon principal $s$ de $\Sigma$, dont les points sont associés deux à deux et conséquemment accouplés involutivement, et deux de ces rayons principaux sont situés dans un même plan, auquel correspond un plan passant par $Y_1$.

102. Les différents rayons principaux $s$ du réseau $\Sigma$, qui correspondent aux rayons issus du point $Y_1$, se coupent en un seul et même point

Y. En effet, ils se coupent deux à deux, sans être cependant contenus tous dans un même plan. Les deux gerbes Y et $Y_1$ qui se correspondent sont rapportées collinéairement l'une à l'autre ; le point Y correspond au point $Y_1$ et par conséquent est associé à chaque point du plan $\eta^2$.

103. Par le point Y passe le plan de chaque conique $\gamma^2$ qui correspond à une droite quelconque $g_1$ du système $\Sigma_1$ de l'espace. Il s'ensuit que : *quand quatre surfaces du second ordre ont une conique $\eta^2$ commune, les plans des six autres coniques, suivant lesquelles elles se coupent deux à deux, passent par un seul et même point Y.*

A un point quelconque $P_1$ de $g_1$ correspond dans $\gamma^2$ un couple de points associés, ou un point associé à lui-même, ou pas de point réel, suivant que le rayon principal de Y, qui correspond au rayon $\overline{Y_1P_1}$, coupe la conique $\gamma^2$ en deux points, ou lui est tangente, ou ne la rencontre pas. Les différents points de $\Sigma_1$, auxquels correspond dans le réseau $\Sigma$ un point associé à lui-même, sont situés sur une surface $K_1{}^2$ du second ordre ; en effet, toute droite $g_1$ contient au plus deux de ces points, parce que du point Y on peut au plus mener deux tangentes à la conique correspondante $\gamma^2$.

104. Toute droite $x$, qui rencontre la conique $\eta^2$ en un point X, est aussi (II, page 262) un rayon principal du réseau $\Sigma$ ; cependant ses points ne sont pas accouplés involutivement par association, mais la droite $x$ est projectivement rapportée à la droite correspondante $x_1$ et ses points ont pour associés ceux d'un autre rayon principal $z$. La droite $z$ rencontre aussi la conique $\eta^2$ en un point ; elle constitue avec $x$ la conique qui correspond à la droite $x_1$ de $\Sigma_1$ ; elle est donc située avec $x$ dans un plan passant par Y et coupe $x$ en un point associé à lui-même. Si la droite $x$ passe aussi par le point Y, $z$ coïncide avec elle ; alors le point X est associé à tout autre point de $x$, et à chaque point de $x_1$ correspond le point X et encore un autre point unique du rayon principal $x$. Le théorème précédent, n° 101, donne lieu alors aux exceptions suivantes :

105. Sur chaque rayon principal $s$ de $\Sigma$, qui réunit le point Y à un point de X de la conique $\eta^2$, le point X a pour associés tous les autres points de ce rayon ; la droite $s$ est projective à la droite correspondante $s_1$ de $\Sigma_1$, mais tous les points de cette dernière correspondent en même temps au point X. A l'avenir, nous représenterons par $H^2$ la surface conique du second ordre par laquelle la conique $\eta^2$ est projetée du point Y et par $H_1{}^2$ la surface conique correspondante de la gerbe $Y_1$.

106. Les coniques de $\Sigma_1$, qui correspondent aux droites de $\Sigma$ (II.

page 257) ont le point $Y_1$ commun. A un plan $\varphi$ de $\Sigma$, ne passant pas par Y correspond (II, page 266) dans $\Sigma_1$ une surface $F_1^2$ du second ordre, passant par $Y_1$, qui sera réglée, conique ou non réglée suivant que le plan $\varphi$ aura avec la conique $\eta^2$ deux points, un point ou pas de points communs. A tout point de $F_1^2$ correspond un seul point dans $\varphi$ : seul le point $Y_1$ a pour élément correspondant une droite. A toute conique de $F_1^2$ correspond dans $\varphi$ une conique qui lui est projective, quand elle ne passe pas par $Y_1$ ; dans le cas contraire, c'est une droite.

107. Tous les points d'un plan $\varphi$, qui ont des points associés dans un autre plan $\psi$, sont en général situés sur une conique. En effet, aux plans $\varphi$ et $\psi$, correspondent dans l'espace $\Sigma_1$ deux surfaces du second ordre ; elles ont en général en commun une courbe du second ordre passant par $Y_1$, qui correspond à la droite $\overline{\varphi\psi}$, et par suite aussi en général une deuxième conique $k_1^2$ (nº 100). A la conique $k_1^2$ correspondent dans $\varphi$ et $\psi$ deux coniques associées l'une à l'autre ; elles sont situées sur la surface du second ordre de $\Sigma$ qui correspond au plan de $k_1^2$.

108. Un plan $\varphi$, ne passant pas par Y, a pour associée dans le réseau $\Sigma$ (nº 107) une surface du second ordre qui passe par Y et par la conique $\eta^2$. Par conséquent, tous les points de $\varphi$ associés à eux-mêmes sont situés sur une même conique et tous les points du réseau $\Sigma$ associés à eux-mêmes doivent être situés sur une surface $K^2$ du second ordre, qui est tangente à la surface conique $H^2$ suivant la conique $\eta^2$. Cette surface $K^2$ est la surface nodale du réseau et elle contient les sommets de tous les cônes appartenant au réseau. Cette surface nodale à son tour a pour correspondante dans $\Sigma_1$ une surface $K_1^2$ du second ordre (nº 105). Deux points associés quelconques sont sur une même droite avec Y et, quand cette dernière coupe $K^2$, ils sont harmoniquement séparés par $K^2$. Nous sommes évidemment conduits ici à la même relation involutive, entre les points de l'espace illimité, que celle qu'on avait trouvée dans le nº 21.

109. Une droite quelconque a pour associée dans le réseau $\Sigma$ (nº 108) une conique passant par Y et une conique quelconque $k^2$, une courbe $k^4$ du quatrième ordre plane ou gauche, suivant que $k^2$ est ou non dans un même plan avec Y. Le point Y est un point double de $k^4$ et il est associé aux deux points d'intersection de $k^2$ et du plan $\eta^2$. Si $k^4$ est une courbe gauche du quatrième ordre, elle est l'intersection de la surface conique $Yk^2$ et de la surface du second ordre qui est associée au plan de $k^2$ ; elle est donc de la première espèce.

110. Quand une conique $k^2$ est sur une même surface du second ordre avec la courbe $\eta^2$, elle n'a plus pour associée une courbe du quatrième ordre, mais bien une conique qui lui est projective.

En effet, au plan de $\Sigma_1$ qui contient les points correspondants à trois points quelconques A, B, C de $k^2$, correspond dans le réseau $\Sigma$ une surface du second ordre qui passe par $\eta^2$ et A, B, C, et par suite aussi par $k^2$ (nº 100). Et cette surface du second ordre sera rencontrée pour la seconde fois par la surface conique $Yk^2$ suivant la conique associée à $k^2$. Pour le cas où le plan de $k^2$ passe par le point Y, le théorème se déduit du suivant :

111. Une surface quelconque du second ordre menée par la conique $\eta^2$ a pour associées une autre surface du second ordre passant par $\eta^2$ (nº 110) et de plus la surface conique $Y\eta^2$ ou $H^2$.

112. A une surface $F^2$ du second ordre entièrement arbitraire est associée (nº 109) une surface $F^4$ du quatrième ordre, dont Y est un point double. Les tangentes de $F^4$ au point Y forment une surface conique du second ordre qui coupe encore $F^4$ suivant une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce ; cette surface conique passe par la conique commune à $F^2$ et au plan $\eta^2$. Toutes les autres tangentes que l'on peut encore mener du point double Y à la surface $F^4$ sont tangentes à $F^4$ suivant les points d'une courbe gauche du quatrième ordre et forment une deuxième surface conique qui est aussi tangente à la surface $F^2$. La conique $\eta^2$ est une courbe double de $F^4$ parce que, en général, $F^2$ est coupée deux fois par chacun des rayons de la surface conique $H^2$. (Voir nº 105.) Une conique quelconque de $F^2$ a en général pour correspondante sur $F^4$ une courbe gauche du quatrième ordre de première espèce ; ces courbes gauches sont deux à deux situées sur des cônes du second ordre ayant Y pour sommet.

113. La surface $F^4$ contient en général quatre droites passant par Y ; elles joignent Y aux points d'intersection X de $F^2$ et $\eta^2$ (nº 105).

Tout plan, qui passe par deux de ces points d'intersection X, a en commun avec $F^2$ une conique à laquelle est associée sur $F^4$ une conique qui lui est projective (nº 110). La surface $F^4$ contient donc en général six systèmes de coniques ou peut être décrite de six manières différentes par une conique variable ; par un point quelconque de $F^4$, il ne passe qu'une seule conique de chaque système. Un plan quelconque coupe la surface $F^4$ suivant une courbe du quatrième ordre qui a un point commun avec chacune des droites $\overline{XY}$ et qui a, en géné-

ral, deux points doubles sur la conique $\eta^2$ ; il lui correspond sur $F^2$ une courbe gauche du quatrième ordre passant par les quatre points X (n° 108). On déduit facilement de là que : les six systèmes de coniques de $F^4$ sont conjugués deux à deux de telle manière que toute conique de l'un des systèmes est située dans un même plan ε avec une conique du système conjugué. Deux des quatre points d'intersection de ces deux coniques sont sur $\eta^2$ : aux deux autres, $F^4$ est tangente au plan ε, parce que $F^2$ est également tangente en deux points à la surface du second ordre associée à ε. La surface $F^4$ possède aussi trois systèmes de plans doublement tangents et a deux coniques communes avec chacun de ces plans.

114. De la représentation de $F^4$ sur $F^2$ et du n° 113, on déduit immédiatement que : un quelconque des six systèmes de coniques accouple involutivement les points de chaque conique appartenant au système conjugué, tandis qu'il rapporte projectivement les unes aux autres les coniques des quatre autres systèmes. De la première partie de ce théorème, il suit que les différents plans de chaque système se coupent en un seul et même point U. Deux coniques conjuguées, qui ne sont situées sur aucun de ces plans U, sont coupées projectivement par eux de telle manière qu'elles ont deux points correspondants communs ; elles engendrent donc en général un faisceau de rayons du second ordre (I, page 142) et l'on en conclut : que chacun des trois systèmes de plans doublement tangents constitue un faisceau de plans du second ordre ; les tangentes doubles de $F^4$, situées dans ces plans, forment une surface conique du second ordre enveloppée par les plans U. Si la dernière partie du théorème était inexacte, il passerait en général par les points de contact des tangentes doubles deux coniques d'un seul et même système, ce qui est en contradiction avec le n° 113. Comme les six plans, qui joignent les droites $\overline{XY}$ deux à deux, font partie aussi des plans doublement tangents à $F^4$, chacun des trois faisceaux de plans U contient deux de ces six plans, qui sont opposés l'un à l'autre.

115. Si $F^2$ est une surface réglée, $F^4$ contient encore deux autres systèmes de coniques, qui passent toutes par Y et qui sont contenues deux à deux sur les plans tangents menés de Y à $F^2$ (n° 109). En outre des quatre rayons $\overline{XY}$, on peut donc encore trouver quatre couples d'autres droites sur la surface $F^4$ ; elles correspondent aux quatre couples de rayons de la surface réglée, qui passent par les quatre points X, et elles coupent deux à deux les droites $\overline{XY}$.

116. Quand $F^2$ passe par Y, $F^4$ se décompose en le plan $\eta^2$ et en une

surface du troisième ordre. Il est encore intéressant d'étudier la surface $F_1^4$ de $\Sigma_1$, qui correspond à une surface $F^2$ du second ordre de $\Sigma$. On trouve que $F_1^4$ a les mêmes propriétés que la surface $F^4$ dont il vient d'être question. Le théorème suivant est utile dans cette étude : La surface $F^2$ contient une courbe gauche du quatrième ordre, dont les points sont associés deux à deux ; $F^4$ coupe $F^2$ suivant cette courbe et suivant une autre courbe gauche du quatrième ordre ; la dernière est située sur la surface nodale du réseau (n° 108).

117. A une surface $L_1^2$ du second ordre de $\Sigma_1$ correspond dans $\Sigma$ une surface $L^4$ du quatrième ordre à laquelle on peut en général mener une infinité de tangentes doubles du point Y. Ces tangentes doubles forment un cône du second ordre et sont tangentes à $L^4$ suivant les points d'une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce ; car elles correspondent aux tangentes que l'on peut mener à $L_1^2$ du point $Y_1$. Du point Y, on peut en outre mener une infinité de tangentes simples à $L^4$ ; leurs points de contact sont sur une courbe gauche du quatrième ordre, suivant laquelle $L^4$ est coupée par la surface nodale du réseau ; ils sont par conséquent associés à eux-mêmes. La conique $\eta^2$ est une courbe double de la surface $L^4$ (n° 105), parce que $L_1^2$ est en général coupée deux fois par chaque rayon de la surface conique $H_1^2$. A une conique quelconque de $L_1^2$, correspond en général sur $L^4$ une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce ; ces courbes gauches sont situées deux à deux sur des surfaces coniques du second ordre, ayant le point Y pour sommet. Si $L_1^2$ est une surface réglée, $L^4$ contient deux systèmes de coniques dont les plans passent par Y et sont doublement tangents à la surface $L^4$. Si $L_1^2$ passe par Y, $L^4$ se décompose en le plan $\eta^2$ et une surface du troisième ordre.

118. Nous n'avons pas l'intention de parler d'une manière bien étendue des surfaces $L^4$, dont la surface $F^4$ du n° 112 est un cas particulier ; nous nous contenterons de faire une remarque sur les coniques qui peuvent se trouver sur $L^4$. Une conique $k^2$ de $\Sigma$ a en général pour correspondante dans $\Sigma_1$ une courbe gauche du quatrième ordre, et seulement une conique $k_1^2$, quand $k^2$ peut être réunie à $\eta^2$ par une surface du second ordre (n° 110). Dans ce dernier cas, il existe encore une conique associée à $k^2$ qui correspond également à la conique $k_1^2$. Trois points quelconques A, B, C de $\Sigma$ peuvent toujours (n° 110) être réunis par une conique unique à laquelle correspond encore une conique dans $\Sigma_1$ ; trois points de $\Sigma_1$ peuvent en général être réunis

par quatre coniques auxquelles correspondent des couples de coniques dans $\Sigma$.

119. Un plan $\varphi$, ne passant pas par Y, ne coupera $L^4$ suivant des coniques que si $L_1^2$ a en commun avec la surface du second ordre correspondante à $\varphi$ dans $\Sigma_1$, non pas une courbe gauche du quatrième ordre, mais deux coniques, et si par conséquent il lui est doublement tangent. Tout plan qui a des coniques communes avec $L^4$ est donc un plan doublement tangent à la surface $F^4$. Les coniques de $L^4$ sont associées deux à deux, ou bien, dans des cas particuliers, elles sont associées à elles-mêmes. — $L^4$ ne contient des droites que si $L_1^2$ est une surface réglée ou conique du second ordre et si à ses rayons individuels correspondent des rayons principaux du réseau.

120. L'étude du réseau $\Sigma$ de $F_2$ considéré dans les 19 derniers numéros se termine par un cas tout à fait particulier. En effet, les différentes surfaces du réseau peuvent avoir encore un point commun en outre de la conique $\eta^2$. Ce point joue alors le rôle du point Y; car tous les rayons principaux $s$ du réseau, qui ne rencontrent pas la conique $\eta^2$, passent par lui. Toutefois, les points d'un pareil rayon principal $s$ ne sont plus accouplés involutivement par association, mais la droite $s$ est rapportée projectivement (II, page 262) à la droite $S_1$ qui lui correspond dans $\Sigma_1$. De même que ces rayons principaux $s$ de $\Sigma$ passent tous par le point Y, de même les rayons correspondants $s_1$ de $\Sigma_1$ se coupent tous au point $Y_1$. A ce dernier correspondent tous les points du plan $\eta^2$, et de la même manière le point Y a pour correspondants tous les points d'un plan $\eta_1^2$ de $\Sigma_1$ (II, page 265).

121. D'après cela les espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont tellement rapportés l'un à l'autre que les gerbes collinéaires Y et $Y_1$ se correspondent, et que deux droites homologues de ces gerbes sont projectives l'une à l'autre, mais que cependant, à chacun des points Y et $Y_1$ correspond un plan $\eta_1^2$ ou $\eta^2$ ne passant pas par l'autre. A tout plan de l'un des espaces correspond en général une surface du second ordre dans l'autre, et toutes ces surfaces ont en commun une conique ($\eta^2$ ou $\eta_1^2$) et en outre un point (Y ou $Y_1$). En général, la relation de $\Sigma$ à $\Sigma_1$ est la même que celle de $\Sigma_1$ à $\Sigma$, ce qui n'a pas lieu pour les autres cas du réseau de $F^2$. Si les deux gerbes collinéaires Y et $Y_1$ sont projectives égales et si on les place l'une sur l'autre de telle manière qu'elles aient tous leurs éléments correspondants communs, si alors les deux plans $\eta^2$ et $\eta_1^2$ coïncident aussi l'un avec l'autre, les espaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont en involution. Ils constituent donc un sys-

tème involutif qui est exactement le même que celui auquel nous sommes arrivés dans le n° 108 et précédemment dans le n° 21. A une surface quelconque du second ordre de l'un des espaces correspond alors dans l'autre une surface du quatrième ordre, dont nous avons déjà trouvé les propriétés principales dans les nos de 112 à 115.

Il faut remarquer encore qu'entre deux systèmes plans $\Sigma$ et $\Sigma_1$ dont les lieux se correspondent dans les gerbes collinéaires $S$ et $S_1$, il existe une correspondance géométrique du second degré.

FIN.

# TABLE DES MATIÈRES

APPENDICES. PROBLÈMES ET THÉORÈMES



FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.